

Nem-egyenletesen hiperbolikus biliárdok statisztikus tulajdonságai

MTA Doktori Disszertáció Tézisei

Bálint Péter

BME Sztochasztika Tanszék

Budapest
2023

Köszönetnyilvánítás

Először is szeretném megköszönni társszerzőimnek, hogy együtt dolgozhattam velük. Rengeteget tanultam tőlük a közös munka során. Sok további barátomnak és munkatársamnak is hálás vagyok. Kettő közülük különösen nagy hatással voltak szakmai fejlődésemmre. Szász Domokos vezetett be a kaotikus biliárdok csodálatos témakörébe 25 évvel ezelőtt, tudása, bölcsessége és kedves támogatása azóta mindvégig meghatározó volt számomra. Tóth Imre Péter több évtizede egyik legfontosabb kutatótársam, eredeti meglátásai sokszor és sokféleképp inspiráltak.

A folyamatosan változó körülmények ellenére a BME Matematika Intézetének Sztochasztika Tanszéke mindig is motiváló és barátságos légkört biztosított kutatásaimhoz. Hálás vagyok a tanszék munkatársainak, különösképp Tóth Bálintnak és Simon Károlynak, korábbi és jelenlegi tanszékvezetőknek, tanácsaikért, bizalmukért és bátorításukért. Köszönöm továbbá az ELKH-BME (korábban MTA-BME) Sztochasztika Kutatócsoport, valamint több NKFIH-OTKA pályázat (jelenleg a K142169 és a KKP144059 projektek) támogatását.

Nehezen tudom megfogalmazni, mit jelentett nekem a családom; édesanyám, húgom, két fiam és főképp feleségem, Zsuzsi szeretete az elmúlt időszakban. Gyakran úgy gondolom, nekik ugyanolyan komoly kihívás lehetett hangulatváltozásaimat elviselni, mint amilyen nehéz nekem volt a munka elvégzése.

Ezt a disszertációt drága édesapám, Bálint Lajos emlékének ajánlom.

1. Bevezetés

Ebben a disszertációban három biliárd modellt vizsgálunk: a stadion biliárdokat, szóróbiliárdokat érintő ütközőkkel és a végtelen horizontú Lorentz gázt. Bár mindhárom modellnek megvannak az egyedi jellegzetességei, egy fontos közös vonásuk az intermittens jelleg ([LSV99]): a kaotikus és a reguláris mintázatok váltakozása határozza meg a dinamika aszimptotikus viselkedését.

A disszertációban vizsgált kétdimenziós biliárd modellek egy pontszerű részecske mozgását írják le egy $Q \subset \mathbb{T}^2$ vagy $Q \subset \mathbb{R}^2$ tartományban, ahol $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ a kétdimenziós euklideszi tórusz. A tartomány belsejében a mozgás egyenes vonalú egyenletes (a sebesség abszolút értékét 1-nek rögzíthetjük), míg a ∂Q határhoz érkeve a részecske a geometriai optika szabályi szerint halad tovább: a visszaverődési szög megegyezik a beesési szöggel. A biliárd dinamikát természetes módon vizsgálhatjuk folytonos és diszkrét időben is, így kapjuk a *biliárd folyamatot*, illetve a *biliárd leképezést* (a biliárdokkal kapcsolatos alapvető fogalmakat és jelöléseket az 2. fejezetben foglaljuk össze). A Q tartomány alakjától függően a dinamikai viselkedésformák rendkívül széles választékát figyelhetjük meg a biliárdokban. Vizsgálódásaink egyik kiindulópontját képezik a *szóróbiliárdok*: ilyenkor Q -t úgy kapjuk, hogy véges sok, páronként diszjunkt, szigorúan konvex és legalább C^3 -sima határú C_i ütközőt vágunk ki a tóruszból. Ezeknek a modelleknek a vizsgálata Sinai mindmáig meghatározó [Sin70] dolgozatával kezdődött, ezért Sinai biliárdként is hivatkozik rájuk a szakirodalom. Átfogó és modern képet ad róluk a kiváló [CM06] monográfia. A konvex szórótesteken való ütközés a közeli pályákat jellemzően exponenciális ütemben eltávolítja, ennek következtében a viselkedés kaotikus, pontosabban hiperbolikus (a Lyapunov exponensek majdnem mindenütt 0-tól különbözőek). Ha még az is teljesül, hogy a két egymás utáni ütközés között eltelt időre van uniform felső korlát – ezt röviden úgy mondjuk, hogy *véges a horizont* – akkor a szóróbiliárdok erős statisztikus tulajdonságokkal rendelkeznek. A 2. fejezet terminológiáját használva, kellően sima megfigyelhető mennyiségekre (azaz, a fázistéren értelmezett függvényekre) a korrelációk exponenciális ütemben csengenek le, diszkrét ([You98]) és folytonos ([BDL18]) időben egyaránt, valamint teljesül a centrális határeloszlás-tétel ([BS81]).

A disszertációban vizsgált modellek annyiban térnek el a Sinai biliárdoktól, hogy a továbbra is alapvetően kaotikus viselkedés mellett megjelenik egy reguláris komponens is a dinamikában. A fő célunk annak vizsgálata, a reguláris komponens jelenléte hogyan befolyásolja a statisztikus tulajdonságokat.

A biliárdok, mint mechanikai eredetű dinamikai rendszerek kutatásának egyik fontos motivációja, hogy természetes módon kerülnek elő különböző fizikai jelenségek, mint például a diffúzió vagy a hővezetés modellezésekor ([BGS21]). Szintén fontos, és a disszertáció témájához leginkább kapcsolódó motivációt ad a valószínűségszámítás. Amint látni fogjuk, a biliárdok időfejlődését diszkrét időben egy (M, T, μ) hármassal írjuk le. Itt az M fázistér egy kompakt metrikus tér, pontjai a részecske állapotát (helyét és sebesség irányát) adják meg egy ütközési pillanatban. A $T : M \rightarrow M$ szakaszonként folytonos leképezés mutatja meg, hogy egy $x \in M$ állapotból indulva a következő ütközéskor milyen $Tx \in M$ állapotba kerül a rendszer. μ pedig egy természetes *invariáns Borel valószínűségi mérték*, azaz $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$ minden A mérhető halmazra. A μ mértékkel az M fázistér valószínűségi mezőnek, egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény ($f \in L^1_\mu(M)$) pedig valószínűségi változónak tekinthető. A μ mérték invarianciájából adódik, hogy x -t μ szerint választva az

$$f(x), f \circ T(x), \dots, f \circ T^n(x), \dots$$

valószínűségi változó sorozat stacionárius.

Az összehasonlíthatóság kedvéért tekintsünk át néhány alapvető tényt valószínűségszámításból. Ha $X, X_1, X_2 \dots$ független, azonos eloszlású és centrált ($\mathbb{E}X = 0$) valószínűségi változók sorozata, akkor a nagy számok erős törvénye szerint

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

amint $n \rightarrow \infty$, majdnem biztosan. Továbbá, ha $E(X^2) = \text{Var } X = \sigma^2$, akkor a centrális határeloszlás-tétel értelmében

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (1.2)$$

amint $n \rightarrow \infty$. Itt $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ az eloszlásban való konvergenciát jelöli, $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ pedig a 0 várható értékű, σ szórású normális eloszlást. Tekintsük most azt az esetet, amikor az $X, X_1, X_2 \dots$ független, azonos eloszlású és centrált változók szórása nem véges, konkrétan

$$\mathbb{P}(|X| > x) \sim D \cdot x^{-2}$$

valamilyen $D > 0$ konstansra.¹ A nagy számok erős törvénye ugyanúgy teljesül, azonban a határeloszlás-tételben a standard \sqrt{n} helyett $\sqrt{n \log n}$ szükséges, ahol \log a természetes alapú logaritmus. Pontosabban (lásd pl. [Fel57, section XVII.5])

$$\frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, D) \quad (1.3)$$

amint $n \rightarrow \infty$.

Visszatérve a biliárd modelljeinkre, és általában a dinamikai rendszerekre, az $f(x), f \circ T(x), \dots, f \circ T^{n-1}(x), \dots$ valószínűségi változók távolról sem függetlenek, hiszen csupán a kezdőpont x választása véletlen, az egymás utáni értékeket a T dinamika kapcsolja egymáshoz. Azonban az általunk vizsgált biliárd modellek mindegyike *ergodikus*: ha egy $A \subset M$ mérhető halmaz invariáns (azaz $\mu(A \Delta T^{-1}A) = 0$, ahol Δ a szimmetrikus differencia), akkor triviális, azaz $\mu(A) = 0$ vagy $\mu(A) = 1$. (Ergodelméleti áttekintésre lásd pl. [Pet83]-t vagy [CM06, Appendix C]-t.) Ilyenkor minden $f \in L^1_\mu(M)$ esetén a Birkhoff ergodtétel értelmében

$$\frac{S_n f(x)}{n} = \frac{f(x) + \dots + f(T^{n-1}x)}{n} \rightarrow \int_M f \, d\mu \quad (1.4)$$

amint $n \rightarrow \infty$, μ majdnem minden $x \in M$ -re, tehát lényegében teljesül a nagy számok erős törvénye. Az ergodicitásnál valamivel erősebb tulajdonság a *keverés*, ennek egy ekvivalens megfogalmazása a következő: tetszőleges $f, g \in L^2_\mu(M)$ mennyiségek *korrelációja*

$$Corr(f, g; n) = \int f(x)g(T^n x) \, d\mu(x) - \int f \, d\mu \cdot \int g \, d\mu \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

amint $n \rightarrow \infty$. A fent említett hiperbolikus biliárd modellek mindegyike keverő, a finomabb statisztikus tulajdonságok szempontjából azonban már mutatkoznak eltérések. Ezek vizsgálatához feltesszük az $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonosságát, azaz

$$\exists C > 0 \text{ és } \eta \in (0, 1], \text{ hogy } |f(x) - f(y)| \leq C(d(x, y))^\eta; \forall x, y \in M$$

ahol d a távolság M -en. Itt α -t Hölder exponensnek, C -t Hölder konstansnak hívjuk. Azt mondjuk, a *korrelációlecsengés üteme exponenciális*, ha tetszőleges $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder függvényekre van olyan $\beta \in (0, 1)$ (mely függhet az η Hölder exponenstől) és $C(f, g) > 0$, hogy

$$|Corr(f, g; n)| \leq C(f, g) \cdot \beta^n.$$

Ezt röviden úgy is fogjuk jelölni, hogy $Corr(f, g; n) \ll \beta^n$. Polinomiális korrelációlecsengésről hasonló értelemben beszélünk, ha β^n helyett n -nek valamilyen hatványrendben lecsengő függvényével adható meg ilyen becslés. A korrelációlecsengés sebességét röviden keverési sebességnek is hívjuk.

A korrelációlecsengés sebességéhez is kapcsolódik a határeloszlás-tételek kérdése. Azt mondjuk, az $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos és centrált ($\int f \, d\mu = 0$) függvényre fennáll az adott biliárd leképzés esetén a centrális határeloszlás-tétel, ha van olyan $\sigma_f^2 \geq 0$ konstans, hogy

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{f + \dots + f \circ T^{n-1}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2) \quad (1.6)$$

¹ Itt és a továbbiakban $f(R) \sim g(R)$ alatt azt értjük, hogy $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f(R)}{g(R)} = 1$.

amint $n \rightarrow \infty$. Itt jellemzően teljesül (lásd pl. [CM06, Chapter 7]):

$$\sigma_f^2 = \int f^2 d\mu + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int (f \cdot f \circ T^n) d\mu \quad (1.7)$$

tehát f második momentuma mellett a $\text{Corr}(f, f; n)$ korrelációs együtthatók is hozzájárulnak az aszimptotikus szórásnégyzethez. Ebből már érezhető, hogy ha a lecsengés túl lassú (nem összegezhető), akkor a standard CHT, (vagyis (1.6)) helyett más, például az (1.3)-hoz hasonló határeloszlás-tételek teljesülését várjuk.

Analóg módon vizsgálhatjuk a korrelációlecsengés és a határeloszlás-tételek kérdéseit a biliárd folyamra. A határeloszlás-tételek vizsgálata sokszor viszonylag könnyen visszavehető a folyamról a leképezésre. A korrelációlecsengés sebességének becslése azonban lényegesen nehezebb feladat folytonos időben, mint diszkrét időben. Ennek elsődleges oka, hogy a folyam háromdimenziós fázissterében van egy neutrális irány, szemben a leképezés kétdimenziós fázissterével, ahol minden irány hiperbolikus. Hiperbolicitás alatt értjük, hogy a kis távolságok exponenciális ütemben növekednek vagy T -re, vagy a T^{-1} inverz leképezésre nézve (azaz a Lyapunov exponensek nem tűnnek el).

A disszertációban elsősorban a határeloszlás-tételeket, és ezekhez közvetlenül kapcsolódó kérdéseket, valamint a folyam korrelációlecsengési sebességét vizsgáltam a fent említett három biliárd modell esetén. A legfontosabb eredményeket 10 kiemelt tételben fogalmaztam meg, ezeket betűkkel jelöltem meg, konkrétan mint A. Tétel, B. Tétel, ... J. Tétel, a disszertációban és a tézisfüzetben egyaránt. Ezek a tételek hat tudományos dolgozaton alapulnak, konkrétan az A. és B. Tételek a [BG06], a G. Tétel a [BM08], a D. F. és E. Tételek a [BCD11], a H. Tétel a [BCD17], a C. és a J. Tételek a [BBM19] cikkben jelentek meg, míg a I. Tétel a [BBT23] dolgozatban szerepel.

Az eredményeket a disszertáció három fő fejezetében annak megfelelően rendeztem el, hogy melyik biliárd modellre vonatkoznak. A tézisfüzet fejezetei követik a disszertáció ezen három fő fejezetének számozását. Az 3. fejezet a stadion biliárdról szól, ebben szerepel az A. a B. és a C. Tétel. A 4. fejezetben érintő sarokpontú szóróbiliárdokat tárgyalunk, itt kerül bemutatásra a D., az E., az F., a G., és a H. Tétel. Végül az 5. fejezetben végtelen horizontú Lorentz gáz modelleket vizsgálunk, itt mondjuk ki az ezekre vonatkozó I. és J. Tételeket.

Másképp osztályozva, a G., C., és a J. Tétel az egyes biliárd folyamatok korrelációlecsengési sebességének becsléséről szól. Pontosabban, a G. Tétel a folyam rapid (szuperpolinomiális) keveréséről érintő sarokpontú szóróbiliárdokban, míg a C. és a J. Tételek polinomiális keverésről a stadion, illetve a végtelen horizontú szóróbiliárd folyamokban. A többi kiemelt tétel határeloszlás-tételekre, és ezekhez közvetlenül kapcsolódó kérdésekre vonatkozik. Az A., B., D., F. és az I. Tételek az $S_n f$ Birkhoff összegek eloszlásbeli konvergenciájára vonatkoznak, az E. Tétel ennek kiterjesztéséről szól a funkcionális szintre (gyenge invariancia elv), míg a H. Tétel a momentumok konvergenciájáról.

Tekintsük át röviden módszertani szempontból is a disszertáció eredményeit. Dinamikai rendszerek statisztikus tulajdonságainak vizsgálatára az egyik leghatékonyabb módszer a megfelelő transzfer operátor spektrumának tanulmányozása. A 3. fejezet elsősorban ezen a spektrális megközelítésen alapul. Érdeemes megemlíteni, hogy az A. Tétel volt az első eredmény, ami egy biliárd modellben bizonyított nem-standard határeloszlás-tételt ezzel az eszköztárral. A [BG06]-ben kidolgozott spektrális technikákat azóta is gyakran hivatkozzák az irodalomban, és több irányba is továbbfejlesztették.

A 4. fejezet megközelítése ettől valamelyest eltér. A perturbált transzfer operátorok vizsgálata helyett, a határeloszlás-tételt itt a vizsgált megfigyelhető mennyiség karakterisztikus függvényének közvetlen vizsgálatával kapjuk meg. Olyan klasszikus módszereket használunk, mint a momentumok becslése, alapvető valószínűségszámítási egyenlőtlenségek és a Bernstein-féle kis-nagy blokk technika. Ennek a megközelítésnek a jellegzetessége, hogy közvetlenül érvényesül a korrelációs becslések és a határeloszlás-tételek közti szoros kapcsolat. Ez a szemléletmód vezetett el a H. Tételhez is, melyben feltártuk azokat a jelenségeket, melyek a momentumok konvergenciája és az eloszlásbeli konvergencia közti eltérést okozzák. Ez az eltérés korábban sokat foglalkoztatta a fizikus közösséget is ([CEF08]). A 4. fejezet eredményeit sok más érdekes irányban is továbbfejlesztették az irodalomban, érdemes megemlíteni [JZ18] eredményét

és néhány erre épülő cikket: kvadratikusnál magasabb rendű érintés esetén stabil határeloszlás-tételek jelennek meg, erről lásd még a disszertáció 4.2.1. fejezetét.

A I. Tétel bizonyítása, melyet a a disszertáció 5. fejezetében ismertetünk, bizonyos értelemben a 3. fejezet spektrális technikájának és a 4. fejezet közvetlenebb módszereinek a kombinációja, bár alapvetően inkább spektrális jellegű. Ennek az eredménynek az a különlegessége, hogy az idő és a szórótestméret együttes skálázásával első alkalommal vizsgálja a periodikus Lorentz gáz aszimptotikáját két, az irodalomban alaposan tanulmányozott határeset között. Ezek rögzített szórótestméret mellett a hosszú idejű határviselkedés ([SV07], [DC09]) valamint a Boltzmann-Grad határeset ([MS11a], [MT16]). Megemlítjük még, hogy a biliárd folyamatok korrelációlecsengésére kapott C., G. és J. tételek szintén spektrális eszközöket használnak, hozzátevé, hogy a fent már említett neutrális folyam-irány külön technikai nehézséget jelent.

A bizonyítás általános kereteinek kialakítása mellett a munkának egy ugyanannyira fontos részét képezi, hogy pontosan meg kell érteni és alaposan ki kell vizsgálni a tanulmányozott biliárd modell geometriai és dinamikai jellegzetességeit. Ez az analízis mindig az adott modellhez köthető, és így a három esetben lényegében egymástól függetlenül kell elvégezni. A disszertációban különösen nagy hangsúlyt fektetünk ezeknek a modell-specifikus geometriai-dinamikai részleteknek a bemutatására, ezek alapján ugyanis lényegében meg lehet érteni a fellépő valószínűségszámítási jelenségeket (bár a teljes bizonyítás implementálásához jelentős további munka szükséges).

2. Jelölések

Ebben a fejezetben – elsősorban a legismertebb hiperbolikus típusra, a véges horizontú, sarokpontmentes, síkbeli szóróbiliárdokra koncentrálva – áttekintünk néhány biliárdokkal kapcsolatos alapfogalmat. Ezt megelőzően néhány általános jelölést is rögzítsünk: két $f, g : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, függvény esetén $f \ll g$ és az $f = O(g)$ egyaránt azt jelöli, hogy van egy olyan uniform $C > 0$ konstans, hogy $f(n) \leq Cg(n)$ minden $n \geq 1$ esetén. Az $f \asymp g$ szimbólumot használjuk annak jelölésére, hogy $f \ll g$ és $g \ll f$ egyaránt teljesül. Ha ezen felül azt is tudjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, akkor azt írjuk, hogy $f \sim g$. Ugyanezeket a jelöléseket fogjuk használni más esetekben is az f és g mennyiségek aszimptotikus viselkedésének összehasonlítására, pl. a 0 környezetében, ha $f, g : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^+$ valamilyen $0 < \varepsilon$ -ra.

Egy síkbeli biliárd rendszer egy pontszerű részecske mozgását írja le egy $Q \subset \mathbb{R}^2$ vagy $Q \subset \mathbb{T}^2$ tartományban, ahol \mathbb{R}^2 az euklideszi sík, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ pedig az euklideszi tórusz. A részecske állapotát a helye, vagyis egy $q \in Q$ pont és a pillanatnyi sebessége, egy $v \in \mathbb{S}^1$ vektor adja meg. Itt \mathbb{S}^1 az egységkör \mathbb{R}^2 -ben, a sebességet ugyanis vehetjük egységnyi hosszúnak, mivel a Q tartomány belsejében a részecske egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. A tartomány ∂Q határáról feltesszük, hogy (szakaszonként) legalább C^3 sima, így speciálisan a normálvektora (esetleg véges sok ponttól eltekintve) minden pontjában jól definiált. Amikor a részecske eléri a tartomány határát, a geometriai optika szabályai szerint halad tovább: a visszaverődési szög megegyezik a beesési szöggel. Ez azt jelenti, hogy $q \in \partial Q$ esetén, v^- -szal illetve v^+ -szal jelölve a beesési és a kilépési sebességvektorokat, fennáll a $v^+ = v^- - 2\langle v^-, n \rangle n$ összefüggés, ahol $n = n(q)$ a tartomány ∂Q határának normálvektora a q pontjában, Q belseje felé irányítva, míg $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az euklideszi skalárszorozást jelöli \mathbb{R}^2 -n.

Az alábbiakban bevezetünk néhány további fogalmat és jelölést biliárdokkal kapcsolatban. A tárgyalásunk távolról sem teljes, csupán arra törekszünk, hogy a téziszfüzet önmagában követhető legyen. A témával való alaposabb ismerkedésre elsősorban a kiváló [CM06] monográfiát ajánljuk. A fent leírt folytonos idejű dinamikai rendszert *biliárd folyam*nak hívjuk. Fázistere az $\mathcal{M} = Q \times \mathbb{S}^1 / \sim$ tér, ahol a belépő és a kilépő konfigurációkat azonosítjuk, tehát $(q, v^+) \sim (q, v^-)$ minden $q \in \partial Q$ esetén. A folyamhoz tartozó t idejű dinamikát $S^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ -mel jelöljük (itt $t \in \mathbb{R}$). Természetesen kapjuk a tartomány határán való ütközésekhez tartozó Poincaré szelést, ezt az

$$M = \{(q, v) \in \mathcal{M} \mid q \in \partial Q, \langle v, n(q) \rangle \geq 0\}$$

halmaz definiálja, ahol $n(q)$ jelöli ∂Q normálvektorát a $q \in \partial Q$ pontban. Ebből adódik a $T : M \rightarrow M$

biliárd leképezés a következőképp. A τ szabad úthossz függvény, a folyam M -re való első visszatérésének ideje:

$$\tau : M \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad \tau(x) = \min\{t > 0 \mid S^t x \in M\},$$

megmutatja, hogy az $x \in M$ állapotból indulva mennyi idő telik el a következő ütközésig. Ezek után a *biliárd leképezést*

$$T : M \rightarrow M; \quad Tx = S^{\tau(x)}x$$

definiálja. Az egyértelműség kedvéért fontos megjegyezni, hogy M -ben kilépési (közvetlenül ütközés utáni) sebességvektorokat tekintünk. Ezzel a konstrukcióval a biliárd folyamat nézhetjük úgy is, mint egy felfüggesztett folyamat a $T : M \rightarrow M$ bázisleképezéssel és a $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ tetőfüggvénnyel (lásd lent). Megkülönböztetjük a *véges* és a *végtelen horizontú* konfiguráció esetét; az előbbiről akkor beszélünk, ha a τ függvény (felülről) korlátos M -en, az utóbbiról, ha nincs τ -ra uniform felső korlát. A disszertációban tárgyalt példák túlnyomó többségére a Q tartomány korlátos, ilyenkor van egy természetes, T -re invariáns, (a Lebesgue mértékre nézve) abszolút folytonos valószínűségi mérték M -en, ezt Liouville mértéknek hívjuk, és μ -vel jelöljük (lásd lentebb a (2.1) Formulát). A biliárd dinamika ergodikus és statisztikus tulajdonságait erre a μ mértékre nézve tekintjük (illetve folytonos időben a μ által generált természetes μ^τ invariáns valószínűségi mértékre a folyam fázissterén, lásd lent). Fontos azonban megjegyezni, hogy korlátos $Q \subset \mathbb{T}^2$ esetén is lehet végtelen a horizont, erről lásd az 5. fejezetet.

Ahogy azt az 1 fejezetben említettük, a Q tartomány alakjától függően nagyon sokféle lehet a biliárd dinamika hosszú távú viselkedése. Ebben a fejezetben a hiperbolikus biliárdok legismertebb típusait, a *szóróbiliárdokat* tekintjük. Ilyenkor a Q tartományt úgy kapjuk, hogy *kivágunk* véges sok sima és szigorúan konvex szórótestet a \mathbb{T}^2 tóruszból. Tehát $Q = \mathbb{T}^2 \setminus (\cup_{i=1}^I C_i)$, ahol $I < \infty$ és a C_i szórótestek egyszerűen összefüggő tartományok lezártjai. A további feltételek kimondásához vezessük be a $\Gamma_i = \partial C_i$ jelölést. A 2. fejezetben végig feltesszük, hogy

- a C_i tartományok páronként diszjunktak (azaz kizárjuk a sarokpontokat és így az érintő sarokpontokat is);
- a Γ_i határok (legalább) C^3 sima görbék;
- a C_i halmazok szigorúan konvexek, azaz a Γ_i görbe görbülete pozitív minden $q \in \Gamma_i$ pontjában;
- a horizont véges.

Ennek megfelelően az $M = \cup_{i=1}^I M_i$ felbontást kapjuk a fázissterre, ahol az M_i halmaz a $q \in \Gamma_i$ konfigurációkhoz tartozik. Célszerű a (r, φ) koordináták bevezetése M_i -n a következőképp. Egyrészt az ívhossz szerint parametrizált $r \in [0, |\Gamma_i|)$ határozza meg az ütközési pont helyét Γ_i -n ². Másrészt $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ a kilépés (vagyis a visszaverődés) szögét adja meg, tehát az $n(q)$ normálvektor és a v^+ kilépő sebességvektor által bezárt szöget. φ -t és az r ívhosszt ugyanúgy irányítjuk (irányíthatjuk mindkettőt az óramutató járásával azonosan, vagy mindkettőt az óramutató járásával ellentétesen). Mivel az r koordináta ciklikus, M -t tekinthetjük úgy, mint véges sok diszjunkt henger únióját. Ezekben a koordinátákban a Liouville mérték sűrűségfüggvénye $\cos \varphi$ -vel arányos, azaz

$$d\mu = c_\mu \cos \varphi \, dr \, d\varphi \tag{2.1}$$

ahol a $c_\mu > 0$ egy alkalmas normáló konstans.

M kompakt, így a szórótestek görbülete és (véges horizont esetén) a τ szabad úthossz értéke is egyszerűen el van választva a 0-tól és a végtelentől. A továbbiakhoz vezessük be a következő jelöléseket.

$$0 < \mathcal{K}_{\min} \leq \mathcal{K}_{\max} < \infty; \quad \text{a } \Gamma_i (i = 1, \dots, I) \text{ szórótestek görbületének}$$

$$\text{minimális, illetve maximális értéke;}$$

$$0 < \tau_{\min} \leq \tau_{\max} < \infty; \quad \text{a szabad úthossz minimális, illetve maximális értéke.}$$

² r lényegében ciklikus koordináta, így nincs különösebb jelentősége, hogy Γ_i melyik pontja felel meg az $r = 0$ értéknek

Jelölje továbbá rögzített $x = (r, \varphi) \in M$ esetén $Tx = x_1 = (r_1, \varphi_1) \in M$ az x pont képét. A szóróbilliárd dinamikát alapvetően két jelenség: a szingularitások és a hiperbolicitás versengése határozza meg.

Szingularitások. Az M fázistér határa, $\partial M = \{\varphi = \pm\pi/2\}$, éppen az érintő ütközésekhez tartozó fázispontok halmaza. Legyen

$$\mathcal{S}_1 = \partial M \cup T^{-1}\partial M \quad \text{és} \quad \mathcal{S}_{-1} = \partial M \cup T\partial M.$$

Ezek azok a halmazok, ahol a T , illetve a T^{-1} leképezés nem folytonos. Speciálisan, a $T : M \setminus \mathcal{S}_1 \rightarrow M \setminus \mathcal{S}_{-1}$ megszorítás homeomorfizmus. Ebből adódik, hogy

$$\mathcal{S}_n = \partial M \cup T^{-1}\partial M \cup \dots \cup T^{-n+1}\partial M \quad \text{illetve} \quad \mathcal{S}_{-n} = \partial M \cup T\partial M \cup \dots \cup T^{n-1}\partial M$$

azok a halmazok, ahol a T^n , illetve T^{-n} leképezés szakad (itt $n \geq 1$). Minden rögzített n -re \mathcal{S}_n előáll M -en, mint véges sok, sima és kompakt görbe uniója, melyekről azt is lehet tudni, hogy monoton csökkenők az (r, φ) koordinátákban. Hasonlóan, \mathcal{S}_{-n} véges sok monoton növekvő görbe uniója az (r, φ) koordinátákban. Megjegyezzük ugyanakkor, hogy az $\mathcal{S}_\infty = \cup_{n \geq 1} \mathcal{S}_n$ és az $\mathcal{S}_{-\infty} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{S}_{-n}$ halmazok sűrűek az M fázistéren, és (megszámlálhatóan) végtelen sok görbe uniójaként állnak elő.

Hiperbolicitás. Tetszőleges $x \in M \setminus \mathcal{S}_1$ pontban a T leképezés differenciálható, a DT_x derivált mátrixra van explicit képlet, lásd pl. [CM06, (2.26) Formula]. A továbbiakban az érintővektorokat, pontosabban bármely rögzített $x \in M$ esetén a $\mathcal{T}_x M$ érintőtér elemeit a $dx = (dr, d\varphi)$ szimbólummal fogjuk jelölni. Az *instabil kúpmezőt* a következőképp definiáljuk:

$$C_x^u = \left\{ (dr, d\varphi) \in \mathcal{T}_x M \mid \mathcal{K}_{\min} \leq \frac{dr}{d\varphi} \leq \mathcal{K}_{\max} + \frac{1}{\tau_{\min}} \right\}.$$

Ekkor, minden $x \in M \setminus \mathcal{S}_1$ esetén

$$DT_x C_x^u \subset C_{T_x}^u.$$

Tudjuk továbbá, hogy léteznek $c > 0$ és $\Lambda > 1$ konstansok (valójában $\Lambda = 1 + 2\mathcal{K}_{\min}\tau_{\min}$) melyekkel:

$$|DT_x^n dx| \geq c\Lambda^n |dx| \quad \text{minden } dx \in C_x^u, x \in M \setminus \mathcal{S}_n \text{ esetén.}$$

Egy $W \subset M$ kompakt, C^2 sima görbét *instabil görbének* hívunk, ha minden $x \in W$ pontjára a $\mathcal{T}_x W$ érintővektora a C_x^u instabil kúpban fekszik – a definíció következménye, hogy az instabil görbék szigorúan monoton növekvők az (r, φ) koordinátákban. A fenti tulajdonságokat – vagyis, hogy a T leképezés invariánsan hagyja, és egyenletesen tágítja az instabil kúp vektorait – le lehet vezetni akár a derivált mátrix képletéből is, de szemléletesebb mindezt egy geometriai jelenséghez, a széttartó hullámfrontokhoz kapcsolni. A széttartó hullámfrontok konstrukciójához tekintsünk egy kellően rövid, sima, szigorúan konvex (így minden pontjában pozitív görbületű) görbét a Q konfigurációs térben, és lássuk el ezt minden pontjában az egységnyi normálvektorával. Így kapunk egy görbét a folyam \mathcal{M} fázisterében, melynek „sebességvektorai széttartanak”. A hullámfront széttartó jellege mind a szabad repülés, mind a szórótesteken való ütközés során megmarad. Következésképp, tetszőleges $t > 0$ időre nézve egy széttartó hullámfrontot az S^t folyam széttartó hullámfrontba (pontosabban, széttartó hullámfrontok véges uniójába) képez, miközben növeli a pontok távolságát a front mentén. A leképezés M fázisterében az instabil görbéket úgy kapjuk meg, mint a széttartó hullámfrontok áthaladásakor kialakuló „lenyomatokat” az M Poincaré szelésen.

Involúció. A biliárd dinamika invertálható, az inverzet lényegében a sebességirányok megfordításával kapjuk meg. Pontosabban, legyen

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M}; & \mathcal{I}(q, v) &= (q, -v); & \text{mely indukálja a} \\ \mathcal{I} : M &\rightarrow M; & \mathcal{I}(r, \varphi) &= (r, -\varphi) & \text{leképezést.} \end{aligned}$$

Ekkor $S^{-t} = \mathcal{I} \circ S^t \circ \mathcal{I}$, míg $T^{-n} = \mathcal{I} \circ T^n \circ \mathcal{I}$. Az involúció segítségével kaphatjuk meg az instabil kúpokból a stabil kúpokat és a megfelelő stabil görbéket a következőképp. A *stabil kúpmezőt* a

$$C_x^s = \left\{ (dr, d\varphi) \in \mathcal{T}_x M \mid -\mathcal{K}_{\max} - \frac{1}{\tau_{\min}} \leq \frac{dr}{d\varphi} \leq -\mathcal{K}_{\min} \right\}.$$

képlet definiálja. Ekkor

$$DT_x^{-1}C_x^s \subset C_{T^{-1}x}^s; \quad \text{ahol } x \in M \setminus \mathcal{S}_{-1}; \text{ továbbá}$$

$$|DT_x^{-n}dx| \geq c\Lambda^n|dx| \quad \text{minden } dx \in C_x^s, x \in M \setminus \mathcal{S}_{-n} \text{ esetén.}$$

Stabil görbének hívjuk azokat a görbéket, melyek érintővektorai a C_x^s stabil kúpban fekszenek. Ezek a görbék szigorúan csökkenőek az (r, φ) koordinátákban, és úgy gondolhatunk rájuk, mint összetartó hullámfrontok lenyomataira az M Poincaré fázistéren. Az eddigiek közvetlen folyománya, hogy a stabil és az instabil kúpok egyenletesen transzverzálisak egymásra.

A fenti tulajdonságok – az instabil és a stabil kúpok egyenletes transzverzálitása; az előbbieket a T leképezés, az utóbbiakat annak T^{-1} inverze hagyja invariánsan és tágítja egyenletesen – a sima, egyenletesen hiperbolikus rendszerekre emlékeztetnek. Fontos azonban, hogy ezek a tulajdonságok csak *sarokpont mentes, véges horizontú, síkbeli szóróbiliárdok* esetén teljesülnek egyenletesen. A disszertáció fő fejezeteiben tárgyalt modellekre (stadion, érintő sarokpontok, végtelen horizont) jellemzően veszítünk valamit az egyenletességből, részben ennek a hatását szeretnénk megérteni. De még a leginkább megértett szóróbiliárdok esetében is meg kell küzdeni egy további jelenséggel, a szingularitásokkal. Az erre kifejlesztett eszközökről kicsit bővebben írok a disszertáció 2.1 és 2.2.1 fejezeteiben.

Mindenesetre, *sarokpont mentes, véges horizontú, síkbeli szóróbiliárdok* esetén, sok látványos eredmény ismert az (M, T, μ) leképezés statisztikus tulajdonságaival kapcsolatban. Ezekről a disszertáció 2.2.1 fejezete ad egy rövid áttekintést. A későbbi fejezetekkel való összehasonlítás végett itt most a következőket említjük meg:

- (M, T, μ) ergodicitása még Sinai ([Sin70]) eredménye.
- A *centrális határeloszlás-tételt* Bunimovich és Sinai igazolta ([BS81]), ezt az eredményt további határeloszlás-tételek irányába terjesztette ki több szerző, többek között ilyen a majdnem biztos invariancia elv ([MN05], [Gou10]) (erről lásd még a tézisfüzet 4. fejezetét, vagy a disszertációban a 4.2.2 fejezetet).
- Elsőként Lai-Sang Young bizonyította ([You98]), hogy (M, T, μ) -re *exponenciális a korrelációlecsengés*. Ezt aztán más módszerekkel, amik részben a disszertációban is fontos szerepet töltenek be, több szerző is újra bebizonyította ([CD09], [DZ11]).

A biliárd folyam. Ahogy azt már fent említettük, a biliárd folyam tekinthető úgy, mint egy felfüggesztett folyam az (M, T, μ) bázisleképezéssel és a $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ tetőfüggvénnyel. Ez alatt a következő konstrukciót értjük:

$$M^\tau = \{(x, s) \in M \times \mathbb{R} \mid 0 \leq s \leq \tau(x)\} / \sim; \quad (x, \tau(x)) \sim (Tx, 0);$$

$$\Phi^t : M^\tau \rightarrow M^\tau; \quad \Phi^t(x, s) = (x, s + t) \text{ figyelembe véve az azonosításokat};$$

$$\mu^\tau = (\bar{\tau})^{-1}(\mu \times \text{Leb}); \quad \text{mely invariáns a } \Phi^t \text{ dinamikára. (Itt } \bar{\tau} = \int_M \tau d\mu).$$

(M, T, μ) ergodicitásából következik a $(\Phi^t, M^\tau, \mu^\tau)$ folyam ergodicitása. Viszonylag általános, a $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ tetőfüggvényre vonatkozó feltételek mellett a centrális határeloszlás-tétel is kiterjed a bázisleképezésről a felfüggesztett folyamra, erről lásd a disszertáció 2.2.2. fejezetét. Így konkrétan véges horizontú, sarokpontmentes szóróbiliárd folyamokra is fennáll a centrális határeloszlás-tétel. Ugyanakkor alább a 4. és az 5. fejezetekben láthatunk példákat arra, hogy a leképezésre és a folyamra más-más határeloszlás-tételek teljesülnek.

A felfüggesztett folyam keverésének, és főleg keverési sebességének kérdése a határeloszlás-tételeknél nehezebbnek bizonyult, elsősorban a már fentebb említett jelenség, a folyam irány neutralitása miatt. Rövid történeti áttekintést adunk a disszertáció 2.2.2. fejezetében. Itt csak annyit jegyezzünk meg, hogy elsősorban Chernov ([Che98]), Dolgopyat ([Dol98a],[Dol98b]) és Liverani ([Liv04]) eredetileg sima, egyenletesen hiperbolikus esetre kidolgozott módszerei nyomán a következő eredmények ismertek véges horizontú, sarokpontmentes szóróbiliárdokra, persze csak két dimenzióban:

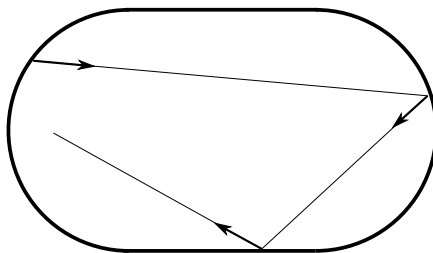
- Baladi, Demers és Liverani [BDL18]-ben bizonyították a folyam exponenciális korrelációlecsengését, ez a legújabb és legerősebb eredmény a témában. Ezt megelőzően
- Chernov ([Che07]) nyújtott exponenciális ($\ll e^{-t^a}$, ahol $a < 1$), Melbourne ([Mel07]) pedig szuperpolinomiális becslést adott a keverés sebességére.
- Melbourne eredményét azért is említjük, mert ezt a módszert sikerült továbbfejleszteni és kiterjeszteni további biliárd modellekre, erre vonatkozik a disszertáció néhány eredménye. Ahogy [Mel07]-ben, a módszer jellegéből adódóan mi is fel fogjuk tenni, hogy a megfigyelhető mennyiségeink simák a folyam irányában (erről lásd lent a 3.4. Definíciót).

Magasdimenziós szóróbiliárdok. A 2. fejezet zárásaként röviden térjünk ki a magasdimenziós szóróbiliárdok esetére, vagyis amikor $Q \subset \mathbb{T}^d$, ahol $d \geq 3$. Q -t sima és szigorúan konvex d -dimenziós szórótestek kivágásával kapjuk, és ezúttal is feltéve a véges horizontot és a sarokpontmentességet (vagyis, hogy a szórótestek diszjunktak), itt is a kétdimenziós esethez hasonló erős statisztikus tulajdonságokat várunk. A $d \geq 3$ eset a magasdimenziós geometria, elsősorban a szingularitások bonyolultabb viselkedése miatt lényegesen összetettebb, mint a kétdimenziós, részletes tárgyalása meghaladja a disszertáció kereteit. A legfontosabb eredményekről a disszertáció 2.3 fejezetében adok áttekintést. Itt csak annyit jegyeznek meg, hogy Tóth Imre Péterrel közösen a leképezés exponenciális korrelációlecsengését egy természetes feltevés, az ún. komplexitási feltétel mellett sikerült bizonyítanunk ([BT08]), melynek ellenőrzése ugyanakkor továbbra is nyitott kérdés (lásd még [BT12]).

3. A stadion biliárd

3.1. A jelenségek áttekintése

Rögzítsük az $\ell > 0$ paramétert, és tekintsük a síkon azt a D tartományt, amit két egység sugarú félkör határol, melyeket ℓ hosszú szakaszokkal a közös érintőik mentén kötünk össze. Ezt a biliárdot Bunimovich stadionnak is hívjuk. A dinamikát az 3.1. Ábra szemlélteti. Bár első ránézésre igencsak különbözik az előző fejezetben tárgyalt szóróbiliárdoktól, a stadionnak mégis van néhány fontos tulajdonsága, amelyekben épp ezekre hasonlít. Bunimovich mutatta meg ([Bun79], [Bun90]), hogy a stadionban a biliárd leképezés ergodik és hiperbolikus. Az alábbiakban röviden ismertetjük a hiperbolicitást okozó mechanizmust, valamint a stadion biliárd néhány más fontos, a hosszú távú dinamikai viselkedést meghatározó vonását.



3.1. ábra. A stadion biliárd

A leképezés fázissterén a korább már bevezetett (r, φ) koordinátákat használjuk, így M egyetlen hengerből áll. Pontosabban, a periodikus $r \in \mathbb{R}/(2\pi + 2\ell)\mathbb{Z}$ hely koordináta nem más, mint az ívhossz a D tartomány pereme mentén. Az ívhossz az óramutató járásával ellentétesen mérjük, és az $r = 0$ érték a jobboldali félkör alsó végpontjához tartozik. A $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ koordináta szokás szerint az ütközés utáni sebességvektor és a határ r pontbeli (a tartomány belseje felé mutató) normálvektora által bezárt

szög. A biliárd leképezést $T : M \rightarrow M$ jelöli, és esetünkben a μ Liouville mérték alakja:

$$d\mu = \frac{\cos \varphi d\varphi dr}{2(2\pi + 2\ell)},$$

mely tehát a Lebesgue mértékre abszolút folytonos, T -re invariáns valószínűségi mérték. T szingularitási ezúttal sarokpontokhoz, pontosabban a határ félkör és egyenes szakaszainak találkozási pontjaihoz tartoznak. Ennek megfelelően legyen

$$S_0 = (\{0\} \cup \{\pi\} \cup \{\pi + \ell\} \cup \{2\pi + \ell\}) \times [-\pi/2, \pi/2].$$

Ugyan T most folytonos M -en, de nem folytonosan differenciálható, a deriváltja épp az $S_0 \cup T^{-1}S_0$ halmazon szakad.

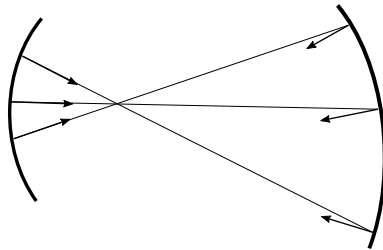
Az előző fejezetben tárgyaltaknak megfelelően a stadion estében is felfogható az $S^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ biliárd folyam úgy, mint egy felfüggesztett folyam a $T : M \rightarrow M$ bázisleképezéssel és $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ tetőfüggvénnyel, ahol $\tau(x)$ a szabad úthossz.

Defókuszálódás. Ahogy azt az előző fejezetben tárgyaltuk, a szóróbiliárdok hiperbolicitása mögött rejlő mechanizmus a határon való ütközéskor fellépő szóródás. Ez biztosítja, hogy széttartó hullámfrontok széttartóak maradnak, ami egyben az instabil kúpmező invarianciáját és tágítását is jelenti. Ezzel szemben a stadion biliárd határai egyenes szakaszokból, vagy éppenséggel fókuszáló hatású félkörökből állnak. Vezessük be a félkörökre a következő kúpmezőt:

ha $x = (r, \varphi)$ úgy, hogy $0 < r < \pi$ vagy $\pi + \ell < r < 2\pi + \ell$, legyen

$$C_x^u = \left\{ (dr, d\varphi) \in \mathcal{T}_x M \mid -1 \leq \frac{dr}{d\varphi} \leq 0 \right\}. \quad (3.1)$$

Ezzel a kúpmezővel az instabil görbék – vagyis azok a görbék, melyeknek az érintővektora a C_x^u kúpba esik – éppenhogy összetartó hullámfrontokká fejlődnek. Pontosabban, a (3.1) kúpmező biztosítja, hogy a megfelelő hullámfrontok eléggé erősen összetartsanak ahhoz, hogy a szabad repülés során defókuszálódjanak még mielőtt újra elérik D határát, és ezt követően széttartó hullámfrontként fejlődjenek tovább – ezt illusztrálja a 3.2. ábra. Továbbá, ha teljesül, hogy az $x \in M$ pont az egyik félkörszakaszon, míg képe, Tx a másik félkörszakaszon helyezkedik el, akkor a defókuszálódás utáni szabad repülési idő biztosan hosszabb, mint a defókuszálódást megelőző szabad repülési idő. Ez a jelenség biztosítja, hogy a hullámfront mentén egyenletesen növekednek a pontok távolságai, legalábbis minden alkalommal, amikor a trajektória átvált az egyik félkörrel a másikra. Végül, minden alkalommal, amikor az így származtatott széttartó hullámfrontok eléri az egyik félkör határszakaszt, az ütközés után már összetartó hullámfrontként hagyják el azt. Ez biztosítja a kúpmező invarianciáját.



3.2. ábra. A defókuszálódási mechanizmus

Az (3.1) Formula adja meg az instabil kúpot a félkörív határszakaszokon, az egyenes határszakaszokra

a kúpot a következőképp adjuk meg:

amennyiben $x = (r, \varphi)$ ahol $\pi < r < \pi + \ell$ or $2\pi + \ell < r < 2\pi + 2\ell$, legyen

$$C_x^u = \left\{ (dr, d\varphi) \in T_x M \mid 0 \leq \frac{dr}{d\varphi} \right\},$$

ami egyszerűen annyit jelent, hogy az instabil görbék széttartó hullámfrontokat generálnak az egyenes szakaszokkal való ütközés után. Ezekkel a definíciókkal egy invariáns kúpmezőt kapunk: minden $x \in M \setminus (\mathcal{S}_0 \cup T^{-1}\mathcal{S}_0)$ esetén

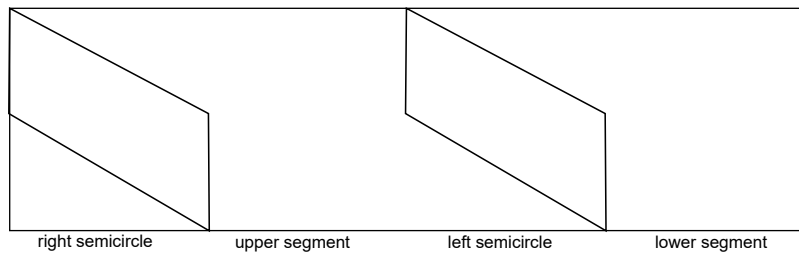
$$DT_x C_x^u \subset C_{T_x}^u,$$

akárcsak a szóróbilliárdokban (csak éppen a defókuszálódáshoz illeszkedően kell megválasztani a kúpmezőt). Másrészt fontos megjegyezni, hogy a tágítást egyenletességét csak azokban a lépésekben várhatjuk el, amikor az egyik félkörív határszakaszból áttérünk a másik félkörív határszakaszra. Ez motiválja az indukált fázistér alábbi definícióját.

Indukált fázistér. Legyen

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \{x \in M \mid x \text{ az egyik félköríven fekszik, ugyanakkor } T^{-1}x \text{ nem fekszik ezen a félköríven} \} \\ &= \bigcup_{r \in (0, \pi)} \{r\} \times (-r/2, \pi/2 - r/2) \cup \bigcup_{r \in (0, \pi)} \{r + \pi + \ell\} \times (-r/2, \pi/2 - r/2). \end{aligned}$$

az \hat{M} halmaz, mint M részhalmaza, két paralelogrammából áll, lásd a 3.3. ábrát.



3.3. ábra. Az M fázistér és az \hat{M} indukált fázistér.

Tekintsük továbbá:

$$\begin{aligned} \text{az első visszatérés idejét:} & \quad r_{\hat{M}} : \hat{M} \rightarrow \mathbb{Z}^+; & \quad r_{\hat{M}}(x) = \min\{k \geq 1 \mid T^k x \in \hat{M}\}; \\ \text{és az első visszatérés leképezést:} & \quad \hat{T} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}; & \quad \hat{T}(x) = T^{r_{\hat{M}}(x)} x. \end{aligned}$$

Fontos megjegyzés, hogy az $r_{\hat{M}}$ függvény nem korlátos, és így a \hat{T} leképezés szingularitási halmaza

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \cup \hat{T}^{-1}\mathcal{S}_0$$

megszámlálhatóan végtelen sok, kompakt görbe uniójaként áll elő. Az $\hat{M} \setminus \mathcal{S}_1$ halmaz összefüggő komponenseit, amik egyúttal az $r_{\hat{M}}$ diszkrét visszatérési idő szinthalmazai, gyakran celláknak is hívjuk. A cellák a paralelogrammák sarkaiban torlódnak, és amint azt a téziszfüzetben vázlatosabban, a disszertáció 3. fejezetében részletesebben tárgyaljuk, fontos szerepet töltenek be a stadion biliárd vizsgálatában. Legyen továbbá $n \geq 1$ esetén $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}_0 \cup \hat{T}^{-1}\mathcal{S}_0 \cup \dots \cup \hat{T}^{-n+1}\mathcal{S}_0$, ez épp a \hat{T}^n magasabb iterált szingularitási halmaza.

Az $\hat{T} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ leképezés egyenletesen hiperbolikus a következő értelemben; ha $x \in \hat{M} \setminus \mathcal{S}_1$, akkor

$$D\hat{T}_x C_x^u \subset C_{\hat{T}x}^u$$

és vannak olyan $c > 0$ és $\Lambda > 1$ konstansok, hogy:

$$|D\hat{T}_x^n dx| \geq c\Lambda^n |dx| \quad \text{minden } dx \in C_x^u, x \in \hat{M} \setminus \mathcal{S}_n \text{ esetén.}$$

$\hat{\mu}$ -vel fogjuk jelölni a μ Liouville mérték által generált \hat{T} -re invariáns, abszolút folytonos valószínűségi mértéket \hat{M} -en. Képlete közvetlenül számolható:

$$\mu(\hat{M}) = 2 \int_{r=0}^{\pi} \int_{\varphi=-r/2}^{\pi/2-r/2} \frac{\cos \varphi \, dr \, d\varphi}{4\pi + 4\ell} = \frac{2}{\pi + \ell}$$

így

$$d\hat{\mu} = \frac{\cos \varphi \, dr \, d\varphi}{8}.$$

Intermittens viselkedés. Az (M, T, μ) leképezés statisztikus tulajdonságait az alábbi kétlépcsős stratégia segítségével vizsgáljuk:

- Tekintsük először az $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\mu})$ első visszatérés leképezést. Főbb tulajdonságaiban nagyon hasonlít a 2. fejezetben vizsgált szóróbilliárd leképezésekhez.
- Vizsgáljuk az $r_{\hat{M}} : \hat{M} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ első visszatérési idő eloszlását. Az előző pont alapján lényegében ennek az eloszlásnak a farokviselkedése határozza meg az (M, T, μ) leképezés statisztikus tulajdonságait.

A bizonyítási stratégiának ez a két eleme erősen kapcsolódik egymáshoz, mindkettőhöz elsősorban arra van szükség, hogy megértsük \hat{M} -ben azoknak a halmazoknak a geometriáját, amelyeken $r_{\hat{M}}$ nagy értékeket vesz fel. Másképp fogalmazva, ezek azok a halmazok, amelyekből indulva sok iteráción át végig $M \setminus \hat{M}$ -ben marad a trajektória. A stadionban ezek a trajektóriaszakaszok két lehetséges típus valamelyikébe tartozhatnak: a *pattogó* sorozatok mentén sok egymás utáni, közel merőleges ütközést látunk a párhuzamos egyenes határszakaszokon, míg a *surranó* sorozatok mentén sok egymás utáni, közel érintő irányú ütközést a félkör alakú határszakaszokon. Ezeket a jelenségeket ábrázolja a 3.4. ábra.



3.4. ábra. Intermittens viselkedés a stadionban

Ennek megfelelően van egy olyan $n_0 \geq 1$, hogy minden $n \geq n_0$ esetén

$$\{x \in \hat{M} \mid r_{\hat{M}}(x) = n\} = B_n \cup D_n,$$

ahol a B_n halmazokból erednek a hosszú pattogó pályaszakaszok, míg a D_n halmazokból a hosszan surranó pályaszakaszok indulnak. Ezeknek a halmazoknak a geometriáját részletesebben tárgyaljuk a disszertáció 3.3 fejezetében, itt most csak néhány kiemelten fontos tulajdonságukat említjük meg. Míg a D_n halmazok a \hat{M} -t alkotó paralelogrammák tompaszögű sarkaiban, addig a B_n halmazok a hegyesszögű sarkokban torlódnak. A halmazok mértékének lecsengésére pedig a következő becslések adódnak:

$$\hat{\mu}(B_n) \asymp \frac{1}{n^3}; \quad \hat{\mu}(D_n) \asymp \frac{1}{n^4}. \quad (3.2)$$

Így tehát az $r_{\hat{M}}$ első visszatérési idő lecsengését vezető rendben a pattogó trajektóriaszakaszok határozzák meg, a surranó trajektóriaszakaszok járuléka csak alacsonyabb rendű korrekcióként jelentkezik.

Érdemes megjegyezni, hogy ez a nagyságrendi eltérés D_n és B_n mértéke között a μ invariáns mérték sűrűségfüggvényében szereplő $\cos \varphi$ faktorra vezethető vissza.

A $\hat{\mu}(B_n)$ mértékek (3.2) szerinti aszimptotikája alapján

$$\hat{\mu}(x \in \hat{M} \mid r_{\hat{M}}(x) \geq n) \asymp \frac{1}{n^2}. \quad (3.3)$$

Így levonhatjuk a következtetést, hogy az $r_{\hat{M}}$ függvény nem eleme $L_{\hat{\mu}}^2(\hat{M})$ -nek, viszont minden $\varepsilon > 0$ esetén eleme $L_{\hat{\mu}}^{2-\varepsilon}(\hat{M})$ -nek. Pontosabban, ha $r_{\hat{M}}$ -et, mint egy valószínűségi változót tekintjük a $(\hat{M}, \hat{\mu})$ valószínűségi mezőn, akkor az eloszlása alapján a normális eloszlás nem-standard vonzási tartományába tartozik.

3.2. Eredmények

Korábbi eredmények. Meghaladja a disszertáció kereteit, hogy a Bunimovich stadionra vonatkozó kiterjedt irodalomról teljes képet adjunk. Elsősorban azokra az eredményekre koncentrálunk, melyek a [BG06] dolgozat közvetlen előzményének tekinthetők.

A stadion biliárd matematikai vizsgálatát Bunimovich kezdte meg [Bun79]-ben, illetve részletesebben [Bun90]-ben, ahol bizonyította a $T : M \rightarrow M$ leképezés (és következésképp $S^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ folyam) ergodicitását.

A korrelációlecsengés kérdésében jelentős előrelépést ért el előbb Markarian [Mar04]-ben, majd egy kicsit más stratégiával Chernov és Zhang [CZ05]-ben. Ezekben a cikkekben két $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos függvény korrelációjára $Corr(f, g; n) \ll \frac{\log^2 n}{n}$ korlátokat bizonyítottak, amit aztán $Corr(f, g; n) \ll \ll \frac{1}{n}$ alakúra erősítettek [CZ08]-ben. Ezekről a becslésekről és a korrelációlecsengés pontos nagyságrendjére vonatkozó legfrissebb eredményekről lásd még a disszertáció 3.3.5 fejezetét.

A 3. fejezet fő eredményei. Továbbra is tekintsünk egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos függvényt. Mivel (M, T, μ) ergodikus, tudjuk, hogy $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)}{n} \rightarrow \int f d\mu$ teljesül μ majdnem minden $x \in M$ esetén. Vezessük be a következő mennyiséget:

$$I_f = I = \frac{1}{2\ell} \left[\int_{r \in [\pi, \pi + \ell]} f(r, 0) dr + \int_{r \in [2\pi + \ell, 2\pi + 2\ell]} f(r, 0) dr \right]. \quad (3.4)$$

Ez az f függvény átlaga azon az invariáns halmazon, amely a stadion két egyenes határszakasza között merőlegesen ide-oda pattogó fázispontokból áll. Bizonyos értelemben ez a „végtelen sokáig pattogó” pontok halmaza.

A. Tétel. *Tekintsünk egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos függvényt, melyre $\int f d\mu = 0$ és $I_f \neq 0$. Ekkor*

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k}{\sqrt{cn \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1),$$

ahol

$$c = \frac{4 + 3 \log 3}{4 - 3 \log 3} \cdot \frac{\ell^2 I^2}{4(\pi + \ell)}.$$

A A. Tétel elsődleges magyarázatát az adja, hogy ha $I \neq 0$, akkor az f függvény $\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ Birkhoff összegeinek viselkedését elsősorban az $r_{\hat{M}}$ eloszlásának lecsengése fogja meghatározni, ami így egy nemstandard normálású határeloszlás-tételre vezet. Ezt a jelenséget a disszertáció 3.3.2. fejezetében tárgyaljuk. Mindez azonban nem magyarázza meg a c aszimptotikus szórásban fellépő $\frac{4+3 \log 3}{4-3 \log 3}$ faktort. Az utóbbi faktor okát az egymást követő pattogó sorozatok közti rövid távú korrelációkban kereshetjük. Ahogy azt a disszertáció 3.3.3 fejezetében tárgyaljuk, nagy n -re teljesül, hogy

$$\hat{T}B_n \cap B_i \neq \emptyset \iff \frac{n}{3} + o(n) \leq i \leq 3n + o(n),$$

vagyis egy $(n-)$ hosszan pattogó trajektóriaszakaszt egy vele összemérhető $(i-)$ hosszúságú újabb pattogó trajektóriaszakasz követ. Ennél pontosabb információ is rendelkezésre áll rögzített n mellett a szóba jövő i értékek eloszlásáról. Ez alapján $\hat{T}B_n$ -n tekintve, a szóba jövő B_i -kre az i index feltételes várható értéke $\alpha \cdot n$, ahol $\alpha = \frac{3}{4} \log 3 < 1$. Ebből arra következtethetünk, hogy nem teljesen pontos kép úgy gondolni az $r_{\hat{M}}, r_{\hat{M}} \circ \hat{T}, \dots$ sorozatra, mint (a normális eloszlás nem-standard vonzási tartományba eső) független, azonos eloszlású valószínűségi változókra. $r_{\hat{M}}$ nagy értékei klaszterekben jelentkeznek, az egyes klasztereken belül pedig alapvetően egy α hatványú geometriai sor szerint emelkednek (illetve aztán a maximum elérése után ugyanilyen ütemben csökkennek) az értékek. Ezzel indokolható, hogy a A. Tételben, a c aszimptotikus szórásban fellép egy $\frac{4+3 \log 3}{4-3 \log 3} = 1 + \frac{2\alpha}{1-\alpha}$ faktor. További részletekről lásd a disszertáció 3.3.3 fejezetét.

A. Tétel alábbi közvetlen következménye mutatja a korrelációkra ismert $1/n$ felső becslés optimalitását.

3.1. Megjegyzés. Az A. tétel feltételei mellett, $\text{Corr}(f, f; n) \neq o(1/n)$, vagyis az $n \int f \cdot f \circ T^n$ mennyiség nem tarthat 0-hoz. Valóban:

$$\int \left[\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \right]^2 = n \int f^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \int f \cdot f \circ T^i.$$

Ha teljesülne, hogy $\int f \cdot f \circ T^i = o(1/i)$, azt kapnánk, hogy $\int \left[\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \right]^2 = o(n \log n)$. Ebből az következne, hogy a $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k}{\sqrt{n \log n}}$ valószínűségi változó szórásnégyzete 0-hoz tart, amint n tart végtelenhez. Ebből nyilván az is következne, hogy a sorozat valószínűségben is nullához tart, ami ellentmondana az A. Tétel állításának.

Másfelől, amennyiben $I = 0$, akkor az f függvény Birkhoff összegeire egy szokásos standard Centrális Határeloszlás-tétel teljesül:

B. Tétel. Tekintsünk egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos függvényt, melyre $\int f d\mu = 0$ és $I_f = 0$. Ekkor van egy olyan $(\sigma_f^2 =) \sigma^2 \geq 0$ konstans, melyre

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

3.2. Megjegyzés. A B. Tételben az aszimptotikus szórásra $\sigma^2 = 0$ akkor és csak akkor, ha van egy olyan $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvény, melyre $f = \chi - \chi \circ T$ majdnem biztosan. Továbbá, ellentétben az I_f konstans közvetlen geometriai jelentésével, a B. Tétel esetében σ_f^2 bonyolultabb módon függ az f függvény autokorrelációitól, az (1.7) Formulában leírtakhoz hasonló módon.

A fejezet hátralevő részében a biliárd folyamattal foglalkozunk a stadionban. Ehhez tekintsük a korább már említett szabad úthossz függvényt, a $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos megfigyelhető mennyiséget. Ennek várható értékét (korábbi jelöléseinkkel összhangban $\bar{\tau}$ -t) kiszámolhatjuk a [CM06, (2.32)] Formula alapján:

$$\bar{\tau} = \frac{\pi|D|}{|\partial D|} = \frac{\pi(\pi + 2\ell)}{2\ell + 2\pi},$$

ahol $|D|$ a stadion, mint D tartomány területét, $|\partial D|$ pedig a kerületét jelöli. Másrésztől triviálisan teljesül $I_\tau = 2$, így tekintve a centrált $\tau_0(x) = \tau(x) - \bar{\tau}$ függvény Birkhoff összegeire vonatkozó határeloszlás-tételeket, két esetet különböztethetünk meg. Abban a speciális esetben, amikor $I_{\tau_0} = 0 \Leftrightarrow \bar{\tau} = 2 \Leftrightarrow \ell = \frac{4\pi - \pi^2}{2\pi - 4} \approx 1.18$, a standard B. Tétel, míg az ℓ paraméter bármilyen más értéke mellett a nemstandard A. Tétel teljesül.

Ahogy a 2. fejezetben tárgyaltuk, a biliárd folyam felfogható, mint egy $(M^\tau, \Phi^t, \mu^\tau)$ felfüggesztett folyam, ahol a bázisleképezés (M, T, μ) , míg a tetőfüggvény τ , így viszonylag általános feltételek mellett

a leképezésekre vonatkozó határeloszlás-tételekből a folyamra is kapunk analóg határeloszlás-tételeket (erről lásd még a disszertáció 2.2.2 fejezetét). Konkréten, legyen $F : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos és centrált (azaz $\int_{M^\tau} F d\mu^\tau = 0$). Vezessük be a következő jelöléseket:

$$S_T F(y) = \int_0^T F(\Phi^t y) dt, \text{ ahol } y = (x, s) = (r, \varphi, s) \in M^\tau;$$

$$J_F = \frac{1}{2\ell} \left[\int_{r \in [\pi, \pi+\ell] \cup [2\pi+\ell, 2\pi+2\ell]} \int_{t \in [0, 2]} F(r, 0, t) dt dr \right].$$

3.3. Következmény. *Az A. és a B. Tételekből következnek az alábbiak.*

1. Ha $J_F \neq 0$, akkor

$$\frac{S_T F}{\sqrt{\frac{c}{T} \log T}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Itt c az a konstans, ami az A. Tételben már szerepelt, csak I -t ki kell cserélnünk J_F -re.

2. Ha $J_F = 0$, akkor

$$\frac{S_T F}{\sqrt{T}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_F^2)$$

egy alkalmas $\sigma_F^2 \geq 0$ konstanssal.

Végül térjünk rá a folyam korrelációlecsengésére. Az első észrevétel, hogy a leképezésre vonatkozó 3.1. Megjegyzésben leírtakhoz hasonlóan, a 3.3. Következményből közvetlenül adódik, hogy a $J_F \neq 0$ esetben $\text{Corr}(F, F; t) \neq o(1/t)$. Az alábbi C. Tétel lényegében az optimális $O(1/t)$ felső becslést adja, legalábbis a folyam irányában sima megfigyelhető mennyiségekre.

3.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $F : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható a folyam irányában, ha bármely $y \in M^\tau$ esetén $F(\Phi^t y)$ a t változónak differenciálható függvénye. Ilyenkor $(\partial_t F)(y)$ fogja jelölni $F(\Phi^t y)$ deriváltját t szerint, a $t = 0$ pontban. Analóg módon definiáljuk a magasabb rendű differenciálhatóságot a folyam irányában, valamint $(\partial_t^k F)$ értékét, ahol $k \geq 1$. Adott $\eta \in (0, 1]$ és $m \geq 1$ paraméterekre $F \in C^{m, \eta}(M^\tau)$ azt jelöli, hogy az F függvény m -szer differenciálható a folyam irányában, és az $F, \partial F, \dots, \partial^m F$ függvények mind Hölder folytonosak η exponenssel (mint M^τ -n értelmezett függvények). Végül az alatt, hogy $F : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ sima a folyam irányában, azt értjük, hogy van egy olyan $\eta \in (0, 1]$, melyre $F \in C^{m, \eta}(M^\tau)$ minden $m \geq 1$ esetén.*

C. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $F, G : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ függvények simák a folyam irányában. Ekkor $\text{Corr}(F, G; t) \ll \frac{1}{t}$.*

4. Szóróbilliárdok érintő ütközőkkel

4.1. A jelenségek áttekintése

Ebben a fejezetben visszatérünk a szóróbilliárdok vizsgálatához, de ellentétben a 2. fejezettel, ezúttal nem tesszük fel, hogy a határ C^3 -sima Γ_i komponensei páronként diszjunktak. Pontosabban azt fogjuk feltenni, hogy a $Q \subset \mathbb{T}^2$ biliárd tartomány határa szakaszonként sima, azaz $\partial Q = \cup_{i=1}^I \Gamma_i$, ahol a C^3 sima, kompakt Γ_i görbék csak a végpontjaikban metszhetik egymást: $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \partial \Gamma_i \cap \partial \Gamma_j$ minden $i \neq j$ esetén. Mindvégig feltesszük továbbá, hogy a tartomány külseje, azaz $\mathbb{T}^2 \setminus D$ felől nézve a Γ_i görbék szigorúan konvexek. A komponensek találkozásánál két különböző típusú viselkedést különböztetünk meg:

- transzverzális sarokpontokat vagy röviden *sarokpontokat*, amikor a komponensek transzverzálisan metszik egymást, azaz a Γ_i és Γ_j görbék érintővektorai által bezárt szög pozitív a metszéspontban.



(a) (Transzverzális) sarokpont esetén az iterációk száma korlátos. (b) Érintő sarokpont esetén az iterációk száma nem korlátos

4.1. ábra. Biliárd dinamika transzverzális és érintő sarokponttal.

- az ebben a fejezetben elsősorban vizsgált *érintő sarokpontokat*, amikor a metszés tangenciális, azaz a Γ_i és Γ_j görbék érintővektorai által bezárt szög nulla a metszéspontban.

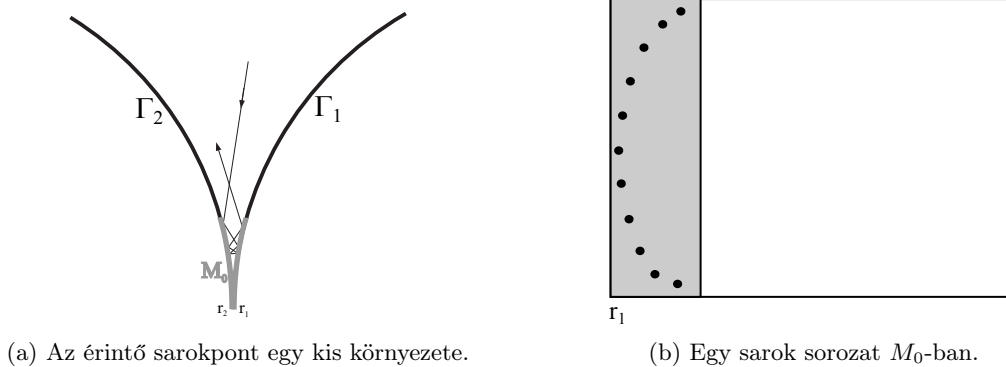
Ennek a két esetnek a geometriája egymástól jelentősen eltérő biliárd dinamikákra vezet. Könnyen ellenőrizhetjük – például egy kihajtogatásos eljárás segítségével³ – hogy transzverzális sarokpont eleendően kis környezetében az egymás utáni ütközések száma felülről korlátos (lásd erről a 4.1a. ábrát). Ugyanakkor érintő sarokpont tetszőlegesen kis környezetében is előfordulhat akármilyen sok egymás utáni ütközés (lásd 4.1b. ábra). Ezeket a sarokpont kis környezetében maradó trajektóriaszakaszokat röviden *sarok sorozatoknak* fogjuk hívni.

Bár *transzverzális* sarokpontok esetén is felmerül néhány komoly technikai nehézség – például a szingularitások komplexitásának kérdése, ezt [DST14] vizsgálta – az erős statisztikus tulajdonságokra vonatkozó eredmények jelentős részét sikerült a sarokpontmentes esetről kiterjeszteni erre a kategóriára. Így például több bizonyítás is ismert az (M, T, μ) leképezés exponenciális korrelációlecsengésére, és a centrális határeloszlás-tételre a standard \sqrt{n} normálással ([Che99], [DZ14]).

Ugyanakkor *érintő* sarokpontok esetén a biliárd leképezés statisztikus tulajdonságai lényegesen eltérnek a sarokpontmentes esetben ismertektől. Ahogy azt az eredményekből is látni fogjuk, a hosszú sarok sorozatok lelassítják a korrelációlecsengés ütemét, a határeloszlás-tételekben pedig jellemzően anomális skálázásokhoz vezetnek. A jelenségek leírásához, akárcsak a 3. fejezetben a stadion biliárd vizsgálatánál, érdemes bevezetni egy $\hat{M} \subset M$ halmazt. Így most is kapunk egy $r_{\hat{M}} : \hat{M} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ első visszatérés időt, $\hat{T} : \hat{M} \rightarrow \hat{M}$ első visszatérés leképezést, valamint a μ által generált \hat{T} -re invariáns, abszolút folytonos $\hat{\mu}$ valószínűségi mértéket \hat{M} -en, úgy, hogy az $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\mu})$ dinamikai rendszernek már erős statisztikus tulajdonságai lesznek. Ezúttal \hat{M} -et úgy érdemes választani, hogy *kivágjuk az érintő sarokpont egy rögzített kis környezetét*. Pontosabban, $\hat{M} = M \setminus M_0$, ahol M_0 a fázistér azon része, ami az érintő sarokpont kis környezetébe eső ütközésekhez tartozik, ezt illusztrálja a 4.2a. ábra (ha több érintő sarokpont is van, akkor mindegyik ilyen pontnak kivágjuk egy kis környezetét). A kivágott kis környezet pontos mérete nem számít, ugyan egy együttható erejéig megjelenik a $(\hat{M}, \hat{T}, \hat{\mu})$ rendszerre megfogalmazott határeloszlás-tételekben, de ez az együttható kiskálázódik, amikor visszatérünk az eredeti (M, T, μ) rendszerre.

Ahogy ez a 4.2a. ábrán is látszik, az érintő sarokpontban a határ két komponense, Γ_1 és Γ_2 találkozik, az egyes íveken r_1 , illetve r_2 koordinátájú pontokban. Ennek megfelelően magához az érintő sarokponthoz két függőleges vonal tartozik a fázistérben, M két különböző komponensén, melyek az $r = r_1$, illetve $r = r_2$ koordináták rögzített értékei mellett futnak a φ koordináta mentén, $-\pi/2$ -től $\pi/2$ -ig. Ennek megfelelően, az M_0 halmaz két függőleges helyzetű, téglalap alakú tartományból áll, ezek egyikét, az r_1 koordinátájú pont kis környezetéhez tartozót, ábrázoltuk a 4.2b. ábrán. Az r_2 koordinátájú pont kis

³ Kihajtogatás alatt azt értjük, hogy amikor a tartomány határához ér a részecske, nem a trajektóriát tükrözzük a határra, hanem a tartományt, míg a trajektóriát változatlanul folytatjuk.



(a) Az érintő sarokpont egy kis környezete.

(b) Egy sarok sorozat M_0 -ban.

4.2. ábra. Indukált fázistér és sarok sorozatok.

környezetében van egy hasonló téglalap alakú tartomány, és amíg a sarok sorozat tart, a trajektória váltakozva látogatja meg a két tartományt. Tekintsünk egy olyan $\hat{x} \in \hat{M}$ pontot, melyre $r_{\hat{M}}(\hat{x})$ értéke nagy: a 4.2b. ábrán a feketével jelölt pontok a $T\hat{x}, T^3\hat{x}, T^5\hat{x}, \dots$ iteráltakat mutatják (míg $T^2\hat{x}, T^4\hat{x}, \dots$ hasonló mintázatot követ, de az r_2 koordinátájú pont környezetében). Minél nagyobb $r_{\hat{M}}(\hat{x})$, annál közelebb helyezkednek el ezek a pontok az $r = r_1$ határvonalhoz. Másrésztől, minél hosszabb a sarok sorozat, annál inkább igaz, hogy a trajektória az M_0 halmazba közel érintő ütközéssel, vagyis egy $-\frac{\pi}{2}$ -höz közeli φ koordináta értékkel lép be. A sarok sorozat első felében, amíg a trajektória egyre mélyebben hatol be az érintő sarokpont kis környezetébe, $|r - r_1|$ folyamatosan csökken, és ezzel egyidejűleg φ értéke növekszik, egészen addig, amíg a trajektória el nem éri a fordulópontját, amely egy $\varphi \approx 0$ értékhez tartozik. A fordulópont után φ értéke tovább növekszik, de ezzel egyidejűleg ebben a második, kifelé tartó szakaszban $|r - r_1|$ is növekszik. A kifelé tartó szakasz során a trajektória tulajdonságai az első, befelé tartó szakaszra szimmetrikus mintázatot követnek, míg végül elhagyják az M_0 halmazt egy $\varphi \approx \pi/2$ értékkel, vagyis a határt közel érintő ütközéssel. A disszertáció 4.3.3 fejezetében tárgyaljuk, hogy a sarok sorozat alatt jelentkező mutatott φ értékek az $r_{\hat{M}} \rightarrow \infty$ aszimptotika mellett egyre pontosabban követnek egy konkrét sűrűségfüggvény szerinti statisztikát. Mint látni fogjuk, a 4.2 fejezet D. Tételében szereplő D_f konstans (lásd még a (4.1) Formulát) értéke is ezt az asszimptotikus viselkedést tükrözi.

Most térjünk rá röviden az $S^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ folyam jellemzésére szóróbilliárdokban, érintő sarokpont jelenlétében. Ahogy azt a 2 fejezetben tárgyaltuk, a biliárd folyamat tekinthetjük úgy, mint egy $(M^\tau, \Phi^t, \mu^\tau)$ felfüggesztett folyamatot. A folyamat viselkedését leginkább meghatározó jelenség, hogy bár a fent említett hosszú sarok sorozatokhoz a biliárd leképezés akármilyen sok iteráltja tartozhat, folytonos időben ezek egyenletesen korlátos ideig tartanak. Ennek következtében a τ tetőfüggvény – azaz a szabad repülési idő – M sarokponthoz tartozó határpontjaiban eltűnik. A 4.2. ábra jelöléseit használva $\tau(r_1, \varphi) = 0$ tejesül, bármely $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ esetén (ez következik például abból is, hogy a $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvény (szakaszonként) Hölder folytonos). Ennek megfelelően érintő sarokpont esetén a biliárd folyam erősebb statisztikus tulajdonságokkal rendelkezik, mint a biliárd leképezés, ahogy ez például a G. Tételből is látszik.

4.2. Eredmények

Korábbi eredmények. Először Machta fogalmazta meg a [Mac83] cikkben azt a sejtést, hogy érintő sarokpontok esetén az (M, T, μ) szóróbilliárd leképezésre a korrelációk $O(1/n)$ ütemben csengenek le. Sejtését heurisztikus érvelésekkel támasztotta alá, többek között bevezetett egy differenciálegyenlet-rendszert, amely a sarok sorozatok alatt jól közelíti a koordináták időfejlődését. Ez a differenciálegyenlet-rendszer a modell matematikailag szigorú vizsgálatában is fontos szerepet tölt be, sokat használjuk például a disszertáció 4.3 fejezetében. A leképezés ergodicitását Rehaček bizonyította [Ř95]-ben, ebből a hiperbolicitáson alapuló általános megfontolások (lásd pl. [CM06, Chapter 6] és [CH96]) alapján következnek

további ergodikus tulajdonságok, mint például a keverés, a Kolmogorov keverés vagy a Bernoulli tulajdonság. A keverés sebességére polinomiális felső becslést Chernov és Markarian adott [CM07]-ben a következő formában: $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos függvényekre $\text{Corr}(f, g; n) \ll \frac{\log^2 n}{n}$. Ezt a becslést Chernov és Zhang javította $O(1/n)$ -re a [CZ08] cikkben.

A biliárd leképezésre vonatkozó határeloszlás-tételek. Vezessük be a következő jelöléseket. Ahogy korább tárgyaltuk, a μ Liouville mértéket M -en a $d\mu = c_\mu \cdot \cos \varphi \cdot dr d\varphi$ képlet adja meg, ahol a normáló konstans értéke $c_\mu = [2 \cdot \text{Length}(\Gamma)]^{-1}$, amivel μ valószínűségi mérték. Az egyértelműség kedvéért tekintsük 4.2. ábrán vázolt geometriát: egyetlen érintő sarokpontunk van, itt a Γ_1 és Γ_2 határkomponensek érintik egymást az r_1 -gyel, illetve r_2 -vel jelölt végpontjaikban. Jelölje továbbá, \mathcal{K}_1 és \mathcal{K}_2 a Γ_1 és a Γ_2 görbék görbületét az r_1 , illetve r_2 pontokban; és legyen $\mathcal{K}_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)$. Ezek után adott $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos függvényre vezessük be a következő nemnegatív konstans:

$$D_f^2 = \frac{c_\mu}{8\mathcal{K}_0} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [f(r_1, \varphi) + f(r_2, \varphi)] \sqrt{\cos \varphi} d\varphi \right]^2. \quad (4.1)$$

4.1. Megjegyzés. Ha a $\Gamma = \cup_{i=1}^I \Gamma_i$ határ mentén több, mint egy érintő sarokpont is van, akkor D_f^2 -t úgy definiáljuk, mint a (4.1) képlet által megadott mennyiségek összegét mindegyik érintő sarokpontra.

Ahogy korább, most is jelölje $S_n f : M \rightarrow \mathbb{R}$ az f Birkhoff összeget; azaz $S_n f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$.

D. Tétel. Tekintsünk egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos függvényt, melyre $\int f d\mu = 0$ és $D_f \neq 0$. Ekkor

$$\frac{S_n f}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, D_f^2).$$

Ahogy a stadion esetében is láttuk, a D. Tételből következik egy alsó becslés a korrelációcsengés sebességére a következő értelemben. Tekintsünk egy a tétel feltételeit teljesítő f függvényt, így tehát $D_f \neq 0$; ekkor $\text{Corr}(f, f; n) \neq o(1/n)$, lásd erről a 3.1. Megjegyzést. Megjegyezzük még, hogy abban az esetben, amikor f és g eltűnik a \hat{M} halmazon kívül, Bruin, Terhesiu és Melbourne [BMT21]-ben ennél pontosabb eredményeket is bizonyított az $O(1/n)$ becslés optimalitásáról, erről lásd még a disszertáció 3.3.5 fejezetét.

A következő eredményünk a D. Tétel kiterjesztése a funkcionális határeloszlás-tétel szintjére (vagyis lényegében egy Gyenge Invariancia Elv). Adott $N \geq 1$ és $0 \leq s \leq 1$, mellett definiáljuk $S_{sN} f$ -t a következőképp: ha $s = \frac{k}{N}$ valamilyen egész $k = 1, \dots, N$ -re, akkor legyen $S_{sN} f = S_k f$, vagyis az f függvény k -dik Birkhoff összege; a köztes értékekre, tehát ha $\frac{k-1}{N} < s < \frac{k}{N}$, lineáris interpolációval terjesztjük ki a függvényt, értelemszerűen az $S_{k-1} f$ és $S_k f$ között (ahol használjuk még az $S_0 f = 0$ konvenciót).

E. Tétel. Tekintsünk egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely teljesíti a D. Tétel feltételeit, így tehát $D_f \neq 0$. Használjuk a fent definiált $S_{sN} f$ jelölést. Ekkor, amint $N \rightarrow \infty$, a

$$W_N(s) = \frac{S_{sN} f}{D_f \sqrt{N \log N}}; \quad 0 < s < 1$$

folyamat konvergál eloszlásban a standard Brown mozgáshoz.

Ezzel szemben, ha $D_f = 0$, az alábbi standard skálázású centrális határeloszlás-tételt kapjuk.

F. Tétel. Tekintsünk egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos függvényt, melyre $\int f d\mu = 0$ és $D_f = 0$. Ekkor van olyan $\sigma_f^2 \geq 0$ konstans, melyre

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_f^2).$$

4.2. Megjegyzés. *Ahogy a stadionra vonatkozó F. Tétel esetében, most is fennáll a 3.2. Megjegyzés: $\sigma^2 = 0$ akkor és csak akkor, ha $f = \chi - \chi \circ T$ valamilyen $\chi : M \rightarrow \mathbb{R}$ mérhető függvényre. A tételben szereplő σ^2 -t az f függvény alkalmas autokorrelációi segítségével lehet kifejezni, erről lásd a disszertáció 4.8. Tételét.*

Kitekintés: stabil határeloszlások és Lévy folyamatok magasabb rendű érintés esetén. Ezen a ponton megemlítünk egy nagyon érdekes újabb kutatási irányt, amit jelentős részben motiváltak ennek a fejezetnek az eredményei. Abban az esetben, amikor a sarokpontban találkozó komponensek nem kvadratikussal, hanem annál magasabb rendben érintik egymást, a D. Tétel feltételeinek alkalmas átfogalmazása szerinti függvényekre Jung és Zhang a [JZ18] dolgozatban *stabil határeloszlás-tételeket* bizonyított. A jelentkező stabil határeloszlás indexét éppen az érintkezés rendje határozza meg. Később, több cikk is foglalkozott ennek a határeloszlás-tételnek a kiterjesztésével a funkcionális szintre, konkrétan [MV20], [JPZ20] és [JMP21]. Ezek szintén a magasabb rendű érintés esetére, az E. Tételben szereplőhöz hasonló, alkalmasan definiált folyamatok konvergenciáját bizonyították a megfelelő Lévy folyamatokhoz. Érdemes megjegyezni, hogy ez a problémakör analitikus szempontból is érdekes új kérdéseket vet fel: a határfolyamat nem folytonos, és nem magától értetődő, hogy milyen topológiában teljesül a konvergencia. A további részletekről lásd a fent említett cikkeket.

A biliárd folyam statisztikus tulajdonságai. Térjünk rá az $S^t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ biliárd folyam, vagy az ezzel ekvivalens $\Phi^t : M^\tau \rightarrow M^\tau$ felfüggesztett folyam vizsgálatára, a μ^τ invariáns valószínűségi mértékkel (itt persze τ a szabad repülési idő). Tekintsük most is a 3.4. Definícióban szerinti $F \in C^{m,\eta}(M^\tau)$ függvényeket valamely $\eta \in (0, \eta]$ és $m \geq 1$ paraméterekre, tehát lényegében az η -Hölder folytonos, és folyam irányban m -szer differenciálható függvényeket. Ezeket a függvénytereket mind tartalmazza a $C^\eta(M^\tau)$ tér, vagyis az $F : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}$; η -Hölder folytonos függvények tere. Vezessük még be a rapid keverés (más szóval a szuperpolinomiális korrelációlecsengés) fogalmát a következő értelemben.

4.3. Definíció. *Az $(M^\tau, \Phi^t, \mu^\tau)$ folyamra teljesül a rapid keverés (vagy más szóval a korrelációk szuperpolinomiális ütemben csengenek le) ha minden $q \geq 1$ esetén létezik olyan $m \geq 1$, melyre fennáll, hogy minden $\eta \in (0, 1]$ exponensre, és tetszőleges $F, G \in C^{m,\eta}(M^\tau)$ függvényekre teljesül $\text{Corr}(F, G; t) \ll t^{-q}$.*

Mielőtt kimondjuk a biliárd folyam statisztikus tulajdonságaira vonatkozó eredményeinket, teszünk egy fontos megjegyzést. Ahogy ezt említettük például a 3.3. Következmény kapcsán, meglehetősen általános feltételek mellett vissza lehet vezetni a felfüggesztett folyamra vonatkozó határeloszlás-tételeket a bázisleképezés határeloszlás-tételeire. Tekintsünk egy $F : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos függvényt, és ehhez rendeljük hozzá egy $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = \int_0^{\tau(x)} F(\Phi^t x) dt$ képlettel. A fontos észrevétel, hogy $\tau(x) = 0$ teljesül minden $x = (r_i, \varphi)$ esetén, ahol $i = 1, 2$, az r_1 és az r_2 az érintő sarokpontot alkotó két pont, a $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ koordináta pedig tetszőleges. Felidézve ezek után az (4.1) Formulát (érdemes tekinteni a 4.2. ábrát is), láthatjuk, hogy ha az $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ egy a folyam fázissterén értelmezett $F : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ függvényből generáljuk, akkor f is eltűnik az $x = (r_i, \varphi)$ alakú pontokban, és így $D_f = 0$. Így tehát az ilyen f függvényekre a F. Tétel, azaz standard skálázású centrális határeloszlás-tétel vonatkozik. Valójában a biliárd folyamra egy ennél erősebb tulajdonságot sikerült bizonyítani, a majdnem biztos invariancia elvet, a következő értelemben.

4.4. Definíció. *Tekintsük az érintő sarokpontú szóróbiliárdok esetére az $(M^\tau, \Phi^t, \mu^\tau)$ felfüggesztett folyamot és egy vektor értékű, Hölder folytonos és centrált ($\int F d\mu^\tau = 0$) $F : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}^d$ megfigyelhető mennyiséget (valamilyen $d \geq 1$ egész számra). Azt mondjuk, a folyamra fennáll a vektor értékű majdnem biztos invariancia elv, ha van olyan $\lambda > 0$ exponens, hogy minden, a fenti feltételeket teljesítő F függvényre megadható egy $\mathcal{W}(T)$ d dimenziós Brown mozgás, hogy (esetleg egy kiterjesztett valószínűségi mezőn)*

$$S_T F = \int_0^T F \circ \Phi^t dt = \mathcal{W}(T) + O(T^{\frac{1}{2}-\lambda}) \quad \text{majdnem biztosan, ahogy } T \rightarrow \infty.$$

Megjegyezzük, hogy a majdnem biztos invariancia elvből számos további határeloszlás-tétel következik, így a centrális határeloszlás-tétel és annak kiterjesztése funkcionális szintre (a standard \sqrt{T} normálással), vagy az iterált logaritmus tétel (további részletekről lásd a [PS75] monográfiát).

G. Tétel. *Érintő sarokpontú szóróbiliárdok esetén a biliárd folyamra teljesül a szuperpolinomiális korrelációlecsengés (a 4.3. Definíció értelmében), valamint a vektor értékű majdnem biztos invariancia elv (a 4.4. Definíció értelmében).*

4.5. Megjegyzés. *Megjegyezzük, hogy transzverzális sarokpontok esetére az analóg eredményeket Melbourne bizonyította a [Mel07] cikkben.*

A folyam irányú simaságra vonatkozó feltétel nem teljesül néhány, a fizikai vonatkozások szempontjából fontos függvényre. Ilyen például a sebesség is, hiszen ez az ütközési pillanatokban ugrásszerűen változik.

A majdnem biztos invariancia elvben az optimális ráta (vagyis a λ lehetséges legnagyobb értéke a 4.4. definícióban) egy igen nehéz kérdés, melynek vizsgálata meghaladja a disszertáció kereteit, ezzel kapcsolatban a [MN09], [Gou10], [Kor18] dogozatokra hivatkozunk. Csak annyit említenénk meg, hogy a skalár esetben (tehát ha $d = 1$) és ha $F : M^T \rightarrow \mathbb{R}$ sima a folyam irányban, akkor tetszőleges $\lambda < \frac{1}{4}$ elérhető [Mel18, section 1.2] szerint.

Momentumok konvergenciája. Az eloszlásban való konvergencia mellett vizsgálhatjuk másmilyen szempontból is a Birkhoff összegek aszimptotikus viselkedését. Ehhez tekintsünk általában egy $H : N \rightarrow N$ dinamikai rendszert egy ν ergodikus, invariáns valószínűségi mértékkel. Tegyük fel továbbá, hogy az $A : N \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható és centrált (azaz $\nu(A) = \int_N A d\nu = 0$) függvényre fennáll egy határeloszlás-tétel. Ez alatt azt értjük, hogy az $S_n A = A + \dots + A \circ H^{n-1}$ Birkhoff összegek alkalmas normálás mellett konvergálnak eloszlásban: van egy olyan $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemtriviális eloszlásfüggvény és egy b_n skálázó számsorozat, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left(x \in N \mid \frac{S_n A(x)}{b_n} \leq z \right) = G(z) \quad (4.2)$$

minden olyan $z \in \mathbb{R}$ pontban, ahol G folytonos. Ekkor vizsgálhatjuk a következő kérdést: ha adott $p > 0$ rögzítése mellett teljesül, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu (|(S_n A)/b_n|^p) = \int |z|^p dG(z), \quad (4.3)$$

akkor azt mondjuk, hogy a p -dik momentumok a kanonikus értékhez konvergálnak. Kanonikus konvergencia hiányában az $(S_n A)/b_n$ skálázott Birkhoff összegek p -dik momentumai konvergálhatnak egy a (4.3) jobb oldalán szereplőtől eltérő értékhez, vagy akár divergálhatnak is. Megemlítjük az alábbi standard tényeket (lásd pl. [Dur10, Exercise 3.2.5, p. 101]):

- Tegyük fel, hogy (4.2) teljesül és $\sup_n \nu (|(S_n A)/b_n|^p) < \infty$. Ekkor minden $q < p$ esetén az $(S_n A)/b_n$ skálázott Birkhoff összegek q -dik momentumai kanonikusan konvergálnak.
- Van egy olyan $p_* \in [0, \infty]$ érték, a *kritikus momentum*, melyre
 - (a) minden $q < p_*$ választásra $(S_n A)/b_n$ q -dik momentuma kanonikusan konvergál,
 - (b) minden $q > p_*$ választásra $(S_n A)/b_n$ q -dik momentuma divergál.
- Ha $p_* = \infty$, akkor minden momentum kanonikusan konvergál. Ha $p_* = 0$, akkor minden momentum divergál. A köztes esetekben a p_* -dik momentum konvergálhat kanonikusan, vagy valami más értékhez, vagy divergálhat. Ugyanakkor, az eloszlásban való konvergenciából következik, hogy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu (|(S_n A)/b_n|^p) \geq \int |z|^p dG(z),$$

így a p_* -dik momentumok határértéke legalább annyi, mint a határeloszlás p_* -dik momentuma.

Visszatérve az érintő sarokpontú szóróbilliárd leképezésekre, tegyük fel ugyanazokat a feltételeket, mint D. Tételben. Erre az esetre fennáll a következő eredmény.

H. Tétel. *Tekintsünk egy (M, T, μ) érintő sarokpontú szóróbilliárd leképezést, és teljesítse az $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ugyanazokat a feltételeket, mint a D. Tételben; tehát f Hölder folytonos, $\int f d\mu = 0$ és $D_f \neq 0$. Ekkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu([S_n f]^2)}{n \log n} = 2D_f^2. \quad (4.4)$$

Szavakban kifejezve, a második momentumok a határeloszlás második momentumának kétszereséhez konvergálnak. Ezt a jelenséget „kétszerezési effektusnak” is hívjuk.

A H. Tételből tehát speciálisan az is következik, hogy érintő sarokpontú szóróbilliárd leképezésekre $p_* = 2$. Ezen a ponton megemlítjük Gouëzel és Melbourne eredményeit a [GM14] dolgozattól, illetve az ezt megelőző [MT12]-t. Ezekben a cikkekben a momentumok konvergenciáját általában vizsgálták a szerzők az ún. Young tornyokkal modellezhető leképezésekre. Konkrétan az érintő sarokpontú szóróbilliárd leképezésekre [GM14] eredményeiből következik ugyan, hogy $p_* = 2$, de magát a kétszerezési effektust [GM14] nem bizonyította. Megemlítjük még Dettmann [Det12] cikkét, mely az 5 fejezet modelljére, a végtelen horizontú Lorentz gázra mutatta ki a kétszerezési effektust. A disszertáció 4.3.3 fejezetében, illetve [BCD17, Appendix A]-ben megmutatjuk, hogy a kétszerezési effektus tisztán valószínűségi számításai eredetű jelenség.

5. A végtelen horizontú Lorentz gáz

5.1. A jelenségek áttekintése

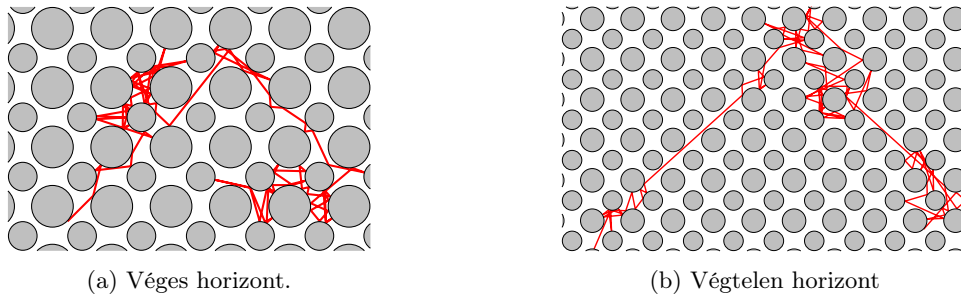
Ebben a fejezetben is síkbeli szóróbilliárd modelleket vizsgálunk, de ellentétben a 4. fejezettel, ezúttal nem engedjük meg, hogy a határ komponensei metszék vagy érintsék egymást. Így tehát páronként diszjunkt szigorúan konvex szórótesteket tekintünk – ezekre, az egyszerűség kedvéért, gondolhatunk úgy, mint körökre. Ugyanakkor, egy másik irányban általánosítjuk a 2. fejezetben megfogalmazott feltételeket: *végtelen horizontú* biliárd asztalokat vizsgálunk, tehát a két egymás utáni ütközés közt eltelt szabad repülési időre nincs uniform felső korlát.

Az, hogy a véges és a végtelen horizontú konfigurációk mennyire különböző viselkedésre vezetnek, különösen szembeűnő, ha azt a nem korlátos biliárdasztalt tekintjük, amit akkor kapunk, ha a konfigurációt kihajtogatjuk a \mathbb{T}^2 tóruszról a teljes síkra. Ezt a biliárd rendszert, amit tehát egy a teljes \mathbb{R}^2 síkon értelmezett, periodikus szórótestelrendezés határoz meg, *periodikus Lorentz gáznak* hívjuk. A 5.1. ábrán szemléltetjük a véges és a végtelen horizontú esetek különbözőségét. A Lorentz gáz modelleket Hendrik Lorentz vezette be 1905-ben ([Lor05]) abból a célból, hogy fémekben vizsgálja az elektronok mozgását. Itt a szórótestek az atomoknak, a biliárd részecske pedig az elektronnak felel meg. A véges, illetve végtelen horizontú Lorentz gázokat gyakran használják a diffúzív, illetve a szuperdiffúzív viselkedés mechanikai modelljeként a szakirodalomban.

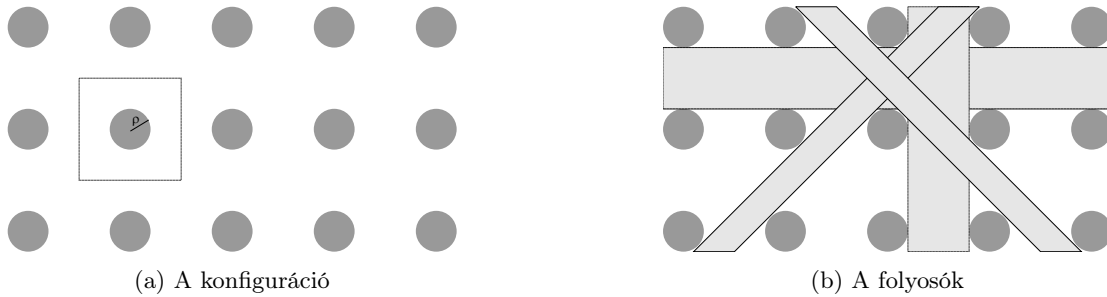
A 5.1b. ábrán az is jól látható, hogy a hosszú szabad repülések a sík meghatározott irányaival párhuzamos, végtelen hosszú szórótestmentes sávok, az úgynevezett *folyosók* mentén alakulnak ki. A szuperdiffúzív viselkedés megértéséhez elengedhetetlen a folyosók geometriájának feltárása.

Lorentz gáz konstrukciójára mutat egy látványos és egyszerű lehetőséget a 5.2a. ábra: a \mathbb{Z}^2 euklideszi rács minden pontja köré helyezünk egy $\rho < \frac{1}{2}$ sugarú, kör alakú szórótestet. Az így kapott biliárd konfiguráció mindenképp végtelen horizontú minden $\rho < \frac{1}{2}$ értékre, ugyanakkor a folyosók szerkezete – és így a szuperdiffúzív viselkedés jellege – függ a szórótestmérettől. Ahogy ezt a 5.2b. ábra is mutatja, ρ csökkentésével egyre több folyosó nyílik meg, a sík újabb és újabb $\xi = (p, q) \in \mathbb{Z}^2$ racionális irányai mentén. A disszertáció 5. fejezetének egyik hangsúlyos témája ennek a konkrét modellnek a vizsgálata.

Terminológiával kapcsolatos megjegyzések. Ha a biliárd modellt a \mathbb{T}^2 tóruszon nézzük (ez kompakt fázisteret jelent) akkor a (véges vagy végtelen horizontú) „szóróbilliárd” kifejezést fogjuk használni,



5.1. ábra. Véges és végtelen horizontú Lorentz gázok.



5.2. ábra. \mathbb{Z}^2 -periodikus végtelen horizontú Lorentz gáz egyetlen, $\rho < \frac{1}{2}$ sugarú ütközővel

szemben a teljes \mathbb{R}^2 síkon generált végtelen, periodikus biliárd konfigurációval, amire „periodikus Lorentz gázként” fogunk hivatkozni. Az utóbbi az előbbi \mathbb{Z}^2 kiterjesztése, ahogy ezt az alábbiakban is tárgyaljuk. Ezzel követjük az irodalomban leginkább használt, bár nem mindenhol követett terminológiát.⁴ Egy további fontos megjegyzés, hogy itt és a disszertáció 5. fejezetében is *periodikus Lorentz gáz* modelleket vizsgálunk, nem pedig olyan aperiodikus modelleket, amelyeket nem lehet egy a tóruszon definiált biliárdra redukálni. A 5. fejezet egyik fő célja, hogy periodikus Lorentz gáz esetében bizonyítson határeloszlás-tételeket a biliárd részecske helyére a síkon. Erről részletesebben írunk az alábbiakban, most csak arra emlékeztetnénk, hogy periodikus Lorentz gáz esetén a véletlen egyetlen forrása a kezdeti feltétel megválasztása. Ezzel szemben a *random Lorentz gázban* (ezt tárgyalja pl. a [LT20] cikk) további véletlenség származik a szórótestek helyzetéből a síkon – ez választható például egy Poisson pontfolyamat szerint; érdemes megjegyezni, hogy ez a random konstrukció majdnem biztosan véges horizontot eredményez.

Térjünk vissza a $T : M \rightarrow M$ véges horizontú szóróbiliárd leképezés vizsgálatára, és tekintsük szokás szerint a μ invariáns Liouville mértéket. Ennek közelebbi vizsgálata arra az eredményre vezet, hogy sok fontos vonásában hasonló az előző fejezetekben, vagyis a stadion és az érintő sarokpontú szóróbiliárdok esetében látott *indukált első visszatérés* leképezésekhez. Konkrétan, ez a leképezés is egyenletesen hiperbolikus jellegű a 2. fejezetben tárgyalt értelemben, és ezzel egyidejűleg végtelen, meghatározott helyeken összesűrűsödő szingularitási struktúrákat mutat. Ahogy ezt a 5.3a. ábra is mutatja, a végtelen horizontú szóróbiliárd leképezés esetén a szingularitások a folyosók határa mentén kialakuló szinguláris fixpontokon torlódhatnak. Ezt a jelenséget a disszertáció 5.3. fejezetében tárgyaljuk részletesebben. A hiperbolicitás és a szingularitások együttes hatása most is az (M, T, μ) dinamikai rendszer erős statisztikus tulajdonságaira vezet: a szóróbiliárd leképezések 2. fejezetben tárgyalt tulajdonságai jellemzően kiterjednek a végesről a végtelen horizont esetére. Konkrétan, a leképezésre most is igaz az exponenciális korrelációlecsengés

⁴Előfordul (lásd pl. [BGS21]), hogy egyetlen biliárd részecske dinamikájára a végtelen szórótest-konfigurációban Lorentz folyamatként hivatkoznak, így fenntartva a Lorentz gáz kifejezést végtelen sok részecske esetére ugyanebben a konfigurációban. Ugyanakkor más cikkek Lorentz gáznak nevezik már a tóruszon definiált, kompakt fázissterű biliárd dinamikát is.

és a standard centrális határeloszlás-tétel *Hölder folytonos függvények* esetére. A véges és a végtelen horizont közti fő különbségek akkor jelentkeznek, ha a modelleket az alábbi két, meghatározó jelentőségű szempontból hasonlítjuk össze.

Elmozdulás és diszkrét elmozdulás függvények. Az egyértelműség kedvéért az alábbiakban a 5.2. ábrán ábrázolt biliárd konfigurációt tekintjük, egyetlen ρ sugarú ütközővel a tóruszon, és ennek fázisterét fogjuk M -mel jelölni. Bevezetjük a következő két, kiemelten fontos megfigyelhető mennyiséget (ezeket illusztrálja a 5.3b. ábra is):

- A $\Delta (= \Delta_\rho) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ elmozdulás függvényt a következőképp definiáljuk. A kihajtogatás módszerét használva egy $x \in M$ fázispontból induló trajektóriát felemelhetünk a tóruszról a síkra (azaz a Lorentz gáz konfigurációjába). Jelölje $Q \in \mathbb{R}^2$ a felemelt trajektória kiindulópontját a síkon, míg $Q_1 \in \mathbb{R}^2$ a trajektória első ütközési pontját a végtelen, periodikus szórótest konfigurációban. Végül legyen $\Delta(x) = Q_1 - Q$, amiről könnyen meggondolható, hogy független a felemeléstől.
- A $\kappa (= \kappa_\rho) : M \rightarrow \mathbb{Z}^2$ függvény a Δ elmozdulás diszkrétizált változata a következő értelemben. Miután felemeltük a trajektóriát, jelölje $K \in \mathbb{Z}^2$ annak a cellának a \mathbb{Z}^2 indexét, amiből a felemelt trajektória kiindul, míg $K_1 \in \mathbb{Z}^2$ jelölje annak a cellának az indexét, ahol az első ütközés bekövetkezik. Ezek után legyen $\kappa = K_1 - K$, amiről ismét megmutatható, hogy független a felemeléstől.

Ezeknek a vektorértékű függvényeknek a szerepe elsősorban a Birkhoff összegekhez, azaz a

$$\Delta_n(x) = \Delta(x) + \Delta(Tx) + \dots + \Delta(T^{n-1}x); \quad \text{és} \quad \kappa_n(x) = \kappa(x) + \kappa(Tx) + \dots + \kappa(T^{n-1}x)$$

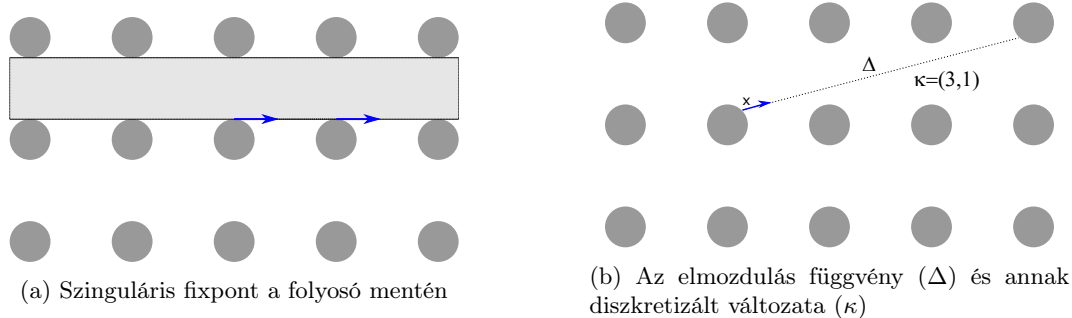
vektorokhoz kapcsolódik. $\Delta_n(x)$ éppen azt mutatja, hogy n iteráció után a periodikus Lorentz gáz részecske hol helyezkedik el a síkon. Ha az x kiinduló fázispontot véletlen módon választjuk a kiinduló szórótesten (konkrétan a μ mérték szerint M -en), akkor Δ_n -t egy mechanikai eredetű \mathbb{R}^2 -n értelmezett véletlen bolyongás pozíciójaként foghatjuk fel. Így tehát sokat megérthetünk ennek a véletlen bolyongásnak a viselkedéséből, ha a Δ függvény (M, T, μ) leképezés szerinti Birkhoff összegeit vizsgáljuk.

Kiemelten hangsúlyozzuk, hogy a végtelen horizont esetén a $\Delta : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény nem korlátos. Így erre NEM alkalmazhatóak az (M, T, μ) leképezésnek a Hölder folytonos függvények erős statisztikus tulajdonságaira vonatkozó eredményei (például a standard centrális határeloszlás-tétel). Valójában a Δ függvény még csak $L^2(\mu)$ -be sem tartozik: a második momentuma végtelen, pontosabban, a levágásával kapott függvények második momentumainak növekedési üteme alapján (a kapcsolódó számolásokról lásd a disszertáció 5.3 fejezetét) azt a következtetést vonhatjuk le, hogy Δ , mint valószínűségi változó a normális eloszlás nem-standard vonzási tartományába tartozik.

Ami a diszkrét elmozdulást, κ -t illeti, ez kohomológ Δ -hoz a következő értelemben. Jelölje $q : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ azt a pontot, ami az $x \in M$ tóruszon, vagyis \mathbb{T}^2 -n definiált fázispontozhoz tartozik (\mathbb{T}^2 -t ezúttal az egységnyi zettal azonosítjuk). Ekkor $q(x)$ korlátos (sőt, valójában sima) függvénye az $x \in M$ pontnak, és fennáll a $\Delta(x) = \kappa(x) + q(Tx) - q(x)$ összefüggés. Ebből adódik, hogy a Birkhoff összegek eltérése $\Delta_n - \kappa_n = q(T^n x) - q(x)$, ami egyenletesen korlátos n -ben. Tehát a Δ_n és a κ_n Birkhoff összegek hasonló aszimptotikus viselkedést mutatnak, és így a véletlen bolyongás tulajdonságait ekvivalens módon κ_n segítségével is vizsgálhatjuk.

Megemlíttük még, hogy a $\Delta : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény NEM folytonos (és természetesen a diszkrétizált változata, κ sem az), mégpedig megszámlálhatóan végtelen sok görbe mentén szakad. Ezeknek a függvényeknek a szingularitásai egybeesnek T fent említett szingularitásaival, és így a 5.3a. ábrán is bemutatott szinguláris fixpontokon torlódnak. Egyúttal ezekben a szinguláris fixpontokban divergál Δ (illetve κ) értéke is.

A biliárd folyam. Bár a fenitek szerint az (M, T, μ) leképezésre a korrelációk exponenciális ütemben csengenek le, a biliárd folyam keverési sebessége már lényegesen lassabb. Szokás szerint az ekvivalens felfüggesztett folyamatot tekintjük a $\tau : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ tetőfüggvényvel, ahol $\tau(x) = |\Delta(x)|$, vagyis a szabad repülési idő épp az elmozdulás vektor hossza. Így tehát τ sem korlátos. A hosszú szabad repülések a stadion biliárd pattogó trajektória szakaszaira emlékeztetnek (ezekről lásd a 3. fejezetet), és így a



5.3. ábra. A biliárd leképezés szinguláris fixpontjai és az elmozdulás függvények

végtelen horizontú biliárd folyamban kialakuló intermittens viselkedés a stadion és az érintő sarokpontú szóróbiliárd leképezésekben már látott intermittens viselkedéshez hasonlít.

A disszertáció 5. fejezetének két fő célja, hogy

- a Δ_n és a κ_n Birkhoff összegekre határeloszlás-tételeket bizonyítson (ezen a módon tanulmányozva az asszociált végtelen horizontú Lorentz gázban fellépő szuperdiffúziót); valamint, hogy
- becsléseket adjon a kapcsolódó biliárd folyam keverési sebességére.

5.2. Eredmények

Korábbi eredmények. A Lorentz gáz a matematikai fizika egy igen népszerű modellje, a kapcsolódó eredmények áttekintése bőven meghaladja a disszertáció kereteit. Az alábbiakban azokra az eredményekre koncentrálunk, amit közvetlenül kapcsolódnak a 5. fejezethez. Ahogy fent is említettük, a tóruszon definiált biliárdhoz tartozó (M, T, μ) leképezésre számos erős statisztikus tulajdonság ismert. A Hölder folytonos függvények korrelációlecsengésére először Chernov adott exponenciális becslést [Che99]-ben, amit aztán más, a disszertáció 5. fejezetében is használt módszerekkel Demers és Zhang is bizonyított [DZ11]-ben.

Az egyértelműség kedvéért mostantól tekintsük a tóruszon egyetlen $\rho < \frac{1}{2}$ sugarú, kör alakú ütközővel definiált végtelen horizontú konfigurációkat. A biliárd leképezésre $T : M \rightarrow M$ mellett a $T_\rho : M \rightarrow M$ jelölést is fogjuk használni, ha hangsúlyozni akarjuk a ρ -tól való függést. A ρ paraméter rögzített értékére, az alábbi *nem-standard határeloszlás-tételt* már Bleher is megfogalmazta sejtésként [Ble92]-ben, matematikailag szigorú bizonyítást pedig Szász és Varjú adott rá [SV07]-ben. Létezik egy Σ_ρ pozitív definit szimmetrikus mátrix, melyre

$$\frac{\Delta_{n,\rho}}{\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma_\rho), \text{ amint } n \rightarrow \infty \quad \text{ahol } \Delta_{n,\rho} = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta(T_\rho^k x). \quad (5.1)$$

Mivel Δ és κ kohomológ függvények (lásd fent), az (5.1) határeloszlás-tétel teljesül a $\kappa_{n,\rho} = \sum_{k=0}^{n-1} \kappa(T_\rho^k x)$ mennyiségre is ugyanúgy, mint $\Delta_{n,\rho}$ -ra. A ρ alsó indexet az alábbiakban jellemzően el fogjuk hagyni, itt azonban fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy ez egy fix $\rho > 0$ értékre vonatkozó eredmény. Fontos azt is megjegyezni, hogy a Σ_ρ kovariancia-mátrixra van explicit képlet. Jelölje

$$X = X_\rho = \left\{ x = (r, \varphi) \in M \mid \varphi = \pm \frac{\pi}{2}, T_\rho x = x \right\}$$

a fent már említett és a 5.3a. ábrán is szemléltetett szinguláris fixpontok halmazát. Idézzük fel továbbá, hogy $\kappa(x)$ a diszkrét elmozdulás függvényt jelöli. Minden egyes $x \in X_\rho$ pont meghatároz egy a $\kappa(x)$

vektorral párhuzamos folyosót. Jelölje $d(\kappa(x))$ ennek a folyosónak a szélességét. Ekkor

$$\Sigma_\rho = \frac{1}{8\rho\pi} \sum_{x \in X_\rho} \frac{d^2(\kappa(x))}{|\kappa(x)|} \cdot \kappa(x) \otimes \kappa(x). \quad (5.2)$$

A disszertáció 5. fejezetének egyik fő célja, hogy a $\rho \rightarrow 0$ aszimptotika mellett vizsgálja a Lorentz gáz viselkedését, így kiemelt jelentőségű a következő összefüggés.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho^2 \Sigma_\rho) = \Sigma, \quad \text{ahol} \quad \Sigma = \frac{1}{4\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

A Σ_ρ -ra és Σ -ra vonatkozó fenti képleteket a disszertáció 5.3. fejezetében tárgyaljuk részletesebben. A disszertáció eredményeivel, különösen a I. Tétellel való összehasonlíthatóság kedvéért kimondjuk (5.1), (5.2) és (5.3) alábbi közvetlen következményét:

$$\frac{\kappa_{n,\rho}}{\rho^{-1}\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad \text{amint először } n \rightarrow \infty \text{ majd } \rho \rightarrow 0. \quad (5.4)$$

Megemlítjük még, hogy [SV07] a következő lokális határeloszlás-tételt is bizonyítja:

$$\text{Rögzített } \rho \in (0, 1/2), \text{ mellett } (n \log n) \mu(\kappa_{n,\rho} = 0) \rightarrow \phi_{\Sigma_\rho}(0) \text{ amint } n \rightarrow \infty,$$

ahol ϕ_{Σ_ρ} az (5.1)-ben szereplő Σ_ρ kovarianciamátrixú kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Ebből a lokális tételből vezette le Szász és Varjú [SV07]-ban a kapcsolódó síkbeli Lorentz folyamat rekurrenciáját. Megjegyezzük még, hogy [SV07] módszerei spektrális jellegűek és sok tekintetben építenek a disszertáció 3. fejezetének gerincét képező [BG06] cikkben kidolgozott technikákra.

Később az (5.1) határeloszlás-tételt Chernov és Dolgopyat újra bebizonyította [DC09]-ben egy másik módszerrel. Ez a karakterisztikus függvény közvetlen becslésén alapul, ahhoz hasonlóan, ahogy a disszertáció 4. fejezetének bizonyításai az érintő sarokpontú szóróbiliárd esetében. (5.1)-n túl, a [DC09] dolgozatban a szerzők a mi E. Tételünkhöz hasonló gyenge invarianciaelvet (más szóval funkcionális határeloszlás-tételt) is bizonyítottak Δ_n -re. Megemlítünk még egy további érdekes kutatási irányt: a Lorentz gáz dinamikája úgy is felfogható, mint az (M, T, μ) biliárd leképezés \mathbb{Z}^2 -kiterjesztése a $\kappa : M \rightarrow \mathbb{Z}^2$ függvénnyel. Ehhez tekintsük a következőket:

$$\tilde{M} = M \times \mathbb{Z}^2; \quad \tilde{T} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}; \quad \tilde{T}(x, m) = (Tx, m + \kappa(x)) \text{ ahol } x \in M, m \in \mathbb{Z}^2.$$

\tilde{T} -ra invariáns a $\tilde{\mu} = \mu \times \ell_{\mathbb{Z}^2}$ σ -véges mérték, ahol $\ell_{\mathbb{Z}^2}$ a számláló mértéket jelöli \mathbb{Z}^2 -n. Néhány újabb dolgozat, pl. [P19], [PT21] és [MPT22], ennek a $(\tilde{M}, \tilde{T}, \tilde{\mu})$ \mathbb{Z}^2 kiterjesztésnek a keverési tulajdonságait vizsgálja.

A Boltzmann-Grad limesz. Egy igen jelentős kutatási programot dolgozott ki Marklof és Strömbergsson többek között a [MS11a, MS11b] cikkekben, amely a periodikus Lorentz gáz dinamikáját egy másik szempontból, a Boltzmann-Grad határesetben tanulmányozza. Ez alatt azt értjük, hogy a szórótestek méretével nullához tartunk, tehát $\rho \rightarrow 0$, míg az elmozdulást a síkon az átskálázott $T = \rho t$ időfüggvényében tekintjük (így konstans értéken tartva az átlagos szabad úthosszt, vagyis a szabad repülési idő várható értékét). Konkrétan a [MS11a] dolgozatban a szerzők bebizonyítják, hogy ebben a Boltzmann-Grad limeszben, minden véges időintervallumon, a részecske síkon való helyzete egy explicit módon megadható konkrét Markov folyamathoz konvergál. Ezt követően Marklof és Tóth vizsgálta a [MT16] cikkben ennek a Markov folyamatnak a hosszú idejű aszimptotikáját, és kapott határeloszlás-tételt és gyenge invariancia elvet a nem-standard $\sqrt{T \log T}$ skálázás mellett.

A fenti, Boltzmann-Grad limeszre vonatkozó eredmények magasabb dimenzióra is ismertek, szemben a fix szórótest méretre (vagyis ρ -ra) vonatkozó, csak a $d = 2$ esetben ismert eredményekkel. További részletekről lásd az eredeti referenciákat. A disszertáció eredményei szempontjából leginkább releváns, hogy a [MT16, Theorem 1.1] és [MT16, Theorem 1.3] tételek visszavezethetőek egy a diszkrét idejű

leképezésre vonatkozó eredményre. Ez utóbbit úgy is megfogalmazhatjuk, mint egy a $\kappa_{n,\rho}$ viselkedéséről szóló határeloszlás-tételt, abban a limeszben, amikor először $\rho \rightarrow 0$, majd $n \rightarrow \infty$. Konkrétan a [MT16, Theorem 1.2] a $d = 2$ esetre azt mondja ki, hogy:

$$\frac{\kappa_{n,\rho}}{\rho^{-1}\sqrt{n \log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad \text{amint előbb } \rho \rightarrow 0 \text{ majd } n \rightarrow \infty, \quad (5.5)$$

ahol $\kappa_{n,\rho}$ és Σ ugyanazt jelöli, mint (5.4)-ben.⁵

Határeloszlás-tételek a $\rho \rightarrow 0$ és $n \rightarrow \infty$ együttes skálázás mellett. Az (5.4) és (5.5) határeloszlás-tételek kapcsán Marklof és Tóth már [MT16]-ban megfogalmazta a következő kérdést: mit lehet mondani a $\rho \rightarrow 0$ és $n \rightarrow \infty$ együttes skálázása mellett fellépő határviselkedésről? Az alábbi I. Tétel, a [BBT23] cikkből, ebbe az irányba tesz egy lépést.

I. Tétel. *Tekintsük a Σ mátrixot az (5.3) Formula szerint, és legyen*

$$b_{n,\rho} = \frac{\sqrt{n \log(n/\rho^2)}}{\rho}.$$

Ekkor van egy olyan $M(\rho)$ függvény, melyre $M(\rho) \rightarrow \infty$ amint $\rho \rightarrow 0$, hogy

$$\frac{\kappa_{n,\rho}}{b_{n,\rho}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad \text{amennyiben } n \rightarrow \infty \text{ és } \rho \rightarrow 0 \text{ úgy, hogy } M(\rho) = o(\log n).$$

Az $M(\rho)$ függvény alakjáról lásd a disszertáció 5.3 fejezetét, itt most csak annyit említünk meg, hogy ez a mennyiség függ attól, hogy a Hölder folytonos függvények (az (M, T_ρ, μ) biliárd leképezésre vett) korrelációinak lecsengési üteme hogyan viselkedik a $\rho \rightarrow 0$ határesetben. Ahogy fent említettük

$$\left| \int_M \psi_1 \cdot \psi_2 \circ T_\rho^n d\mu \right| \leq C_\rho(\psi_1, \psi_2) \cdot \hat{\theta}_\rho^n \quad \text{minden } n \geq 0 \text{ esetén,} \quad (5.6)$$

ahol $\psi_1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ és $\psi_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hölder folytonos, centrált függvények, és a $\hat{\theta}_\rho < 1$ ráta függ ezen függvények Hölder exponenseitől, a $C_\rho = C_\rho(\psi_1, \psi_2) > 0$ együttható a Hölder normáiktól, továbbá $\hat{\theta}_\rho$ és C_ρ is függ a ρ -tól (vagyis a biliárd tartománytól). Lényegében a C_ρ és $\hat{\theta}_\rho$ konstansok határozzák meg $M(\rho)$ -t a I. Tételben. Teszünk még két további fontos megjegyzést a korrelációlecsengés sebességével kapcsolatban.

- Ismételten hangsúlyozzuk, hogy a κ_ρ nem korlátos, így erre a függvényre az (5.6) becslés közvetlenül nem alkalmazható. Így, még rögzített ρ mellett is, κ_ρ autokorrelációit külön meg kell vizsgálni, hasonlóan a disszertáció 4.10 Lemmájához, amely az érintő sarokpont esetére vizsgálja az analóg kérdést. A κ_ρ -ra vonatkozó keverési sebesség becsléseket a disszertáció 5.3 fejezetében tárgyaljuk részletesen.
- Az (5.6) típusú korrelációlecsengés becslésekre az irodalomban több hatékony módszert is kifejeztek – így például alkalmas transzfer operátor kvázikompaktságának bizonyítása Young tornyokon ([You98]) vagy anizotróp Banach terekben ([DZ11]), standard párok csatolása ([CM06, Chapter 7]) vagy a legújabban, a Birkhoff kúpok technikája ([DL23]). Ugyanakkor, minden ismert módszernek van egy nemkonstruktív, kompaktsági érvelésen alapuló összetevője, ami az elsődleges oka annak, hogy nem áll rendelkezésre semmi explicit információ arról, hogyan függ a lecsengés üteme (azaz a C_ρ és a $\hat{\theta}_\rho$ mennyiség) ρ -tól. Például a kvázikompaktranszfer operátorok nyelvén ez annak felel meg, hogy ugyan a lényeges spektrálsugárra vannak effektív becslések, a spektrális résre már nincsenek. Ez az elsődleges oka, hogy miért nem ismert az $M(\rho)$ mennyiség ρ -függése a I. tételben.

⁵ Valójában [MT16, Theorem 1.2] ezt az állítást nem κ -ra, hanem Δ -ra mondja ki, de ahogy fent említettük, ezek kohomológ függvények.

Fontos még megjegyezni, hogy az $M(\rho) = o(\log n)$ feltétel mellett

$$\frac{b_{n,\rho}}{(\rho)^{-1}\sqrt{n \log n}} \rightarrow 1,$$

amiből látszik, hogy az I. Tétel valóban közvetlen megfeleltethető az (5.4) és az (5.5) határeloszlás-tételeknek is.

Megjegyzések a random Lorentz gázról. Megemlítjük még Lutsko és Tóth eredményét a [LT20] cikkből, amely, hasonlóan a fentiekhez, együttesen vizsgálja az idő végtelenhez és a szórótestméret 0-hoz tartó aszimptotikáját egy másik modellben, a $d = 3$ dimenziós random Lorentz gázban. Ugyanakkor a [LT20]-ben és a mi I. Tételünkben tárgyalt esetek több szempontból is jelentősen eltérnek egymástól. Ahogy fent már említettük, a random Lorentz gázban, ahol a szórótestek elhelyezkedése is véletlenszerű, majdnem biztosan véges a horizont, amiből diffúzív viselkedés következik, ellentétben a mi esetünkben fellépő szuperdiffúzióval. Továbbá, Lutsko és Tóth bizonyításának kiindulópontja a random Lorentz gáz Boltzmann Grad határeset, ennek megfelelően [LT20] olyan eseteket tud kezelni, amikor az idő *kellően lassan* tart végtelenhez, ahhoz képest, ahogy a szórótest méret 0-hoz tart. Ezzel szemben, a mi kiindulópontunk a rögzített szórótestméret mellett kapott szuperdiffúzív határviselkedés a végtelen horizontú periodikus Lorentz gázban, ennek megfelelően olyan eseteket tudunk kezelni, amikor az idő *kellően gyorsan* tart végtelenhez, ahhoz képest, ahogy a szórótest méret 0-hoz tart.

Felső becslések a biliárd folyam keverési sebességére. A I. Tétel mellett a 5. fejezet másik fontos eredménye, az alább kimondott J. Tétel, a *folyam* korrelációlecsengésére vonatkozik olyan szóróbiliárdokban, melyek végtelen horizontú Lorentz gázokat generálnak. Ezeket a más tárgyalt módon tekinthetjük úgy, mint $(M^\tau, \Phi^t, \mu^\tau)$ felfüggesztett folyamatokat, ahol a bázisleképezés az (M, T, μ) biliárd leképezés, ezúttal azonban a τ tetőfüggvény nem korlátos. Hangsúlyozzuk, hogy az lent kimondott J. Tételben a \mathbb{T}^2 tóruszon definiált biliárd modellt tekintjük, és hogy az eredmény fennáll tetszőleges végtelen horizontú szóróbiliárd konfigurációra, nem csupán a fent tárgyalt esetre egyetlen kör alakú ütközővel. A τ tetőfüggvény eloszlásának farokviselkedése alapján már a [FM88] cikkben megfogalmazódott az a sejtés, hogy folytonos időben a korrelációlecsengés üteme $O(t^{-1})$.

Megjegyezzük, hogy különböző biliárd *leképezések* esetére, a J. Tétellel összevethető $O(n^{-1})$ korrelációlecsengési becslést már a [Mar04], [CZ05] és [CZ08] cikkekben is bizonyítottak különböző példákra, így például síkbeli féligszóró-biliárd leképezésekre. Ilyeneket kapunk például akkor, ha a tórusz helyett a négyzetre helyezzük el egyetlen, *kellően kicsi*, kör alakú szórótestet. Ugyanakkor, ahogy azt már a 2 fejezetben is említettük, a korrelációlecsengés sebességének becslése folytonos időben lényeges új kihívásokat jelent a diszkrét idejű becslésekhez képest. Ennek érzékeltetésére idézzük fel, hogy véges horizontú szóróbiliárdok esetén az exponenciális korrelációlecsengést a leképezésre Young bizonyította [You98]-ben, míg a folyamra csak jóval később Baladi Demers és Liverani [BDL18]-ben. A végtelen horizontú esetben, ahogy azt fent említettük, Hölder folytonos függvényekre a lecsengés sebessége exponenciális, így az igazán releváns feladat az, hogy minél pontosabb becslést adjunk a folyam keverési sebességére. A [BBM19] cikk nyomán megfogalmazott J. Tételben igazoljuk az erre vonatkozó régóta nyitott sejtést (ahogy fent írtuk, ez már [FM88]-ban megfogalmazódott). A eredmény kimondásához szükségünk lesz a folyamirány menti simaság fogalmára és az ehhez kapcsolódó jelölésekre a 3.4. Definícióból.

J. Tétel. *Tekintsük egy $(M^\tau, \Phi^t, \mu^\tau)$ síkbeli, végtelen horizontú szóróbiliárd folyamatot, és tegyük fel, hogy a $v : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ és a $w : M^\tau \rightarrow \mathbb{R}$ függvények simák a folyam irányában. Ekkor $\text{Corr}(v, w; t) \ll \frac{1}{t}$.*

Ennél valamivel enyhébb feltételek mellett is teljesül a tétel állítása: elég megkövetelni, hogy a két függvény közül csak az egyik, mondjuk v legyen sima a folyam irányában, w pedig Hölder folytonos. Továbbá, az is elég, ha $v \in C^{m,\eta}(M)$ valamilyen $\eta \in (0,1]$ -ra és egy rögzített $m \geq 1$ egész számra. m -t elvileg lehetne nehézségek árán becsülni, de minden bizonnyal igen nagy értéket kapnánk. Megemlítjük még, hogy a J. Tétel számos korábbi, folytonos idejű dinamikák keverési sebességére vonatkozó eredményre is épít. Ezekről a disszertáció 5.3 fejezetében adunk rövid áttekintést, a további részletekkel kapcsolatban pedig a [BBM19] és a [Mel18] cikkekre hivatkozunk.

Hivatkozások

- [BBM19] Péter Bálint, Oliver Butterley, and Ian Melbourne. Polynomial decay of correlations for flows, including Lorentz gas examples. *Comm. Math. Phys.*, 368(1):55–111, 2019.
- [BBT23] Péter Bálint, Henk Bruin, and Dalia Terhesiu. Periodic Lorentz gas with small scatterers. *Probability Theory and Related Fields*, Mar 2023.
- [BCD11] P. Bálint, N. Chernov, and D. Dolgopyat. Limit theorems for dispersing billiards with cusps. *Comm. Math. Phys.*, 308(2):479–510, 2011.
- [BCD17] P. Bálint, N. Chernov, and D. Dolgopyat. Convergence of moments for dispersing billiards with cusps. *Contemp. Math.*, 698:35–67, 2017.
- [BDL18] Viviane Baladi, Mark F. Demers, and Carlangelo Liverani. Exponential decay of correlations for finite horizon Sinai billiard flows. *Invent. Math.*, 211(1):39–177, 2018.
- [BG06] Péter Bálint and Sébastien Gouëzel. Limit theorems in the stadium billiard. *Comm. Math. Phys.*, 263(2):461–512, 2006.
- [BGS21] Péter Bálint, Thomas Gilbert, and Szász, Domokos and Tóth, Imre Péter. What mathematical billiards teach us about statistical physics? *Pure Appl. Funct. Anal.*, 6(1):1–35, 2021.
- [Ble92] P. M. Bleher. Statistical properties of two-dimensional periodic Lorentz gas with infinite horizon. *J. Statist. Phys.*, 66(1-2):315–373, 1992.
- [BM08] Péter Bálint and Ian Melbourne. Decay of correlations and invariance principles for dispersing billiards with cusps, and related planar billiard flows. *J. Stat. Phys.*, 133(3):435–447, 2008.
- [BMT21] Henk Bruin, Ian Melbourne, and Dalia Terhesiu. Sharp polynomial bounds on decay of correlations for multidimensional nonuniformly hyperbolic systems and billiards. *Ann. H. Lebesgue*, 4:407–451, 2021.
- [BS81] L. A. Bunimovich and Ya. G. Sinaĭ. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers. *Comm. Math. Phys.*, 78(4):479–497, 1980/81.
- [BT08] Péter Bálint and Imre Péter Tóth. Exponential decay of correlations in multi-dimensional dispersing billiards. *Ann. Henri Poincaré*, 9(7):1309–1369, 2008.
- [BT12] Péter Bálint and Imre Péter Tóth. Example for exponential growth of complexity in a finite horizon multi-dimensional dispersing billiard. *Nonlinearity*, 25(5):1275–1297, 2012.
- [Bun79] L. A. Bunimovich. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Comm. Math. Phys.*, 65(3):295–312, 1979.
- [Bun90] L. A. Bunimovich. A theorem on ergodicity of two-dimensional hyperbolic billiards. *Comm. Math. Phys.*, 130(3):599–621, 1990.
- [CD09] N. Chernov and D. Dolgopyat. Brownian Brownian motion. I. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 198(927):viii+193, 2009.
- [CEF08] M Courbage, M Edelman, and Fathi, SM Saberi and Zaslavsky, GM. Problem of transport in billiards with infinite horizon. *Physical Review E*, 77(3):036203, 2008.
- [CH96] N. I. Chernov and C. Haskell. Nonuniformly hyperbolic K -systems are Bernoulli. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16(1):19–44, 1996.

- [Che98] N. I. Chernov. Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2):269–324, 1998.
- [Che99] N. Chernov. Decay of correlations and dispersing billiards. *J. Statist. Phys.*, 94(3-4):513–556, 1999.
- [Che07] N. Chernov. A stretched exponential bound on time correlations for billiard flows. *J. Stat. Phys.*, 127(1):21–50, 2007.
- [CM06] Nikolai Chernov and Roberto Markarian. *Chaotic billiards*, volume 127 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [CM07] N. Chernov and R. Markarian. Dispersing billiards with cusps: slow decay of correlations. *Comm. Math. Phys.*, 270(3):727–758, 2007.
- [CZ05] N. Chernov and H.-K. Zhang. Billiards with polynomial mixing rates. *Nonlinearity*, 18(4):1527–1553, 2005.
- [CZ08] N. Chernov and H.-K. Zhang. Improved estimates for correlations in billiards. *Comm. Math. Phys.*, 277(2):305–321, 2008.
- [DC09] D. I. Dolgopyat and N. I. Chernov. Anomalous current in periodic Lorentz gases with an infinite horizon. *Uspekhi Mat. Nauk*, 64(4(388)):73–124, 2009.
- [Det12] Carl P. Dettmann. New horizons in multidimensional diffusion: the Lorentz gas and the Riemann hypothesis. *J. Stat. Phys.*, 146(1):181–204, 2012.
- [DL23] Mark F. Demers and Carlangelo Liverani. Projective cones for sequential dispersing billiards. *Communications in Mathematical Physics*, Feb 2023.
- [Dol98a] Dmitry Dolgopyat. On decay of correlations in Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 147(2):357–390, 1998.
- [Dol98b] Dmitry Dolgopyat. Prevalence of rapid mixing in hyperbolic flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(5):1097–1114, 1998.
- [DST14] Jacopo De Simoi and Imre Péter Tóth. An expansion estimate for dispersing planar billiards with corner points. *Annales Henri Poincaré*, 15(6):1223–1243, 2014.
- [Dur10] Rick Durrett. *Probability: theory and examples*, volume 31 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, 2010.
- [DZ11] Mark F. Demers and Hong-Kun Zhang. Spectral analysis of the transfer operator for the Lorentz gas. *J. Mod. Dyn.*, 5(4):665–709, 2011.
- [DZ14] Mark F. Demers and Hong-Kun Zhang. Spectral analysis of hyperbolic systems with singularities. *Nonlinearity*, 27(3):379–433, 2014.
- [Fel57] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications, Volume II*. Wiley New York, 2nd ed. edition, 1957.
- [FM88] B. Friedman and R. F. Martin, Jr. Behavior of the velocity autocorrelation function for the periodic Lorentz gas. *Phys. D*, 30(1-2):219–227, 1988.
- [GM14] Sébastien Gouëzel and Ian Melbourne. Moment bounds and concentration inequalities for slowly mixing dynamical systems. *Electron. J. Probab.*, 19:no. 93, 30, 2014.

- [Gou10] Sébastien Gouëzel. Almost sure invariance principle for dynamical systems by spectral methods. *Ann. Probab.*, 38(4):1639–1671, 2010.
- [JMP21] Paul Jung, Ian Melbourne, and Pène, Françoise and Varandas, Paulo and Zhang, Hong-Kun. Necessary and sufficient condition for \mathcal{M}_2 -convergence to a Lévy process for billiards with cusps at flat points. *Stoch. Dyn.*, 21(5):Paper No. 2150024, 8, 2021.
- [JPZ20] Paul Jung, Françoise Pène, and Hong-Kun Zhang. Convergence to α -stable Lévy motion for chaotic billiards with several cusps at flat points. *Nonlinearity*, 33(2):807–839, 2020.
- [JZ18] Paul Jung and Hong-Kun Zhang. Stable laws for chaotic billiards with cusps at flat points. *Ann. Henri Poincaré*, 19(12):3815–3853, 2018.
- [Kor18] Alexey Korepanov. Rates in almost sure invariance principle for dynamical systems with some hyperbolicity. *Comm. Math. Phys.*, 363(1):173–190, 2018.
- [Liv04] Carlangelo Liverani. On contact Anosov flows. *Ann. of Math. (2)*, 159(3):1275–1312, 2004.
- [Lor05] H. A. Lorentz. The motion of electrons in metallic bodies. *Proc. Amsterdam Acad.*, 7:438–453, 1905.
- [LSV99] Carlangelo Liverani, Benoît Saussol, and Sandro Vaienti. A probabilistic approach to intermittency. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(3):671–685, 1999.
- [LT20] Christopher Lutsko and Bálint Tóth. Invariance principle for the random Lorentz gas—beyond the Boltzmann-Grad limit. *Comm. Math. Phys.*, 379(2):589–632, 2020.
- [Mac83] Jonathan Machta. Power law decay of correlations in a billiard problem. *J. Statist. Phys.*, 32(3):555–564, 1983.
- [Mar04] Roberto Markarian. Billiards with polynomial decay of correlations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(1):177–197, 2004.
- [Mel07] Ian Melbourne. Rapid decay of correlations for nonuniformly hyperbolic flows. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(5):2421–2441, 2007.
- [Mel18] Ian Melbourne. Superpolynomial and polynomial mixing for semiflows and flows. *Nonlinearity*, 31(10):R268–R316, 2018.
- [MN05] Ian Melbourne and Matthew Nicol. Almost sure invariance principle for nonuniformly hyperbolic systems. *Comm. Math. Phys.*, 260(1):131–146, 2005.
- [MN09] Ian Melbourne and Matthew Nicol. A vector-valued almost sure invariance principle for hyperbolic dynamical systems. *Ann. Probab.*, 37(2):478–505, 2009.
- [MPT22] Ian Melbourne, Françoise Pène, and Dalia Terhesiu. Local large deviations for periodic infinite horizon Lorentz gases. *Journal d’Analyse Mathématique*, to appear, 2022.
- [MS11a] Jens Marklof and Andreas Strömbergsson. The Boltzmann-Grad limit of the periodic Lorentz gas. *Ann. of Math. (2)*, 174(1):225–298, 2011.
- [MS11b] Jens Marklof and Andreas Strömbergsson. The periodic Lorentz gas in the Boltzmann-Grad limit: asymptotic estimates. *Geom. Funct. Anal.*, 21(3):560–647, 2011.
- [MT12] Ian Melbourne and Andrei Török. Convergence of moments for axiom A and non-uniformly hyperbolic flows. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 32(3):1091–1100, 2012.

- [MT16] Jens Marklof and Bálint Tóth. Superdiffusion in the periodic Lorentz gas. *Comm. Math. Phys.*, 347(3):933–981, 2016.
- [MV20] Ian Melbourne and Paulo Varandas. Convergence to a Lévy process in the Skorohod \mathcal{M}_1 and \mathcal{M}_2 topologies for nonuniformly hyperbolic systems, including billiards with cusps. *Comm. Math. Phys.*, 375(1):653–678, 2020.
- [P19] Françoise Pène. Mixing and decorrelation in infinite measure: the case of the periodic Sinai billiard. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 55(1):378–411, 2019.
- [Pet83] Karl E. Petersen. *Ergodic Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1983.
- [PS75] Walter Philipp and William Stout. Almost sure invariance principles for partial sums of weakly dependent random variables. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 2(161,, 161):iv+140, 1975.
- [PT21] Françoise Pène and Dalia Terhesiu. Sharp error term in local limit theorems and mixing for Lorentz gases with infinite horizon. *Comm. Math. Phys.*, 382(3):1625–1689, 2021.
- [Sin70] Ja. G. Sinaĭ. Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards. *Uspehi Mat. Nauk*, 25(2 (152)):141–192, 1970.
- [SV07] Domokos Szász and Tamás Varjú. Limit laws and recurrence for the planar Lorentz process with infinite horizon. *J. Stat. Phys.*, 129(1):59–80, 2007.
- [Ř95] Jan Řeháček. On the ergodicity of dispersing billiards. *Random Comput. Dynam.*, 3(1-2):35–55, 1995.
- [You98] Lai-Sang Young. Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity. *Ann. of Math. (2)*, 147(3):585–650, 1998.