Válasz Kevei Péter bírálatára

Köszönöm Kevei Péter alapos bírálatát, elismerő szavait és támogatását az MTA doktori eljárásommal kapcsolatosan. Külön köszönöm hasznos észrevételeit és érdekes kérdéseit, amelyekre az alábbiakban válaszolok.

(K1) Mennyiben függ a folyamat a stadion alakjától? Elképzelhető-e olyan stadion, melynél a határeloszlás nem normális, stabilis eloszlás? Ilyen irányú friss eredményeket említ a szerző a 4. fejezetben érintő ütközők esetén.

Válasz: Nagyon érdekes kérdés általában konvex bilárdokban, hogyan függ a dinamika a határ simaságától. A stadion esetében döntő szerepe van annak, hogy a félkör és az egyenes szakaszok találkozásánál a határ göbülete ugrásszerűen változik, és így a határ C^1, de nem C^2 sima. Lazutkin eredményei szerint, ha a konvex biliárd határa kellően sima (az eredeti cikkben C^{553}, később ezt Douady C^6-ra erősítette) akkor a határ egy pozitív mértékű környezete invariáns görbékkel, úgynevezett kausztikákkal fóliázható, és így a dinamika nem ergodikus. Hasonló jelenségeket mutatott Bunimovich és Grigo a stadion C^2 simításaira. A stadion esetében a hiperbolicitás mechanizmusa a disszertáció 3.1 fejezetében tárgyalt defókuszálódás. Ha az egyenes szakaszhoz kapcsolódó pont közelében az ívelt rész görbülete nullához tart, az itt kilépő enyhén összetartó frontoknak nincs idejük defókuszálódni. Ezért én úgy gondolom, hogy ha a stadion valamilyen $C^{1+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ simítását néznénk, akkor sem kaphatnánk ergodikus dinamikát. Mindezek alapján nem látok természetes jelöltet olyan stadion jellegű tartományra, amelyben a biliárd dinamika ergodikus (azaz lényegében teljesül a nagy számok törvénye) és ugyanakkor a Hölder folytonos függvények Birkhoff összegeire nem normális stabilis határeloszlástételek jelennek meg. A 4. fejezet érintő ütközős szóróbiliárdjai magasabb rendű érintés esetén is ergodikusak.

(K2) Van-e a sztochasztikus folyamatok elméletében használt intermittencia fogalmaknak köze a dinamikus rendszerek elméletében használt intermittenciához?

Válasz: Kétségkívül van köze ezeknek a fogalmaknak egymáshoz, bár, ahogy a bíráló is írja, az „intermittencia" jelenségéhez nem rendelhető egyértelműen pontos matematikai definíció, inkább intuitív tartalom. Úgy látom, ezeknek a foglamaknak egy közös gyökere Pomeau és Manneville 1980-as hidrodinamikai témájú cikke, amire például az „intermittency" wikipedia szócikk is hivakozik: „intermittency is the irregular alternation of phases of apparently periodic and chaotic dynamics". A bíráló találó megfogalmazását használva, ez sokszor úgy jelentkezik, hogy az állapottér egy jól keverő tartományába való visszatérés ideje tipikusan kicsi, de egy kis halmazon nagy értéket vesz fel. Mindez jellemzően exponenciális helyett hatványrendben lecsengő határeloszlásokhoz vezet. Gahovac, Leonenko es Taqqu idézett cikkében egy ennél konkrétabb kapcsolatot is találtam, itt a szerzők azt írják, „Hence, intermittency implies that the usual convergence of moments (1.4) must not hold beyond some critical value of q." Épp ezt a jelenséget tárgyalja a disszertáció H. Tétele az érintő ütközőjű szóróbiliárdokban (itt a kritikus momentum a második, azaz $q = 2$-nél változik meg a momentumok időbeli növekedésének jellege).

(K3) A (4.1) formulában definiált D_f mennyiségnek, pontosabban D_f nem nulla voltának, van-e a 2. fejezetben szereplő I mennyiséghez hasonló, egyszerű szemléletes jelentése?

Válasz: Van hasonló személetes jelentése, bár egy kicsit nehezebben hozzáférhető, mint a stadion I mennyisége esetén. A stadionban a két egyenes szakasz között pattogó trajektóriáknak az érintő ütközőjű szóróbilárdban maga az érintési pont felel meg. A fázistérben ez nem csupán egy pont, hanem egy egyenes szakasz, mivel az érintési pontot különböző irányú kimenő sebességvektorokkal láthatjuk el. Pontosabban, magában az érintési pontban nincs értelme különböző irányú sebességvektorokról beszélni, de hozzá tetszőlegesen közeli pontban már ez értelmezhető. Így ha egy függvény Hölder folytonos, van egyértelmű folytonos kiterjesztése a fázistérnek erre (az érintési ponthoz tartozó) egydimenziós részhalmazára. A D_f mennyiség éppen a függvény átlaga ezen a halmazon, csak épp egyenletes helyett egy másik sűrűség szerint. Hogy miért pont ez a sűrűség jelenik meg, arra a dinamika még mindig heurisztikus, de kicsit pontosabb vizsgálatából lehet következtetni, ezt a disszertáció 4.3.2. fejezetében tárgyalom.

(K4) Mi az oka, hogy az E. Tétel az egyetlen funkcionális határeloszlás-tétel a diszertációban?

Válasz: Az E. tétel az érintő ütközőjű szóróbiliárdokra vonatkozik, és valóban természetes kérdés, hogy mi a helyzet a funkcionális határeloszlás-tétellel (vagy gyenge invariancia elvvel) a két másik modellben. Végtelen horizontú szóróbilárdra, rögzített szórótestméretre ez az eredmény ismert, Chernov és Dolgopyat tétele 2009-ből. Amikor az I. tételen dolgoztunk, úgy láttuk, ezt a saját módszereink és Chernov-Dolgopyat bizonyításának kombinálásával tudnánk általánosítani funkcionális szintre, de nem akartuk tovább növelni az így is hosszú cikket. Később a kutatásaink ehelyett az erős invariancia elv és az iterált logaritmus tétel általánosítása felé fordultak, ezek még fix szórótestméretre is új eredmények. A stadionra nem tudok funkcionális határeloszlástétel eredményről, volt egy 2017-es kézirata Luke Mohr-nak és Hongkun Zhang-nak, de tudtommal ezt a bizonyítást nem sikerült lezárniuk. A stadion esete nehezebbnek tűnik, ez azzal függ össze, hogy a stadionban erősebben korreláltak az egymás utáni hosszú visszatérési idők, mint a másik két modellben.

(K5) Elképzelhető-e más határeloszlás, ha $n \to \infty$ és $\rho \to 0$ együtesen, de az I. Tételben szereplő növekedési feltétel nem teljesül?

Válasz: Nem számítok további esetekben más határeloszlástételek megjelenésére. Egyfelől Szász és Varjú eredményei abban az esetben, amikor előbb $n \to \infty$, majd $\rho \to 0$, másrészről Marklof és Tóth eredményei, amikor előbb $\rho \to 0$ majd $n \to \infty$, ugyanazt a határeloszlástételt adják. Ezt sikerült nekünk kiterjeszteni bizonyos esetekre, amikor $n \to \infty$ és $\rho \to 0$ egyszerre. Számomra ezek az eredmények arra utalnak, hogy a határviselkedésből, bárhogy is hajtjuk végre a $\rho \to 0$ és $n \to \infty$ limeszeket, elsődlegesen ugyanazok a primer jelenségek maradnak meg – a szabad repülés hossza eloszlásfüggvényének t^{-2} ütemű lecsengése, egy a primitív rácspontok számának növekedési üteméből származó konstanssal. A feladat nehézsége abban rejlik, hogy különbözőképp végrehajtva az $n \to \infty$ és $\rho \to 0$ együttes limeszeket, erre a primer viselkedésre különböző másodlagos effektusok rakódnak rá, és ezeket mindig egyedi módon kell kezelni.

Budapest, 2024. május 31.

Bálint Péter

Bálint Péter