Válasz Fleiner Tamás bírálatára

Először is köszönöm a bírálat elvégzésébe fektetett hatalmas munkát és a feltárt hiányosságok ellenére a támogató véleményét. AZ elkövetett hibák, pontatlanságok nagy részére nincs mentségem, gondosabban kellett volna eljárni.

A tételes megjegyzésekre adott válaszok előtt az általános bírálat két pontját szeretném árnyalni.

Közös munka esetén kétféle megközelítést javasolnak a hozzájárulások elkönyvelésére (1) nem szétválasztható (2) pontonként leírni az eredeti publikációban, ki mit végzett. Az eredeti publikációkban nem tettünk meg a (2) módszernek megfelelő szétválasztást (az esetek többségében nem is lenne lehetséges), így ezt utólag egy nyilvános szövegben etikátlan (és esetleg pontatlan) lenne részletezni. A doktori eljárás egyik elemében (Jelentős publikációk) ez a szétválasztás követelmény, amit az ott szereplő cikkekre elvégeztem.

Az automaták D-szorzatának és a hozzárendelhető hipergráf színezhetőségének a kapcsolata fordított: a szivárványszínezés létéből következik a szorzat teljessége. Ez annyiban érdekes, hogy véletlen módszerekkel algebrai eredményt lehet bizonyítani, ami ritka.

A megjegyzéseket nagyon szívesen beépíteném az írásomba, sajnos a szabályzat erre nem ad lehetőséget. A bíráló munkáját nagyra értékelve legalább jelzem a tudomásul vételüket, illetve az itt felvetődő apróbb kérdésekre is válaszolok (a vitára javasolt kérdéseken felül).

1.

(a) Szerencsétlen Kierkegaard parafrázis, jobb lett volna kihagyni.
(b) "are" helyett "is", a többi kicsit tömör, de standard gondolatmenet.
(c) Az anomáliától mentes B négyzet minden irányban periodikusan kitöltött. Ez a periodicitás határon túl is folytatódik, azon a térrészen, amit B-ből egy vízszintes/függőleges és egy átlós egyenessel egyaránt elérünk. Így B oldalaihoz a 2.14 ábra négy kisebb háromszögére kapjuk a periodikus kitöltést, ami összességében egy nagyobb elforgatott négyzetet alkot. Ezek sorozata fedi a síkot.
(d) Beck tételét, mely szerint a Kérdező-Választó (Picker-Chooser) játékban Választó (Chooser) nyer, amennyiben az $\Sigma_{A \in F} 2^{-|A|} < 1$ feltétel teljesül. Annyit elég belátni, ha Választó érmedobás szerint dönt minden fordulóban, akkor pozitív valószínűséggel nyer, hisz ekkor nem lehet determinisztikus nyerő stratégiája a Kérdezőnek.
(e) Az eredeti játékban szükséges, hogy PrimMaker két elemet vehessen el, különben párosítási stratégiával elszigetel egy pontot a Romboló (a 3.4 tételben szereplő módon.) A segédjáték ezt akadályozza meg, ha egy még nem bekötött pontnak túl kevés éle van a már bekötöttekhez, akkor egy kettő-hosszú utat vesz hozzá. A segédjáték valóban transzverzálisként kezelt, PrimMaker a Romboló szerepét játssza a vágások hipergráfján.
(f) A Proposition 7 talán a ragasztási folyamat végig követésével ragadható meg leginkább. Úgy szerkesztjük meg a D_{14} gráfot, hogy minden pontja két D_7 gráfban legyen. Az általános eredmény a szorzatokkal sokkal egyszerűbb, csak akartunk egy példát, ami kisebb pontszámra is megvalósítja ugyanazt a korlátot.
(g) Két színnel történő színezés; a two colorings helyett two-colorings-et kellett volna írni.
(h) Itt a Graham-Pollak tételre illetve a Bollobás tétel ferde változatára utaltam, amelyekre egyelőre nincs igazi kombinatorikus bizonyítás.

(i) Ez az idézett Bhutt-Leiserson cikkből a Theorem 7. Az "n-vertex forest on binary trees" olyan n pontú gráf, melynek minden komponense bináris fa.

2.

(a) Igen, itt Corollary kellett volna a Theorem helyett.
(b) A helyes állítás: Breaker has a winning strategy.
(c) 55. oldal 8. sor, \Box
(d) $f(x)=f(-x)$ helyesen.
(e) A sorrendnek megfelelően A az állapotok, X az inputszimbólumok halmaza.
(f) Igen, a Lemma-Theorem nem lett egyeztetve.

3.

(a) A gyenge értelemben vett megoldás annak meghatározása, ki nyeri a játékot a standard kezdőállásból indulva. Az erős megoldás *minden* lehetséges állásra megadja a nyertest.
(b) Igen, jobb lett volna a "congruent copy" használata.
(c) Az 1.2.6 pontban definiálták a gyorsított játékok, olyan elfogult játékok ahol $a=b$.
A Observation 5. kimondása pontatlan, 2p-placement helyett 2p-pairing kell. Explicit sajnos nem szerepel, hogy a sütik (cake) diszjunktak; erre csak az utal, hogy a párosítás általánosítása, ill. ezért használható Chooser-Picker játékokban. A placement, süti stb definiciója elhagyható lett volna, mert a [81] számú cikkben használtuk csak, de annak az eredményeit végül nem vettem be a disszertációba.
(d) A szokásos, bonyolultságelméletben használatos módon, a hipergráf leírásához szükséges bitek száma. (A hipergráf leírása lehet binárisban.)
(e) Igen, n-uniform hipergráfokról van szó az egész 5.1 fejezetben. A Claim 3 kimondásába lehetett volna ezt még egyszer hangsúlyozni, de nem akartam eltérni az eredeti formától.
(f) H-Free Coloring probléma:
Input: Egy H–mentes G gráf és egy k egész.
Kérdés: Igaz-e $\chi(G) \leq k$?

4.

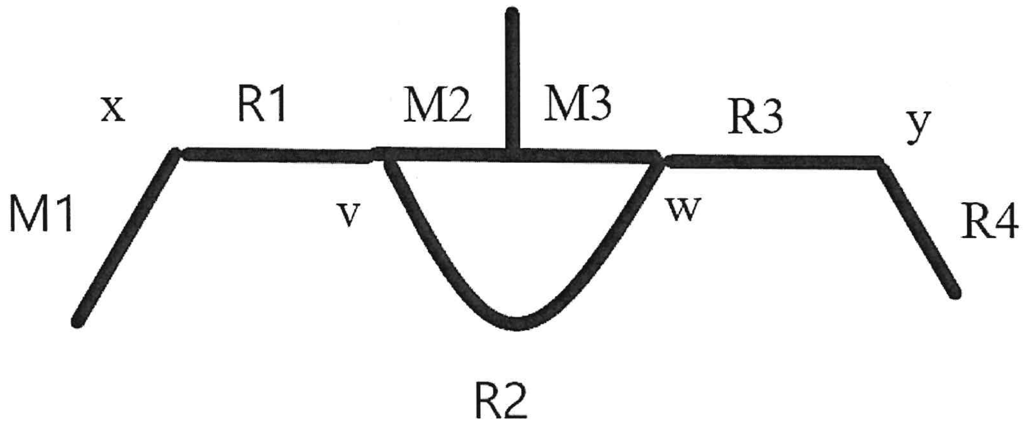
(a) A bizonyítás hibája a rossz kódolás, az $\{r_i, b_i, p_i\}$ halmaz tartalmazhatja a $\{b_i, p_i\}$ párt, így a hozzátartozó x_i változó nem meghatározott. Csak úgy javítható a konstrukció, ha egy négyelemű halmaz megfelelő párjaival kódolunk, azaz a 2.12 tételt követve.
(b) Ez az Integers lapban megjelent bizonyítás. A jóval később vizsgált 9-amőba gondolatmenetét követve be lehet látni, hogy a P_5 párosításai a 4x4-es tórusz (átlók nélküli) egyeneseinek dominó párosításaiból származtathatók.
(c) A párok a szakaszok által összekötött szomszédos négyzetek. A középen kijelölt 8x8-as résztábla ismétlődik periodikusan az egész síkon. Az adott párosítás a 8x8-as tórusz egyeneseinek (vízszintes, függőleges, átlós) blokkoló párosítását adja, ezért a sík bármely hasonló legalább kilenc hosszú szakasza tartalmaz blokkoló párt.
(d) Az anomáliák azt jelentik, egy adott típusú "dominótól" (lehet átlós) a következő ugyanolyan típusú nem nyolc, hanem kevesebb távolságra követ. (Több nem lehet, mert akkor nem lenne párosítási stratégia.) Így az anomáliák a nevezett résztáblákra lokalizálhatók, és *lesz* $n^{1/2}/100$ oldalú négyzet, amely periodikusan fedett.
(e) Nem tudom, én csak egyet látok, a 25. oldalon.
(f) Feltehető, de nem szoktak hasonlót a Shannon kapcsolójátékokban. (Azaz az irreleváns

élek törölhetők lennének.)
(g) Valóban, a pontos alak szerint minden x-re létezik olyan y, hogy a csere esetén továbbra is két bázist kapunk. Picker nyerő stratégiájához persze elég egyetlen $\{x, y\}$ pár adott lépésben.
(h) Az első egyenlőség helyett valójában egyenlőtlenségnek kell szerepelnie. Ha A megelőzi B-t, nem válik automatikusan pirossá, viszont valamely B-t meg kell előzzön. (A megelőzést a "precede" értelemben használva, azaz egy közös pont és az A maradék elemi B maradék elemei előtt legyenek a permutációban.)

Válaszok a vitára javasolt kérdésekre:

1. "A 10. lemma bizonyításában mi az oka annak, hogy elegendő feszített utat vizsgálnunk? Miért nem lehet egy (k, l)-(x, y)-path két belső csúcsa szomszédos egymással?"

Ilyen típusú út sem lehet a minimális Építő nyerő gráfban. Ha két nem szomszédos belső (3-fokú) v, w pont között lenne egy él, akkor, akkor v-hez érve ezt az élt választhatná a Romboló. Az Építőnek v utolsó megmaradt élét kellene vennie, mire Romboló a w pont y-hoz közelebbi élét véve haladna a kényszerítéssel és végül elérné y (vagy valamelyik belső pont) elszigetelését. Az ábrán Mi, illetve Ri az Építő (Maker) és a Romboló i-edik lépése, Építő lépéseivel védekezik az azonnali vesztés ellen, de a végén az y pont mégis elszigetelődik.



2. "Elfogult játékok esetén hogyan érdemes definiálni a Kérdező-Választó változatot, és van-e erről ismert eredmény?"

A legkézenfekvőbb általánosítást Csernenszky András tette az alábbi cikkben:
The Picker–Chooser diameter game. *Theoretical Computer Science*, (2010) **411(40-42),** 3757-3762.

Ebben Kérdező kijelöl $a+b$ elemet, a Választó megtart tetszőleges b elemet, a maradék a elem pedig a Kérdezőé lesz. A Kérdező erejét mutatja, hogy elfogult esetben is megkapható néhány olyan eredmény, ami normál (Építő-Romboló) játékban csak gyorsítással menne.
Egy szép Erdős-Selfridge lemma igaz az $a=1$, b esetre:

Lemma 5 (fenti cikkből): A Kérdező nyeri a Választó-Kérdező $(1{:}b)$ elfogult játékot a $H=(V(H), E(H))$ hipergráfon, ha $v/(b+1)\ \Sigma_{A\in E(H)}\ 2^{\{-|A|/b\}} < 1$, ahol $v=|V(H)|$.

Ennek segítségével belátható a fokszám játék megfelelő formája illetve a fő eredményként az 2-átmérő játék rendben (konstansoktól eltekintve) éles formája:

Theorem 2 (fenti cikk) A Választó-Kérdező (1:b) elfogult 2-átmérő játékban Kérdező nyer, ha $b < (n/(16\log_2 n))^{1/2}$, míg Választó nyer, ha ha $b > 3n^{1/2}$, feltéve, hogy *n* elegendően nagy.

Ugyanakkor egy másik általánosítási lehetőség is felmerül, a felgyorsított változatra, ahol a Választó és Kérdező egyforma számú elemet kap. Itt Kérdező két, *a* elemű diszjunkt halmazt jelöl ki a még szabad elemek közül (amennyiben ez lehetséges) és ezt ajánlja fel. Választó ez egyik halmazt megtarthatja, a másikat adja vissza. Ez a változat kevéssé vizsgált, Győrffy Lajossal közös cikkben [81] adtunk erre néhány korlátot. Itt többnyire statikus változatot néztünk, azaz a Kérdező előre megadja az egész alaphalmaz felosztását, függetlenül a Választó döntéseitől.

Szeged, 2024. július 25.

Pluhár András