Pluhár András
„One and two-person Positional games”
c. doktori munkájának bírálata

Pluhár András disszertációja játékelméleti valamint gráf ill. hipergráfszínezésekkel kapcsolatos eredményeket mutat be. A munka öt fejezetből áll, a bevezető rész után kétszemélyes pozíciós játékok párosításokon alapuló nyerő stratégiáit tárgyalja, amit elfogult ill. felgyorsított játékokkal kapcsolatos eredmények követnek. Egy rövidebb fejezet foglalkozik a pozitív fokszám játékkal ill. a vonaljátéknak azzal a változatával, aholis a játékhoz használható figurák száma korlátos, ezért amikor azok elfogynak, akkor a játékosoknak minden lépésben egy korábban elhelyezett figurájukat kell áthelyezniük a táblán. Az utolsó fejezet nem kapcsolódik szorosan a korábbiakban vizsgált játékokhoz. Itt a szerző gráfok és hipergráfok bizonyos színezési tulajdonságait mutatja be többek között valószínűségszámítási és lineáris algebrai eszközök felhasználásával.

A vizsgált kétszélyes játékokban szereplő játékosok felváltva vesznek el egy-egy elemet az alaphalmazból (vagy, ha úgy tetszik, helyezik el a figuráiikat az alaphalmaz elemeit reprezentáló tábla mezőin). Céljuk kétféle lehet. Az Építő játékos célja egy nyerő halmaz megszerzése, azaz a nyerő halmazokat tartalmazó hipergráf Sperner-rendszert alkotó élhalmazából egy él minden csúcsának a kiválasztása. Ezzel szemben a Romboló játékos akkor nyer, ha az ellenfele nem rendelkezik egyetlen nyerő halmaz elemeivel még azután sem, hogy elfogytak az alaphalmaz elemei. Ez úgy is megfogalmazható, hogy a Romboló játékos az Építő szerepét játssza, de számára a nyerő halmazok a játékhoz tartozó Sperner-rendszer blokkoló halmazai. A játékok egy lehetséges módosítása, ha a játékosok nem felváltva választják ki az alaphalmaz egy-egy elemét, hanem az egyik (Kérdező) játékos (aki akár Építő, akár Romboló szerepben is lehet) az alaphalmaz két ki nem választott elemét ajánlja fel a másik (Választó) játékosnak, aki a két elem közül a számára szimpatikusabbat megtartja, a másik pedig a Kérdezőé lesz.

Az értekezés második fejezete párosításon alapuló nyerő stratégia létezését vizsgálja különböző játékok esetén. Itt az a kérdés, hogy az alaphalmaz elemei összepárosíthatók-e úgy, hogy az egyik játékos számára nyerő stratégia legyen az az egyszerűen követhető szabály, hogy mindig az ellenfele által választott elem párját veszi el. Az derül ki, hogy általában NP-teljes annak az eldöntése, hogy a Romboló játékosnak van-e ilyen, párosításon alapuló nyerő stratégiája. Konkrétan a k-amőba játékról tudjuk, hogy $k \leq 8$ esetén nincs rá párosításon alapuló nyerő stratégia. A kígyó (snaky) játék esetén már korábbról ismert volt, hogy nincs erre ilyen nyerő stratégia, a disszertáció a szerző egy számítógépes módszerektől független bizonyítását mutatja be ugyanerre a tételre. Ezzel szemben a 9-amőbához van párosításon alapuló nyerő stratégia, és az ilyet meghatározó párosítások struktúráját vizsgálva a szerző megmutatja, hogy e párosítások származtathatók a 16×16-os tórusz azon párosításaiból, amelyek a 8×8-as tórusz bizonyos párosításaiból adódnak alkalmas módon.

Beck (egyébként megcáfolt) sejtésének speciális eseteként a szerző megmutatja, hogy a Shannon-féle kapcsolójáték eredeti (Építő-Romboló) változatában ugyanannak a játékosnak van nyerő stratégiája, mint amelyiknek a Kérdező-Választó változatban. Élesíti továbbá Erdős és Selfridge Építő-Romboló játékokra vonatkozó eredményének Kérdező-Választó játékokra történő Beck általi kiterjesztését, valamint igazolja, hogy a 8-amőbában a Romboló játékosnak Kérdezőként is van nyerő stratégiája. A fejezet végén pedig az derül ki, hogy bárhogyan is osztjuk ki az Építő és Romboló játékosra a Kérdező és Választó szerepeket, általában NP-nehéz annak az eldöntése, hogy melyiküknek van nyerő stratégiája.

A harmadik fejezet a 2-átmérő-, fokszám- és expanziójátékok elfogult változatait érintő eredmények mellett rámutat, hogy a Shannon-féle kapcsolójáték Prim-algoritmus által motivált változatában mitől függ, hogy melyik játékosnak van nyerő stratégiája. Utóbbi játék teljes gráfon játszott $(2, b)$-típusú elfogult változatában pedig a b bizonyos értékeire meghatározza, hogy melyik játékos tud nyerni.

A negyedik fejezet első eredménye azt határozza meg, hogy a pozitív fokszám játékban (aholis az Építő játékos célja, hogy egy izolált pontot nem tartalmazó részgráf éleit válassza ki) legalább hány élű gráfon kell játszani ahhoz, hogy az Építőnek legyen nyerő stratégiája. A fejezet másik eredménye a k-amőba azon a változatával foglalkozik, ahol az egyik játékos minden lépés során p jelet tesz a táblára, míg a másik csak egyet. Ha a játék n lépés után véget ér, akkor az igazolt tétel szerint bizonyos (k, p, n) értékek esetén az Építőnek, egy másik feltétel teljesülése esetén pedig a Rombolónak van nyerő stratégiája. Hasonló tétel igaz, ha az n-dik lépés után folytatódik a játék, de a játékosok a már lerakott figuráikat áthelyezve játszanak.

Az utolsó fejezet hipergráfok és gráfok színezésit taglalja. A szerző bevezet egy szokatlan mohó színezési algoritmust, és ennek segítségével ad elégséges feltételteket hipergráfok 2- ill. k-színezhetőségére. A bizonyítás véletlen módszeren alapul, a véletlen választás pedig a csúcsok mohó színezéséhez használt sorrendben gyökerezik. Gráfok 2-színezhetőségének jól ismert feltételére a szerző ismertet egy lineáris algebrán alapuló bizonyítást, és további, kevésbé ismert példákat mutat, amelyekben elemi lineáris algebrai alapösszefüggések segítségével gráfok nemtriviális színezési tulajdonságai, a nyakláncdarabolási probléma speciális eseteként megfogalmazott festőműhely problémában (és annak fákra történő általánosításában) pedig a megoldásához szükséges vágásszám felső becslése ill. klikkfedések egy érdekes tulajdonsága igazolható. A következő szakaszban automaták $\mathcal{D}$-szorzatát definiálja és ilyen szorzatok segítségével igazolja hipergráfok színezési tulajdonságait.

Az ezt követő szakasz azt a feladatot vizsgálja, hogy hány szín szükséges egy gráf csúcsainak szokásos színezéséhez azzal az extra feltétellel, hogy semelyik két színosztály sem tartalmazhat ill. feszíthet egy előre megadott H gráfot. Az utóbbi problémához tartozó $\chi_H(G)$ paraméterről az derül ki, hogy néhány konkrétan meghatározott H gráfra polinom időben meghatározható, míg minden, ezektől különböző H esetén NP-teljes azon G gráfok nyelve, amelyekre $\chi_H(G) \leq k$.

Az utolsó szakaszban olyan hipergráfok diszkrepanciájáról igazol tételeket a szerző, amelyek csúcsai egy G gráf éleinek, hiperélei pedig G bizonyos részgráfjainak (pl. Hamilton-köreinek vagy feszítőfáinak) felelnek meg. 3-reguláris véletlen gráfok ill. utak hatványai esetén ad a szerző alsó becsléseket a szóban forgó hipergráf diszkrepanciájára.

A disszertációról megállapítható, hogy a diszkrét matematika több részterületéről számos eredményt tartalmaz. A tézisfüzetben felsorolt (másnak nem tulajdonított) eredményeket elfogadom új, tudományos eredményként. A szerző nem jelzi egyértelműen, hogy az egyes eredmények pontosan hol, és főleg mely szerzőtársakkal lettek publikálva, ami nem könnyíti meg a szerző önálló munkája nagyságának és jelentőségének a megítélését. A disszertáció 16 publikációra épít, ezek közül a fajsúlyos folyóiratokban megjelent eredmények jelentős része szakmailag kiváló kollágákkal közös. Ezek az eredmények a legerősebb tézisek, ezért itt mindenképp hasznos lett volna a bírálathoz, ha világosan kiderül a szerző hozzájárulása.

Azonban nem ez az egyetlen nehézség, amivel a bírálónak szembe kell néznie. A tézisfüzet nyelve magyar, a disszertációé angol. Utóbbi nyelvhasználata több kívánnivalót hagy maga után: a rossz angolság miatt bizonyos mondatokat nehezen vagy egyáltalán nem sikerült értelmeznem és ez gyakran a gondolatmenet lényeges pontjánál történt meg. A tézisfüzet valamennyit segít, de önmagában az sem érthető, ráadásul a tézisfüzet és a disszertáció tételszámozása között nincs világos kapcsolat. Ráadásul a tézisfüzet is számos nyelvhelyességi, egyeztetési hibát tartalmaz.

A disszertáció szerkesztése sem könnyíti meg a bíráló helyzetét. Nem világos, hogy miért lett külön sorszámozva minden egyes tételszerű környezetfajta, míg maguk a tételek fejezetszám.sorszám típusú számot kaptak. Ez megnehezíti a hivatkozott elem keresését, különösen úgy, hogy a szerző többször helytelenül hivatkoz dolgokat, például Lemmát Theoremként, stb. Mindezen túl a szerző lényeges fogalmakat nem definiál formálisan, és a felhasznált vagy vizsgált állításokat nem mondja ki formálisan. Összességében a disszertáció és a tézisfüzet olvasása és megértése sokkal inkább egy szívós nyomozói munkát igénylő feladvány, mint új tudományos eredmények jól áttekinthető ismertetője. Mindezek alapján a disszertációról és a tézisfüzetről ki kell mondanom, hogy ebben a formában nem méltók egy nagydoktori pályázathoz.

Mindezen kritikák ellenére, a munkában szereplő eredmények miatt úgy érzem, hogy a doktori munka tudományos eredményei elegendők az MTA doktori cím megszerzéséhez, ezért javaslom a nyilvános védés kitűzését.

Az alábbiakban következik néhány megjegyzés a fentiek illusztrálására, a teljesség igénye nélkül.

1. **Pontatlanságok, nehezen érthető részek**

   (a) Introduction, első mondat. (Az egyes témakörök bevezető részeit sokszor nehezen sikerült értelmeznem.)
   (b) A 2.5 ábra feletti bekezdés.
   (c) A 2.7 tétel bizonyítását nem sikerült megértenem.
   (d) Mit bizonyítunk a 31-dik oldal tetején?
   (e) Egyáltalán nem értettem meg a 3.5 tétel bizonyítását. Úgy tűnik, mintha egy ekvivalens játékra térnénk át, de az ekvivalencia egyik iránya hiányzik, a segédjátékban pedig nem 1 és 2b, hanem 2 és 2b elemet vesznek el a játékosok egy-egy lépésben.
   (f) A Proposition 7. bizonyítását nem értettem meg. Sokat segített volna egy ábra a H gráfról (megbetűzött csúcsokkal), majd a betűk segítségével megadott D_{14} gráf.
   (g) 5. fejezet, 3-dik bekezdés: két különböző színezésről vagy egy két színnel történő színezésről van szó?
   (h) 5.2.1 szakasz első mondat.
   (i) 5.7 tétel: mi az az „n-vertex forest on binary trees”?

2. **Értelmezészavaró elírások, pontatlanságok**

   (a) 10-dik oldal, alulról 10-dik sor: „Theorem 8”
   (b) Proposition 6: „Breaker has a winning”
   (c) Hol a 4.1 tétel bizonyításának vége?
   (d) 5.6 tétel kimondása
   (e) 5.3.1 szakasz, automata definíciója: melyik az állapotok, és melyik a szimbólumok halmaza?
   (f) 5.6.2 szakasz: 4 bizonyításból kettő esetén hibás az igazolt álltás megnevezése.

3. **Formális definíció, állítás hiánya**

   (a) 2. fejezet, első mondat: mit jelent egy játék megoldása?
   (b) Konkrét játékok formális definíciója hiányzik, sokszor egy játékról az informális definíció kimondása előtt van szó. A snaky játékban pl. lehet tükrözni is?
   (c) Observation 5: mi az a p-accelerated game? Mit jelent a $2p$-placement? Előtte: a t-cake placement-ben a cake-ek diszjunktak? Mit jelöl a t?
   (d) 2.11 és 2.12 tételek esetén hogy van megadva az input, és mi a mérete?
   (e) Claim 3: jó lenne látni a pontos feltételeket. A hipergráf n-uniform?
   (f) 5.10 tétel: mi az a „H-FREE COLORING” probléma?

4. **Egyéb megjegyzések**

   (a) A 2.3 tételre közölt bizonyítás hibás. A $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})$ formula nem kielégíthető, jóllehet $\mathcal{H}_\phi \in \mathcal{B}$, amit az $\{r_1, b_1\}, \{r_2, b_2\}, \{r_3, b_3\}, \{p_1, p_2\}$ párosítás igazol.
   (b) Az 1. lemma bizonyításának utolsó előtti mondata indoklást igényel.
   (c) 2.7 ábra: mi a szabály?
   (d) A 2. lemma bizonyítása további indoklást igényel.
   (e) Miért van két 2.11-es ábra? Mit jelentenek az üres és teli pettyek a második 2.11-es ill. a 2.16-os ábrán?
   (f) 2.8. tétel bizonyítás utolsó előtti bekezdés: $V = A \cup B$?
   (g) 2.8. tétel bizonyítás utolsó bekezdés: nem ezt mondja ki az erős báziscsere axióma.
   (h) 64. oldal 1. sor: miért igaz az egyenlőség?

Végül itt következnek a nyilvános vitán feltenni javasolt kérdések:

1. A 10. lemma bizonyításában mi az oka annak, hogy elegendő feszített utat vizsgálnunk? Miért nem lehet egy (k, ℓ)-(x, y)-path két belső csúcsa szomszédos egymással?
2. Elfogult játékok esetén hogyan érdemes definiálni a Kérdező-Választó változatot, és van-e erről ismert eredmény?

Budapest, 2024 július 8.

Fleiner Tamás
egyetemi tanár
BME SZIT
fleiner@cs.bme.hu