Opponensi vélemény

Pluhár András

Egy és kétszemélyes pozíciós játékok

című

MTA doktori értekezéséről

Az értekezés témája egy és kétszemélyes pozíciós játékok, ami számos nehéz témához kapcsolódó problémát foglal magába, a kérdések algoritmikus vizsgálatától a kétszemélyes játékok segítségével kapható színezésekre, részgráfok és részhipergráfok létére, stb. vonatkozó eredményekig. Érdekes, hogy a kétszemélyes játékokra vonatkozó kérdések gyakran nagyon nehezek, ezért tiszteletet parancsolóak, bár a kutatások fősodrától kissé távolabb vannak. A legteljesebb vizsgálaok a 2. és az 5. fejezetben találhatók, de a véleményem szerint legszebb a 4.5 tétel. De mielőtt valamennyire is végig mennénk a fejezeteken, egy nagyon zavaró dologra hívnám fel a figyelmet. A szerző a saját eredményeihez, a konkrét tételekhez nem adja meg a referenciát. (Hogy ezek saját eredmények, arra is csak a referencia hiánya utal, de hogy melyik cikkben jelenik meg a tétel, az csak kényelmetlen keresgéléssel állapítható meg.)

Az első, bevezető fejezet után a második – első tartalmi – fejezet érdekes kapcsolatot vizsgál színezések és pozíciós játékok között. Az például régóta ismert, hogy hipergráfok 2-színezhetősége (B-tulajdonsága) NP-nehéz probléma.

A szerző megmutatja, hogy egy egyszerű romboló stratégia alapjául szolgáló – bár ahhoz nem feltétlenül szükséges – párosítás megtalálása is NP-nehéz. Ez már önmagában is érdekessé teszi párosítások vizsgálatát. A sok különféle párosításokra vonatkozó tétel közül talán a 2.10.tétel a legnehezebb, amiben Beck régi tételét javítja meg jelentősen. De szép eredmények találhatók a klasszikus amőba, vagy az úgynevezett kígyójáték nyerő stratégiájáról, annak létezéséről vagy nemlétéről a játék különböző változataiban, például attól függően, hogy nyerni akarunk, vagy csak a másik játékos nyerését megakadályozni. Itt is számos probléma NP-nehézségét sikerül megmutatni.

A harmadik fejezetben – második fejezet a tézisekben, és egyben ez a második tartalmi fejezet – kétszemélyes játékok elfogult és felgyorsított verziói kerülnek vizsgálat tárgyává, amikor egyik vagy mindkét játékos egyszerre többet is léphet. Ezek a változatok a játékok nagy kedvelői számára érdekesek elsősorban. Ebben a fejezetben két játék esetén találhatunk ilyen eredményeket, egyrész amikor egy gráfban az élek választásával kis átmérőjű részgráfot akarunk kiválasztani, illetve a klasszikus Shannon-féle kapcsolójátékban. A tételekben elégséges feltételeket találunk az építő illetve a romboló nyerő stratégiájának létezésére. Kiemelném a 3.5 tételt, ami meghatározza a második játékos lépésméretétől függően, hogy kinek van nyerő stratégiája, az építő nyer, ha b <n/8logn, a romboló pedig, ha b > n/logn. Örömteli, hogy sikerült nagyságrendileg meghatározni a kritikus b értéket, de bosszantó, hogy nem pontosabban. Itt kérdezem, hogy van-e javítás azóta, illetve van-e sejtés a kritikus b értékre?

A negyedik fejezet szintén a pozíciós játékok kedvelőinek szól. Ahogy a tézisekben áll, játékok időbeli kiterjesztéseiről szól. Ez azt jelenti, hogy az elhelyezett „figurák" a malomhoz hasonlóan további lépéseket tehetnek, illetve a játék úgymond kezdése előtt is történnek bizonyos lépések. Az egyik legszebb eredmény a 4.1. tétel, amiben nemcsak megjavítják Hefetz eredményét, de Baloggal közösen meghatározzák a pontos küszöbértéket a nyerő stratégia létezésére a minimális fokszámról szóló játékban. Ez talán a legnehezebb, legtetszetősebb bizonyítás a disszertációban, különböző módszerek, például a jól bevált discharging method kerülnek ügyes alkalmazásra. A fejezet második részében a nagyon nehéz Kaplansky játék bizonyos verziójára kap a szerző súlyfüggvények alkalmazásával becsléseket, de itt még nagyon messze vagyunk a viszonylag pontos eredményektől is.

A színezésekről szóló ötödik fejezet talán a legizgalmasabb, amit a gráf és hipergráf színezések gazdag irodalma is magyaráz Ebben a fejezetben először a véletlen mohó algoritmussal és egy lineáris algebrai módszer segítségével talál a jelölt hipergráf 2- és k-színezéseket. A mohó algoritmussal kapcsolatban elért érdekes, bár nem különösebben nehéz eredmények egy egyszerzős Random Structures and Algorithms cikkben kerültek publikálásra.

A lineáris algebrai Kronecker-Capelli tétel már Füredi és mások is alkalmazták pl a König tétel bizonyítására, az 5.2 fejezetben ebben az irányban találhatunk további, az eddigieknél erősebb tételeket.

Az egyik alfejezet a híres nyaklánc problémával és további rokon kérdésekkel is foglalkozik.

Érdekes eredmény az 5.11 tétel ami H-t elkerülő színezésekkel, illetve ezen probléma komplexitásával foglalkozik. meghatározza azt H-tól függően: néhány kicsi gráftól eltekintve mindig NP-nehéz. Az 5.13 tételben véletlen gráfokban vizsgálja az ilyen feszített H-t elkerülő kromatikus számot. A fejezet végén még néhány szép tételt bizonyít a szerző gráfok diszkrepanciájáról, de ezek ismertetésétől – bonyolultságuk miatt- inkább eltekintek.

Összefoglalva: a disszertáció sok érdekes eredményt tartalmaz a népszerű egy-és kétszemélyes pozíciós játékok elméletében, és bár kiugró tétel nincs közöttük, egységes jó színvonaluk előre viszi a téma kutatásait. Mindezek alapján véleményem szerint a disszertáció eleget tesz az MTA doktori értekezésekkel szemben támasztott követelményeknek, nyilvános vitára való bocsátását javaslom.

2024.04.08

Győri Ervin

A Matematika Tudomány Doktora

Rényi Intézet