Válasz Király Tamás bírálatára

Először is köszönöm Király Tamás alapos munkáját és a disszertációmban szereplő eredményeim pozitív értékelését. Elnézést kérek a nagyobb odafigyeléssel elkerülhető hibákért, amik fölösleges erőfeszítéseket okoztak a bírálóknak. Az 5.2 fejezetet valóban okosabb lett volna elhagyni, magyar nyelven összefoglaló írásként elérhető.

A kiemelt kérdésekre az alábbiak a válaszaim:

"1. Vizsgálták-e a Picker-Chooser típusú játékok olyan elfogult változatát, ahol Picker 2-nél több elemet választ, és abból Chooser adott számút vesz ki?"

Igen, itt alapjában kétféle általánosítás lehetséges. Az egyikben (a+b) elemet választ Picker, melyből Chooser b-t tart meg és a elem kerül vissza Pickerhez. Ezt használta Csernenszky András az alábbi cikkében:
The Picker–Chooser diameter game. Theoretical Computer Science, (2010) 411(40-42), 3757-3762.

Itt sikerült megmutatni, hogy a Picker-Chooser 2-átmérő játékban $a=1$-re Picker nyer, ha $b < (n/(16 \log_2 n))^{1/2}$, míg Chooser nyer, ha $b > 3n^{1/2}$, elég nagy n-re.

Azaz hasonló jelenség mutatkozik, mint a Maker-Breaker játékban a felgyorsítás esetén. Érdekesség, hogy elég az $a=1$ feltétel, nem világos viszont, van-e olyan játék, ahol valamely $a=1$, b-re Chooser, míg a=2, b'=2b-re Picker nyer.

Egy másik lehetséges általánosításban a=b. Picker két a elemű halmazt jelöl ki a még nem választott pontokból, melyből Chooser elveszi az egyik halmaz összes elemét és visszaadja Pickernek a másik halmaz elemeit. Ilyen típusú játékokra adott korlátokat vizsgáltunk Győrffy Lajossal a [81] cikkben:

L. Győrffy and A. Pluhár, Generalized pairing strategies - a bridge from pairing strategies to colorings. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*, 8(2) (2016), 233–248.

"2. A disszertációban szerepel, hogy a Beck sejtést azóta megcáfolták. Van-e esetleg valami gyengébb sejtés, ami még igaz lehet?"

Igen, nagyon sok esetben van esély erre. A legkézenfekvőbb az elfogult Chooser-Picker játékra adandó Erdős-Selfridge típusú tétel lenne. Az a=b=1 esetet Bednarska--Bzdega bizonyította, míg Csernenszky András fenti cikkének 5. lemmája részeredményt ad:

Picker nyeri a Chooser-Picker (1:b) elfogult játékot a $H=(V(H), E(H))$ hipergráfon, ha $v/(b+1) \Sigma_{A\in E(H)} 2^{\{-|A|/b\}} < 1$, ahol $v=|V(H)|$.

Itt a cél a feltétel $\Sigma_{A\in E(H)} 2^{\{-|A|/b\}} < 1$ alakja lenne, illetve Picker nyerése teljes általánosságban $a\,\Sigma_{A\in E(H)} (1+a)^{\{-|A|/b\}} < 1$ feltétel esetén tűnik reális célnak. Ezen kívül felmerül a Hales-Jewett játékok, Snaky, fokszámjátékok stb. Chooser-Picker formái.

"3. Az 5.6. fejezetben a tételek becsléseket adnak a diszkrepanciára. Vannak-e algoritmikus eredmények a vizsgált esetekben a diszkrepancia hozzávetőleges minimalizálására?"

Általában szinte semmit nem tudni erről, hiszen ezek nem is NP-beli kérdések. (Szükség lenne a regularitási lemma kiiktatására stb.) Egyetlen speciális esetben történt előrelépés,

Gishboliner, L., Krivelevich, M., & Michaeli, P. (2022) Discrepancies of spanning trees and Hamilton cycles. *Journal of Combinatorial Theory, Series* **B**, **154**, 262-291.

egyik eredménye értelmezhető úgy, hogy a fadiszkrepancia kiszámolható konstans erejéig elég nagy gráfosztályra.

Ők a 20. lemma egyfajta megfordítását látták be. A számunkra releváns formája ennek az eredménynek a következő:

Az ún. *balanced 2-separation* a $V(G)$ ponthalmaz felbontása A, B és S diszjunkt halmazokra úgy, hogy A és B közt nincs él és $|S|=s$. Legyen $s(G)$ az a legkisebb szám s melyre van ilyen felbontás. (Adott s esetén a felbontás létezése NP-beli, azaz valamennyire kezelhető, de az nem világos, hogy $s(G)$ kiszámítása P-beli lenne.)

Theorem 1.1 (Gishboliner et al, speciális esetre kimondva) Van olyan $C > 0$ konstans, hogy az alábbi áll. Ha a G gráf 3-összefüggő vagy 2-összefüggő és $s(G) > Cv(G)^{1/2}$, akkor a G gráf fadiszkrepanciája > $s(G)/C$.

Szeged, 2024. július 25.

Pluhár András