Bírálat BÁLINT PÉTER
Statistical properties of some non-uniformly hyperbolic billiards
című MTA doktori disszertációjáról

A dolgozat 5 fejezetből áll, összesen 86 oldal. Az első két bevezető fejezet után a 3., 4., és 5. fejezetekben a szerző társszerzőkkel közös eredményei szerepelnek. A dolgozatot terjedelmes irodalomjegyzék zárja.

Az 1. fejezet rövid általános bevezetést nyújt az ergodelmélet és dinamikus rendszerek elméletébe. A szerző néhány motiváló példán keresztül megmutatja az olvasónak, hogy milyen típusú kérdéseket vizsgál a dolgozatban, és milyen eredmények várhatóak. Érdekesnek tartom, hogy a bevezető példánál rögtön megjelenik egy nem normális stabilis eloszláshoz való határeloszlás-tétel, ugyanakkor az egész dolgozatban nem normális határeloszlás-tételről egyetlen megjegyzés szerepel a 4. fejezetben.

A 2. fejezet még mindig bevezető fejezet, de már konkrétan a szóróbiliárdokkal foglalkozik. Itt talán lehetett volna általánosabban a biliárdok elméletét bevezetni, nem csak a szóróbiliárdokra koncentrálni. Különösen azért, mert a 3. fejezet nem szóróbiliárdokkal foglalkozik, így a 2. fejezetben bevezetett jelölések jelentős része csak a 4. és 5. fejezetekben kerülnek elő.

A dolgozat lényegi része a 3., 4. és 5. fejezet, melyben a saját eredmények szerepelnek. A szerző nagyon jól vezeti fel az eredményeket, nemcsak a szűk téma szakértői számára, hanem az általános valószínűségelmélettel felvértezett olvasó számára is érthető módon. Külön tetszik, ahogy a szerző át tudja adni a bizonyítások fő gondolatait, ötleteit, míg a technikai részletek a jótékony homályba vesznek, ezeket az eredeti cikkekben találjuk.

A 3. fejezetben két félkör és két egyenes szakasz által határolt stadion alakú tartományban vizsgálja a biliárdfolyamatot a szerző. Az ilyen folyamatokat Bunimovich vezette be 1979-ben, és ő igazolta a biliárd leképezés ergodikus és hiperbolikus voltát. A folyamatot egyszerűsége és érdekes tulajdonságai miatt sokan vizsgálták.

A fejezet fő eredménye az A. Tétel a Birkhoff-részletösszegekre vonatkozó centrális határeloszlás-tétel, melyben a skálázott részletösszegek normális eloszláshoz konvergálnak, és a skálázás a hagyományos $\sqrt{n}$ helyett $\sqrt{n \log n}$-es.

(K1) Mennyiben függ a folyamat a stadion alakjától? Elképzelhető-e olyan stadion, melynél a határeloszlás nem normális, stabilis eloszlás? Ilyen irányú friss eredményeket említ a szerző a 4. fejezetben érintő ütközők esetén.

A B. Tétel azt az esetet vizsgálja, amikor az f függvény stadion párhuzamos oldalai mentén vett integrálja 0. Ekkor a CHT a szokásos $\sqrt{n}$-es skálázással teljesül. A C. Tétel egy frissebb, 2019-es eredmény, mely a biliárdfolyam korrelációlecsengésésre ad felső becslést.

Az A. Tétel bizonyítása visszatérési idők eloszlásfüggvényének farkának aszimptotikus viselkedésén alapul. Ezek a visszatérési idők akkor nagyok, ha a biliárdgolyó sokat pattog a stadion párhuzamos falai között, a falakra közel merőlegesen. A pattogás a golyó pályájának kiszámítható reguláris része, majd a stadion félkör részeihez érve a pálya kaotikussá válik. Ezt a váltakozást hívja a szerző *intermittens viselkedésnek*. Világos, hogy ez nem pontos definíció, inkább valamiféle intuitív jelentés, viszont a fogalmat más szerzők máshogy értik. Khoshnevisan *Analyis of Stochastic Partial Differential Equations* című monográfiájában (7. fejezet, 7.1. Definíció) azt mondja, hogy egy nemnegatív X_t folyamat akkor intermittens, ha $\gamma(k)/k$ függvény szigorúan növő $[2,\infty)$ intervallumon, ahol γ a Ljapunov-exponens,

$$\gamma(k) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathrm{E}(X_t^k).$$

Ugyanitt azt is mondja, hogy a definíció többé-kevésbe egységes. Taqqu és társszerzői (pl. Grahovac, Leonenko, Taqqu, *Intermittency and infinite variance: the case of integrated supOU processes*, EJP, 2021) munkáiban az intermittencia a momentumok növekedésével definiált. Mindkét esetben az intermittens viselkedés intuitíven azt jelenti, hogy a folyamat tipikusan kicsi, de kis halmazon nagyon nagy értékeket vesz fel. Ezzel kapcsolatban a következő a kérdésem:

(K2) Van-e ezeknek az intermittencia fogalmaknak köze a dinamikus rendszereknél használt intermittenciához?

A 4. fejezet témája szóróbiliárdok érintő ütközőkkel. Itt a hagyományos szóróbiliárdoktól eltérően nincs feltéve, hogy az ütközők diszjunktak, megengedjük, hogy a határok egyetlen közös pontban tangenciálisan metsszék egymást. Ez azt eredményezi, hogy a biliárdgolyó beszorulhat két ütköző közé, az érintési pont kis környezetébe. A fő eredmények a részletösszegekre vonatkozó centrális határeloszlás-tétel és funkcionális centrális határeloszlástétel (D. és E. Tétel), ahol a limesz normális eloszlás, és a skálázás pedig $\sqrt{n \log n}$-es. Az F. Tétel a $D_f = 0$ esetet tárgyalja, ekkor a normálás $\sqrt{n}$-es. A bizonyítások a visszatérési idők eloszlásának finom analízisén alapszanak.

Az eredményekkel kapcsolatban két kérdésem merült fel.

(K3) A (4.1) formulában definiált D_f mennyiségnek, pontosabban D_f nem 0 voltának, van-e a 2. fejezetben szereplő I mennyiséghez hasonló, egyszerű szemléletes jelentése?

(K4) Mi az oka, hogy az E. Tétel az egyetlen funkcionális határeloszlás-tétel a dolgozatban?

A G. Tétel szuperpolinomiális korrelációlecsengést és majdnem biztos invarianciatételt állít a biliárdfolyamra. A H. Tételben a szerző a részletösszegek második momentumának konvergenciáját igazolja a határeloszlás második momentumának kétszereséhez. Ezt, az ún. kétszerezési effektust számos dinamikai rendszerre megmutatták.

Az 5. fejezetben a szerző a végtelen horizontú Lorentz-gázra vonatkozó eredményeit foglalja össze. Ez olyan végtelen konfigurációt jelent, melyben a tóruszon tekintünk szóróbiliárdot ahol az ütköző $\rho < 1/2$ sugarú kör. A végtelen horizont azt jelenti, hogy a szabad repülés hossza nem korlátos. Ez egy sokat vizsgált modell az irodalomban. Ismertek korrelációbecslések, és a részletösszegekre vonatkozó CHT. A szerző azt az esetet vizsgálja, amikor az ütközők mérete 0-hoz tart, $\rho \to 0$. Ez a modell a Boltzmann–Grad-limesz, melyet Marklof és Strömbergsson dolgoztak ki. A fejezet fő eredménye az I. Tétel a részletösszegekre vonatkozó CHT, melyben $n \to \infty$ és $\rho \to 0$ egyszerre, bizonyos növekedési feltétel mellett (tehát nem iterált limeszt veszünk). Marklof és Tóth eredménye szerint az iterált limeszek ($\rho \to 0$, majd $n \to \infty$) léteznek, és ugyanaz a határeloszlás, mint az I. tételben. Ezzel kapcsolatban a következő a kérdésem:

(K5) Elképzelhető-e más határeloszlás ha $n \to \infty$ és $\rho \to 0$ együttesen, de az I. Tételben szereplő növekedési feltétel nem teljesül.

Végül a J. Tétel a biliárdfolyam korrelációlecsengésére ad felső becslést.

A doktori disszertáció tézisei a szerző hat, társszerzőkkel közös dolgozatán alapulnak. Ezen cikkek a téma vezető lapjaiban jelentek meg, három a *Communications in Mathematical Physics* lapban, egy a *Probability Theory* *and Related Fields* lapban. Ezen cikkek tudományos hatása is kiemelkedő, ezekre sok hivatkozás érkezett, valamint számos cikk használja a kidolgozott technikákat, általánosítja az eredményeket.

A dolgozat formailag is megfelelő. A szerző egységesíti a cikkekben használt jelöléseket. Külön hangsúlyt helyez a bizonyítások és a főbb ötletek intuitív magyarázatára. A dolgozatban kevés apró elírást találtam.

A fentiek alapján világos, hogy Bálint Péter jelentős eredményekkel gazdagította a dinamikus rendszerek, azon belül a biliárdok elméletét. A doktori munka tudományos eredményeit messzemenően elegendőnek tartom az MTA doktori cím megszerzéséhez. A disszertáció téziseit új tudományos eredményeknek fogadom el. *A nyilvános védés kitűzését, majd, sikeres védés esetén, Bálint Péter számára az MTA doktora cím odaítélését határozottan javasolom.*

Szeged, 2024. április 5.

....

Dr. Kevei Péter
tanszékvezető egyetemi docens
SZTE TTIK Sztochasztika Tanszék