

# Geometriai Hipergráfok Színezése

Pálvölgyi Dömötör

Doktori értekezés tézisei

Budapest, 2023

## 1. Bevezetés

A technológia közelmúltbeli fejlődése számos új érdekes kihíváshoz vezetett a számítási és kombinatorikus geometria területén. Manapság mindannyiunkat folyamatosan körülvesznek a különböző szerepeket betöltő elektronikus eszközök. Ezeknek a tárgyaknak az összetett kapcsolati hálózata geometriai gráfokkal és hipergráfokkal írható le. Az ilyen gráfok éleit annak a térnek a metrikus tulajdonságai határozzák meg, amelybe beágyazódnak. Például az ún. megfigyelési probléma esetén egy területet adott helyű és hatótávolságú érzékelőkkel lehet megfigyelni; itt a terület pontjai alkotják a hipergráf csúcsait, és az egyes érzékelők hatósugarába eső pontok alkotnak egy hiperélt.

Bármilyen matematikai probléma, amely csoportokra való felosztással jár, modellezhető és vizualizálható színezéssel. Ezek közé tartozik számos gyakorlati probléma, például feladatok ütemezése és a ládapakolás, amelyeknek fontos valós alkalmazásai vannak. Például a megfigyelési probléma esetében tegyük fel, hogy minden érzékelőnek van egy hozzárendelt élettartama is, ameddig aktív maradhat, és a célunk egy időbeosztás készítése, amely meghatározza, hogy az egyes érzékelők mikor aktívak, úgy, hogy az egész területet folyamatosan, a lehető leghosszabb ideig figyelhessük meg. Vagy napenergiával működő eszközök esetében, amelyeknél a napi aktív órák száma fix, a célunk az, hogy meghatározzuk a megfigyelés egész napos fenntartásának megvalósíthatóságát. Tegyük fel, hogy az egyes érzékelők napi élettartama azonos, és mindegyikhez ki kell választanunk egy olyan időintervallumot, amely alatt aktív marad. A különböző időszavakat színekkel reprezentálhatjuk, és a kérdés egy hipergráf színezési problémává válik.

A gráfok színezésével kapcsolatban sokféle kérdést fel lehet tenni, mivel ezek a fogalmak elég általánosak ahhoz, hogy a problémák széles körét megragadják. A leghíresebb példa, Ramsey tétele gráfok színezéséről nagy monokromatikus klikkek nélkül, számos látszólag egymástól független területen felmerül, és a kombinatorika kutatásainak nagy részét motiválta. Ez az eredmény valójában hipergráfok színezéséről szól, ahol a hipergráf csúcsai az alapgráf élei, a hiperélek pedig a klikkek. Hipergráfok színezése esetén a színezéseknek számos változatát lehet vizsgálni, amelyek mind a gráfok jólszínezésének fogalmát általánosítják. Attól függően, hogy milyen feltételnek kell teljesülnie minden egyes hiperéltre, többféle színezést különböztethetünk meg; ezek közé tartozik a jólszínezés, a polikromatikus színezés, a szivárványos színezés, az erős színezés, a konfliktusmentes színezés, az egyedi-maximális színezés és a páratlan színezés.

Az értekezés témája elsősorban a geometriai hipergráfok jó és polikromatikus színezése lesz. Az ilyen kérdések szisztematikus vizsgálatát 1980-ban Pach kezdeményezte, de néhány példa már korábbra nyúlik vissza. Talán a leghíresebb példa a Hales-Jewett tétel, amely geometriailag a következőképpen fogalmazható meg: Minden  $k$  és  $m$  természetes számokhoz van egy olyan  $d$ , hogy a  $d$  dimenziós,  $m$  szélességű,  $m^d$  pontból álló rács pontjainak bármely  $k$  színnel való színezésékor létezik olyan egyenes, ami  $m$  azonos színű ponton halad keresztül.

Elsősorban olyan hipergráfokra fogunk koncentrálni, ahol minden egyes hiperél sok pontot tartalmaz. Egy tipikus kérdés, amelyre megpróbálunk választ adni, a következő: Mely  $k$  és  $m$  természetes számok esetén tudunk  $k$ -színezni bármilyen síkbeli ponthalmazt úgy, hogy minden legalább  $m$  pontot tartalmazó körben legyen legalább két különböző színű pont legyen?

*A fejezetek és állítások számozása az angol nyelvű értekezés számozását követi.*

## 1.1. Absztrakt hipergráfok

A  $\mathcal{H} = (V, E)$  hipergráf halmazok egy  $E$  gyűjteménye egy  $V$  alaphalmaz felett. A  $V$  elemeit a hipergráf csúcsainak, az  $E$  elemeit pedig hiperéleknek, vagy egyszerűen csak a hipergráf éleinek nevezzük. Egy  $\mathcal{H}$  hipergráf csúcsait  $V(\mathcal{H})$ -val, éleit pedig  $E(\mathcal{H})$ -val jelöljük; a  $\mathcal{H}$ -t elhagyjuk, ha ez nem okoz félreértést. Ha az összes  $E$ -beli halmaza (él) különböző, akkor a hipergráf egyszerű; ellenkező esetben multihipergráfról beszélünk. Technikai okokból feltételezzük, hogy  $\emptyset \notin E$  és  $E \neq \emptyset$ . Egy hipergráf véges, ha  $V$  és  $E$  véges halmazok. Egy hipergráf  $m$ -uniform, ha minden éle  $m$  méretű, és  $m$ -nehéz, ha minden éle legalább  $m$  méretű. A legalább  $m$  csúccsal rendelkező éleket  $m$ -nehéznek nevezzük; az  $m$ -t elhagyjuk, ha ez nem okoz félreértést.

A  $\mathcal{H} = (V, E)$  incidenciamátrixa  $M(\mathcal{H})$  olyan mátrix, amelynek sorait és oszlopait  $V$  és  $E$  indexeli úgy, hogy  $M(v, e) = 1$ , ha  $v \in e$  és  $M(v, e) = 0$ , ha  $v \notin e$ . Megjegyezzük, hogy a sorok és oszlopok sorrendje tetszőleges. A  $\mathcal{H} = (V, E)$  hipergráf duálisa a  $\mathcal{H}^* = (E, V)$  hipergráf, ahol a  $\mathcal{H}^*$ -hoz tartozó  $\epsilon^*$  tartalmi reláció a következő:  $e \in^* v$ , ha  $v \in e$ . Megjegyezzük, hogy  $M(\mathcal{H}^*) = M^T(\mathcal{H})$ , az  $M(\mathcal{H})$  mátrix transzponáltja.

$\mathcal{H}' = (V', E')$  a  $\mathcal{H} = (V, E)$  részhipergráfja, ha  $V' \subset V$  és  $E' \subset E$ . A csúcsok egy  $X \subset V$  részhalmaza esetén a  $\mathcal{H}$  nyomát  $X$ -n a következőképpen definiáljuk:  $\mathcal{H}[X] = (X, E \cap X)$ , azaz  $V(\mathcal{H}[X]) = X$  és  $E(\mathcal{H}[X]) = \{e \cap X \mid e \in E(\mathcal{H})\}$ . Egy nyomvonal részhipergráfját (al)konfigurációnak vagy (al)mintának nevezzük. Megjegyezzük, hogy  $\mathcal{H}$  egy almintázatának incidenciamátrixa az  $M(\mathcal{H})$  almátrixa. Egy  $\mathcal{F}$  hipergráfcsalád akkor örökletes, ha zárt a részhipergráfokra és részmintákra. Ez ekvivalens azzal, hogy az incidenciamátrixok családjá zárt almátrixok vételére.

Egy  $\mathcal{H} = (V, E)$  hipergráf  $k$ -színezése egy leképezés  $V$ -ről  $\{1, \dots, k\}$ -ra. A hipergráfok színezésének több különböző érdekes változata is definiálható.

- Egy színezés akkor jó, ha minden él két különböző színű csúcsot tartalmaz. A legkisebb  $k$  értéket, amelyre létezik  $\mathcal{H}$ -nak jó  $k$ -színezése,  $\chi(\mathcal{H})$ -val jelöljük.
- Egy színezés polikromatikus, ha minden él mind a  $k$  színű csúcsot tartalmazza; megjegyezzük, hogy ilyen színezés csak akkor lehetséges, ha  $\mathcal{H}$   $k$ -nehéz.

A legnagyobb  $k$  értéket, amelyre létezik  $\mathcal{H}$ -nak polikromatikus  $k$ -színezése,  $\chi_{pc}(\mathcal{H})$ -val jelöljük.

- Egy színezés szivárványos, ha minden él minden csúcsa különböző színű; megjegyezzük, hogy ilyen színezés csak akkor lehetséges, ha minden él legfeljebb  $k$  méretű. A legnagyobb  $k$  értéket, amelyre létezik  $\mathcal{H}$ -nak szivárványos  $k$ -színezés,  $\chi_{rb}(\mathcal{H})$ -val jelöljük.
- Egy színezés akkor erős, ha a  $\mathcal{H}$   $k$ -nehéz részén polikromatikus, míg a többi részén szivárványos. A legnagyobb  $k$  értéket, amelyre létezik a  $\mathcal{H}$ -nak erős  $k$ -színezése,  $\chi_s(\mathcal{H})$ -val jelöljük.
- Egy színezés konfliktusmentes, ha minden élnek van egy olyan csúcsa, amelynek színe különbözik az adott él összes többi csúcsának színétől. A legkisebb  $k$  értéket, amelyre létezik  $\mathcal{H}$ -nak konfliktusmentes  $k$ -színezése,  $\chi_{cf}(\mathcal{H})$ -val jelöljük.
- Egy színezés akkor egyedi-maximális, ha minden  $e$  élre a benne levő legnagyobb<sup>1</sup> szín pontosan egyszer fordul elő  $e$ -ben. A legkisebb  $k$  értéket, amelyre létezik  $\mathcal{H}$ -nak egyedi-maximális  $k$ -színezése,  $\chi_{um}(\mathcal{H})$ -val jelöljük.
- Egy színezés páratlan, ha minden élhez tartozik olyan szín, amely páratlan sokszor fordul elő benne. A legkisebb  $k$  értéket, amelyre létezik  $\mathcal{H}$ -nak páratlan  $k$ -színezése,  $\chi_{odd}(\mathcal{H})$ -val jelöljük.

Megjegyezzük, hogy a fenti paraméterek felvehetnek végtelen értéket is, ha  $\mathcal{H}$  nem véges; ilyen családokra vizsgálhatnánk a végtelenbe tartás sebességét a csúcsok számának függvényében a családbeli véges hipergráfokra, de ez nem ennek az értekezésnek a témája.<sup>2</sup> A fenti kromatikus számok között definíció szerint a következő összefüggések állnak fenn:  $\chi(\mathcal{H}) \leq \chi_{odd}(\mathcal{H}) \leq \chi_{cf}(\mathcal{H}) \leq \chi_{um}(\mathcal{H})$  és  $\chi_s(\mathcal{H}) \leq \chi_{pc}(\mathcal{H}), \chi_{rb}(\mathcal{H})$ . Továbbá  $\chi(\mathcal{H}) = 2$  akkor és csak akkor, ha  $\chi_{pc}(\mathcal{H}) \geq 2$  akkor és csak akkor, ha  $\chi_s(\mathcal{H}) \geq 2$ .

Az értekezés hátralévő részében csak a jó és a polikromatikus színezéseket fogjuk vizsgálni.

A kromatikus számok fogalmát természetesen kiterjeszthetjük hipergráf családokra is, ha a család tagjaira vesszük a maximális/minimális értékeket. Ez alapján  $\chi(\mathcal{F}) = \max \chi(\mathcal{H})$  és  $\chi_{pc}(\mathcal{F}) = \min \chi_{pc}(\mathcal{H})$ , ahol  $\mathcal{H}$  bármely véges hipergráf az  $\mathcal{F}$  családból. Megjegyezzük, hogy a végesség egy technikai feltétel, amelyre a legtöbb bizonyításban szükség van, míg kényelmesebb kimondani bizonyos állításokat akkor, ha a definícióban megengedjük, hogy  $\mathcal{F}$  végtelen hipergráfokat

<sup>1</sup>Itt használjuk, hogy a színezés számokra képez le.

<sup>2</sup>A növekedési sebességgel kapcsolatos néhány szép, geometriai jellegű kérdés megtalálható a [18, 20] cikkekben.

is tartalmazzon. Ebben a dolgozatban csak olyan  $\mathcal{F}$ -eket fogunk vizsgálni, amelyek örökletesek, például tipikusan valamilyen végtelen hipergráf összes (véges) részkonfigurációi; lásd az 1.2. Fejezetet.

Előfordulhat, hogy  $\mathcal{H}$  nem nehéz élei miatt nem létezik megfelelő színezés, mivel ezek esetében jellemzően nehezebb a színezés követelményeinek megfelelni. Emiatt  $\chi_m(\mathcal{F})$ -val jelöljük azt a legkisebb  $k$  értéket, amelyhez valamilyen  $m$  esetén minden  $\mathcal{F}$ -beli  $m$ -nehéz  $\mathcal{H}$ -ra létezik megfelelő  $k$ -színezés, azaz  $\chi(\mathcal{H}) \geq k$ ; ha nincs ilyen  $k$ , akkor legyen  $\chi_m(\mathcal{F}) = \infty$ . Vegyük észre, hogy itt a  $\chi_m$  indexében lévő  $m$  nem változó, ellentétben más előfordulásokkal.

Hasonló paramétert definiálhatnánk a polikromatikus színezésekre is, de ehelyett az  $m_k(\mathcal{F})$ -t úgy definiáljuk, hogy az a legkisebb  $m$  (ha létezik), amelyre minden  $m$ -nehéz  $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$  polikromatikus  $k$ -színezhető, azaz  $\chi_{pc}(\mathcal{H}) \geq k$ ; ha nincs ilyen  $m$ , akkor legyen  $m_k(\mathcal{F}) = \infty$ . Megjegyezzük, hogy definíció szerint  $m_2(\mathcal{F}) < \infty$  akkor és csak akkor, ha  $\chi_m(\mathcal{F}) = 2$ , és mindig teljesül az  $m_k(\mathcal{F}) \leq m_{k+1}(\mathcal{F})$  egyenlőtlenség. Továbbá a következő is igaz lehet.

**1.1. Sejtés.** *Ha  $m_2(\mathcal{F}) < \infty$ , akkor  $m_k(\mathcal{F}) < \infty$  minden  $k$ -ra, bármely örökletes  $\mathcal{F}$  családra.*

Ez a gyönyörű sejtés csak abban az esetben ismert, ha  $m_2(\mathcal{F}) = 2$ ; ez Berge [8] klasszikus eredménye, aki bebizonyította, hogy ebben az esetben  $m_k(\mathcal{F}) = k$ , és jellemezte is ezeket a családokat. Az  $m_2(\mathcal{F}) = 3$  eset már teljesen nyitott.

Az 1.1. Sejtés először 2009-ben „bukkant fel” egy survey cikk [63] írása során, addig a témakör kérdéseivel foglalkozók egyszerűen igaznak feltételezték. Később a szerző több helyen, például az oberwolfachi találkozókön és a MathOverflow fórumon népszerűsítette, és más változatok is megjelentek. A legerősebb verzió a következő, amelyet Keszegh és a szerző sejtett meg.

**1.2. Sejtés.**  *$m_k(\mathcal{F}) \leq (k-1)(m_2(\mathcal{F})-1) + 1$  minden  $k$ -ra, bármely örökletes  $\mathcal{F}$  családra.*

Szembetűnő a képlet hasonlósága az absztrakt konvexitású terek Radon-számára vonatkozó Calder-Eckhoff-féle sejtéssel; mivel ezt a sejtést már megcáfolták [14], a biztonság kedvéért említsünk meg három alternatív, gyengébb sejtést is:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} m_k(\mathcal{F}) &\leq C \cdot k \cdot m_2(\mathcal{F}), \\ m_k(\mathcal{F}) &\leq \text{poly}(k, m_2(\mathcal{F})), \\ m_k(\mathcal{F}) &\leq C(m_2(\mathcal{F})) \cdot k. \end{aligned}$$

Számos olyan (geometriai) család létezik, amelyre az 1.2. Sejtés egyenlőtlensége éles; a későbbiekben több példát is adunk ilyen családokra. Több speciális esetben ismerünk polinomilis korlátot; lásd az 5.2. Tételt.

<sup>3</sup>A Calder-Eckhoff-féle sejtés lenti legutolsó gyengítésének megfelelő sejtést a szerző nemrégiben bizonyította [68], míg az első gyengítésnek megfelelő sejtés még nyitott. Az 1.2. Sejtésnek megfelelő sejtés a Radon-számok esetében nagyon egyszerű állítás lenne.

## 1.2. Hipergráfok uniójának színezése

**1.3. Állítás.**  $\mathcal{H}_1 = (V, E_1)$  és  $\mathcal{H}_2 = (V, E_2)$  legyen két hipergráf egy közös  $V$  csúcshalmazon. Ekkor  $\chi(\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2) \leq \chi(\mathcal{H}_1) \cdot \chi(\mathcal{H}_2)$ .

**1.4. Következmény.**  $\chi_m(\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2) \leq \chi_m(\mathcal{H}_1) \cdot \chi_m(\mathcal{H}_2)$ .

Megfelelő színezés esetén ezek a korlátok élesek lehetnek, már gráfok (2-uniform hipergráfok) esetén is. De ha egy erősebb feltételből indulunk ki, akkor jobb korlátot kaphatunk.

**1.5. Lemma** (Damásdi-Pálvölgyi [24]). *Legyenek  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{k-1}$  hipergráfok egy közös  $V$  csúcshalmazon. Ha  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{k-1}$  mindegyike polikromatikus  $k$ -színezhető, akkor  $\chi(\bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{H}_i) \leq k$ .*

**1.6. Következmény.** *Bármely  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k-1}$  családra, ha  $m_k(\mathcal{F}_1), \dots, m_k(\mathcal{F}_{k-1}) < \infty$ , akkor  $\chi_m(\mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{k-1}) \leq k$ .*

Az 1.5. Lemma éles abban az értelemben, hogy minden  $k$  esetén létezik  $k - 1$  olyan hipergráf, amelyek mindegyike polikromatikus  $k$ -színezhető, de uniójuk nem jól  $(k - 1)$ -színezhető. Vegyünk például egy  $(k - 1)$ -dimenziós,  $k$  szélességű rácsot,  $V = \{(i_1, \dots, i_{k-1}) \mid 1 \leq i_j \leq k\}$ , és legyen egy  $k$ -as  $v^1, \dots, v^k \in V$  a  $\mathcal{H}_j$  éle, ha a  $j$ -edik koordináták mind különbözőek, azaz,  $\{v_j^1, \dots, v_j^k\} = \{1, \dots, k\}$ . Egy egyszerű indukciós érvelés mutatja, hogy  $\chi(\bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{H}_j) = k$ .

## 1.3. Geometriai hipergráfok

Egy  $\mathcal{H} = (V, E)$  hipergráfot geometriainak nevezünk, ha a szerkezete valamilyen térben lévő geometriai konfigurációból származik. Ha  $\mathcal{R}$  egy tartománytér, azaz valamilyen geometriai térben lévő halmazcsalád, akkor azt a hipergráfot, amelynek csúcsai az alapul szolgáló tér pontjai, élei pedig  $\mathcal{R}$  halmazai a természetes tartalmazási relációval, az  $\mathcal{R}$  által indukált elsődleges hipergráfnak nevezzük. A tartománytérre példa a síkban lévő körök<sup>4</sup> gyűjteménye, amelynek elsődleges hipergráfja a  $\mathcal{H}(\text{disks}) = (\mathbb{R}^2, \text{körök})$ , ahol  $v \in e$ , ha a  $v$ -nek megfelelő pontot az  $e$ -nek megfelelő kör tartalmazza. Hasonlóképpen, azt a hipergráfot, amelynek csúcsai az  $\mathcal{R}$  halmazai, élei pedig a tér pontjai a természetes tartalmazási reláció fordítottjával, az  $\mathcal{R}$  által indukált duális hipergráfnak nevezzük. Minket az  $\mathcal{F}(\text{disks})$  örökletes család fog érdekelni, amely a  $\mathcal{H}(\text{disks})$  (véges) részkonfigurációiból, vagy annak duálisából, az  $\mathcal{F}^*(\text{disks})$ -ből áll. Röviden  $\mathcal{F}(\text{disks})$ -et a körök családjának nevezzük, és a paraméterekre, mint például  $\chi_m(\mathcal{F}(\text{disks}))$ , egyszerűen mint „ $\chi_m$  körök” fogunk hivatkozni, ha ez nem vezet félreértéshez. A rövideg kedvéért a család duálisának paramétereit, mint például  $\chi_m(\mathcal{F}^*(\text{disks}))$ , egyszerűen csak úgy fogjuk írni, hogy „ $\chi_m^*$  körök”, avagy „körökre  $\chi_m^*$ ”. Ha egy  $\mathcal{H}$

<sup>4</sup>Kör alatt mindig körlemez értünk.

hipergráf a körök családjához tartozik, akkor azt is mondjuk, hogy  $\mathcal{H}$  körökkel megvalósítható, és hasonlóan, ha  $\mathcal{H}^*$  a körök családjához tartozik, akkor azt mondjuk, hogy  $\mathcal{H}$ -nak van körökkel való duális megvalósítása.

Egy  $\mathcal{F}$  geometriai család esetében a  $\chi_m \leq k$  állítás ekvivalens a következő állítással: Van olyan  $m = m(\mathcal{F})$ , hogy bármely  $P$  véges ponthalmaz  $k$ -színezhető úgy, hogy ha az  $\mathcal{F}$ -ben lévő valamelyik  $F$ -re  $|P \cap F| \geq m$ , akkor a  $P \cap F$ -ben lévő pontok nem mindegyike azonos színű. Hasonlóképpen,  $m_k \leq m$  ekvivalens a következő állítással: Bármely  $P$  véges ponthalmaz  $k$ -színezhető úgy, hogy ha az  $\mathcal{F}$ -ben lévő valamelyik  $F$ -re  $F \in |P \cap F| \geq m$ , akkor a  $P \cap F$  pontjai között mind a  $k$  szín előfordul. Az  $m_k^* \leq m$  állítás a duális tartománytérre vonatkozóan ekvivalens a következő állítással: Bármely véges sok  $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$  halmaz  $k$ -színezhető úgy, hogy ha valamely pontra  $|\{F_i \mid p \in F_i\}| \geq m$ , akkor mind a  $k$  szín előfordul a  $\{F_i \mid p \in F_i\}$  halmazok között. Ez utóbbi úgy is megfogalmazható, hogy az alaptér bármely részalmazának bármely véges  $m$ -szeres fedése szétbontható  $k$  diszjunkt fedésre.

A legegyszerűbb példa ha  $\mathbb{R}$  az intervallumok családja. Az intervallumokra, néha Gallai Tibornak tulajdonított eredmény szerint,  $m_k = k$  és  $m_k^* = k$ ; véges hipergráfok esetén mindkét állítás egyszerű indukcióval igazolható. Ezt az eredményt nem nehéz általánosítani arra a családra, melynek minden tagja  $t$  intervallum uniója. Ebben az esetben  $m_k = t(k-1) + 1$ , tehát ezek a családok minden  $m_k \geq 2$  esetén egyenlőséggel teljesítik az 1.2. Sejtés egyenlőtlenségét. A duális paraméter teljesen máshogy viselkedik,  $m_2^* = \infty$  minden  $t \geq 2$  esetén.

Egy másik klasszikus példa a sík egyenesek családja. A [65] cikkben megfigyelték, hogy egy elég nagy dimenziójú  $\{1, \dots, m\}^d$  rácsból a síkba vetítve a Hales-Jewett tétel alapján  $\chi_m = \infty$ , és a pont-egyenes dualitás alapján  $\chi_m^* = \infty$  fennáll.

Mint korábban említettük, ebben az értekezésben szeretnénk elkerülni a végtelen hipergráfokkal kapcsolatos problémákat, ezért  $\chi_m$  és  $m_k$  definícióját véges hipergráfok családjára adtuk meg; a végtelen hipergráfokkal kapcsolatos néhány problémáról lásd [67], míg néhány pozitív eredményről lásd [54]. Emiatt jellemzően nem kell meghatározni, hogy az alapul szolgáló halmazok nyíltak vagy zártak-e, mivel egy perturbációs érveléssel általában következik, hogy az adott családok véges hipergráfjai azonosak.

### 1.3.1. Geometriai hipergráfok viszonya

Mint az imént említettük, például a nyílt körök által megvalósítható hipergráfok megegyeznek a zárt körök által megvalósítható hipergráfokkal, mert bármely véges megvalósításban egy megfelelő perturbáció után az incidenciák ugyanazok maradnak, de egyetlen pont sem esik a körök határára. Ebben a fejezetben néhány további ekvivalenciát és tartalmazást ismertetünk a geometriai családok között. Az ilyen tartalmazások közül sok megtalálható a Keszegh által tervezett és általa, valamint a szerző által karbantartott alábbi weboldalon:

<https://coge.elte.hu/cogezoo.html>

Egy másik fontos ekvivalencia [61, 63], hogy ha egy család egy halmaz néhány (vagy akár összes) eltoltjából áll  $\mathbb{R}^d$ -ben, akkor a tartományterek által indukált elsődleges és duális hipergráfok azonosak. Tekintsünk egy  $\mathcal{C} = \{C_i \mid i \in I\}$  családot, amely egy  $C \subset \mathbb{R}^d$  halmaz eltoltjaiból áll és egy  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  ponthalmazt. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy  $C$  tartalmazza az origót. Minden  $i \in I$ -ben  $c_i$  jelölje a  $C_i$  azon pontját, amely megfelel az origónak a  $C$ -ben. Más szóval:  $\mathcal{C} = \{C + c_i \mid i \in I\}$ . Minden  $p \in P$ -hez rendeljük a  $-C$  egy eltoltját, a  $C$  tükrözését az origóra, úgy, hogy  $C_p^* = -C + p$ . Figyeljük meg, hogy

$$p \in C_i \iff c_i \in C_p^*,$$

ami azt bizonyítja, hogy ugyanazok a hipergráfok valósíthatók meg a elsődleges és a duális tartományterekkel. A korai cikkekben nagyobb hangsúlyt fektettek a duális tartományterek vizsgálatára, de főleg az eltoltak tartománytereit vizsgálták, amikor a két probléma egyébként is ekvivalens. Egy halmazt akkor definiált fedés-szétszedhetőnek Pach [61], ha az *egész* síknak az adott halmaz eltoltjaival való bármely elég sűrű fedése két diszjunkt fedéssé bontható fel. Ha  $S$  korlátos nyílt halmaz, akkor kompaktsági megfontolásokból következik, hogy a fedés-szétszedhetőség abból az állításból következik, hogy az  $S$  eltoltjainak családjára  $\chi_m = 2$ . Az összefüggésről és az eredményekről bővebben lásd [63].

Végül a hipergráf családok néhány, úgynevezett *dinamikus* változatáról megmutatható, hogy azonosak más (hagyományos) hipergráf családokkal. Egy dinamikus hipergráfban a csúcsok  $v_1, \dots, v_n$  sorrendben vannak, és minden  $v_1, \dots, v_i$  prefix egy adott családból egy bizonyos hipergráfot indukál; a pontos állítást lásd a 4.15. Definícióban.<sup>5</sup> Egy geometriai példa az  $\mathbb{R}$ -ben lévő  $p_1, \dots, p_n$  pontok rendezett halmaza által indukált hipergráf, ha az intervallumok alkotják a tartományteret. Ennek a hipergráfnak az élei a  $I \cap \{p_1, \dots, p_i\}$  formájú halmazok, ahol  $I$  egy intervallum és  $1 \leq i \leq n$ . Ezt a problémát úgy lehet jól szemléltetni, hogy a pontok a megadott sorrendben „jelennek meg” a számegyenesen. Ez a dinamikus intervallum hipergráf család tulajdonképpen megegyezik az úgynevezett feneketlen téglalapok által megvalósítható hipergráfok családjával. Az  $\mathbb{R}^2$  sík egy részhalmazát feneketlen téglalaprak nevezünk, ha  $\{(x, y) : \ell \leq x \leq r, y \leq t\}$  alakú. Ezt az ekvivalenciát használták [7] a 2.20. Tétel bizonyítására, később pedig hasonló összefüggést használtunk a dinamikus síknegyedek és térnyolcadok között [45] a 2.24. Tétel bizonyítására; a részleteket lásd az értekezésbeli 3. Fejezetben. Számos további eredmény a dinamikus változatokról az értekezésbeli 4.5. Fejezetben található.

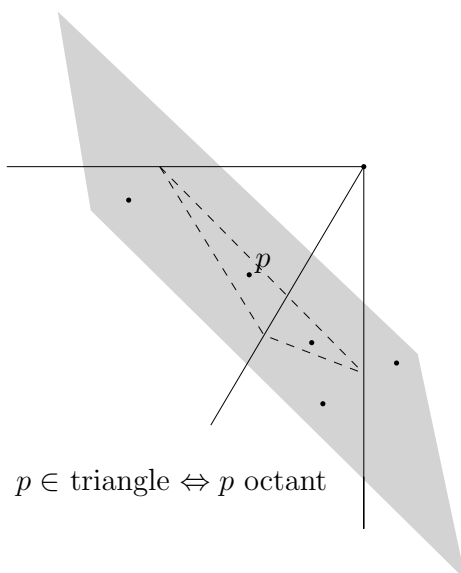
A hipergráf családok közötti egyszerű tartalmazási reláció, hogy (bármilyen dimenzióban) félterek által megvalósítható hipergráfok az egységgömbök által

<sup>5</sup>Ez a definíció, sok más állításhoz hasonlóan, csak a teljes, angol nyelvű értekezésben található meg.



megvalósítható hipergráfok részcsaládja, amelyek a gömbök által megvalósítható hipergráfok részcsaládja. Ez utóbbi egy speciális esete annak a ténynek, hogy egy halmaz eltoltaival megvalósítható hipergráfok mindig a halmaz homotetikus példányaival<sup>6</sup> megvalósítható hipergráfok részcsaládja.

Hadd említsünk még egy tartalmazást, amely gyakran előkerült érdekes eredmények bizonyításánál. Vegyük észre, hogy ha egy hipergráf megvalósítható tengelypárhuzamos feneketlen téglalapokkal, akkor egy rögzített háromszög homotetikus példányaival is megvalósítható, mivel a feneketlen téglalapok oldalai enyhén behajlíthatóak, hogy találkozzanak. És minden  $\mathcal{H}$  hipergráf, amely egy rögzített háromszög homotetikus példányai által megvalósítható, megvalósítható tényolcadok által is, ahol tényolcad alatt  $\mathbb{R}^3$  egy  $(-\infty, x_0) \times (-\infty, y_0) \times (-\infty, z_0)$  alakú részhalmazát értjük. Ez a  $\mathcal{H}$ -t háromszögekkel megvalósító síknak az  $\mathbb{R}^3$  térbe  $x + y + z = 0$  egyenletű síkként való beágyazásából következik (lásd 1. ábra).



1. ábra. Az tényolcadok gazdagabb családot adnak, mint egy háromszög homotetikus példányai, mivel a szürke síkon ábrázolt háromszög minden homotetikus példány egy tényolcad és a sík metszeteként is előáll.

### 1.3.2. Általános Delaunay-háromszögelés

A  $P$  ponthalmaz egy  $C$  korlátos konvex testre vonatkozó általános Delaunay-háromszögeléséhez definiáljunk egy  $\mathcal{DT} = \mathcal{DT}(P, C)$  gráfot, amelynek csúcshalmaza  $P$ , és  $P$  két pontját él köti össze, ha azokat  $C$  olyan homotetikus példánya fedi,

<sup>6</sup>Egy halmaz homotetikus példánya a halmaz nagyított és eltoló példánya (a forgatások *nem* megengedettek). Azt is megköveteljük, hogy a nagyítási faktor pozitív legyen; néhány más dolgot ezt *pozitív* homotetikusnak nevezi.

amely nem tartalmazza  $P$  egyetlen másik pontját sem. Jól ismert (lásd pl. [51]), hogy ez a gráf bármely  $P$  és  $C$  esetén összefüggő és síkbarajzolható úgy, hogy a csúcsok a  $P$  megfelelő pontjaiba képződnek, az élek pedig szakaszokba. Ennek beágyazásnak minden belső lapját  $C$  egy olyan homotetikus példánya fedi, amely nem tartalmaz pontokat a belsejében, és minden belső lap háromszög, ha a pontok  $C$ -re vonatkozóan általános helyzetben vannak, vagyis nincs négy olyan pont, amelyek  $C$  egy homotetikus példányának a határára esnek. Ha ez nem így van, akkor a megmaradt belső felületeket tetszőlegesen háromszögeljük, hogy megkapjuk a  $\mathcal{DT}$  gráfot. Mivel ez utóbbi lépés miatt nem biztos, hogy  $\mathcal{DT}$  egyértelmű, ki kéne választanunk az egyik Delaunay-háromszögelést; a bonyodalmak elkerülése végett egy ilyet fixnek tekintünk és ezt jelöljük  $\mathcal{DT}$ -vel.

Felidézünk néhány egyszerű állítást a Delaunay-háromszögelésről, amelyek a [2] cikkben is megjelentek.

**1.7. Állítás.** *Ha  $C'$  a  $C$  egy homotetikus példánya, akkor a  $C' \cap P$  pontok a  $\mathcal{DT}(P, C)$  összefüggő részgráfját feszítik.*

**1.8. Következmény.** *Ha  $C'$  a  $C$  egy homotetikus példánya, és  $e$  a  $\mathcal{DT}$  olyan éle, amely keresztezi  $C'$ -t és két részre osztja azt, akkor az egyik ilyen rész nem tartalmaz pontot a  $P$ -ből.*

A következő kapcsolódó állítást is használni fogjuk.

**1.9. Állítás.** *Egy konvex sokszög metszete egy homotetikus példányának határával mindig összefüggő.*

## 2. Összefoglalás

Ez a fejezet a geometriai családok  $\chi_m$  és  $m_k$  paramétereivel kapcsolatos legérdekesebb eredmények áttekintését tartalmazza, így a [63] survey cikk frissített változatának tekinthető. Valójában nagyon kevésbé támaszkodunk a [63] cikkekre, mivel az gyakorlatilag már a megjelenésekor elavult, hiszen sok áttörés a megjelenése után született. Néhány fontos eredmény megtalálható az utolsó oldalon egy összefoglaló táblázatban, az ismert eredmények teljesebb, mindig naprakész változata pedig a <https://coge.elte.hu/cogezoo.html> weboldalon.

Legyen  $\mathcal{C}$  egy halmazcsalád az  $\mathbb{R}^d$  térben, és legyen  $P \subseteq \mathbb{R}^d$ . Azt mondjuk, hogy  $\mathcal{C}$  egy  $m$ -szeres fedése  $P$ -nek, ha  $P$  minden pontját  $\mathcal{C}$ -nek legalább  $m$  tagja tartalmazza. Az 1-szeres fedést röviden csak *fedésnek* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy  $m$  fedés uniója egy  $m$ -szeres fedés. Minket leginkább az az eset érdekel, amikor  $P$  egy véges ponthalmaz vagy az egész  $\mathbb{R}^d$  tér.

A gömbpakolásokat és fedéseket évszázadok óta tanulmányozzák, részben a kristályográfiában, a diofantikus approximációban, a számelméletben és más területeken való alkalmazásuk miatt. Az ezen a területen folyó kutatásokat a következő típusú sűrűségi kérdések határozták meg: Egy adott teret hogyan lehet az egységgömbökkel vagy egy másik fix konvex test eltoltjaival minél „gazdaságosabban” (azaz legkevésbé sűrűen)  $m$ -szeresen fedni? Számos klasszikus eredmény és fizikai megfigyelés azt sugallja, hogy legalábbis alacsony dimenziós terekben az optimális elrendezések jellemzően periodikusak, és több rácsszerű fedésre oszthatók [31, 32]. Vajon hasonló jelenség érvényesül-e bármely kellően „vastag” többszörös fedés esetén anélkül is, hogy feltételeznénk bármit is a sűrűségéről?

Körülbelül 15 évvel ezelőtt hasonló probléma merült fel *nagyméretű ad hoc szenzorhálózatokkal* kapcsolatban; lásd Feige et al. [30] és Buchsbaum et al. [13]. A mára már meglehetősen kiterjedt szakirodalomban általában *megfigyelési probléma* (sensor cover problem) néven hivatkoznak rá. A legegyszerűbb változat a következőképpen fogalmazható meg. Tegyük fel, hogy egy nagy  $P$  területet több érzékelővel figyelünk meg, amelyek mindegyike egységnyi sugarú körkörös hatótávolsággal rendelkezik, és mindegyiket egy egységnyi élettartamú akkumulátor táplál. Tegyük fel, hogy  $P$  minden pontja legalább  $m$  érzékelő hatótávolságán belül van, azaz az érzékelők hatótávolságainak  $\mathcal{C}$  családja  $m$ -szeresen lefedi  $P$ -t. Ha a  $\mathcal{C}$  család felbontható  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$  fedésekre, akkor a területet az érzékelők legalább  $k$  időegységig megfigyelhetik. Ugyanis az  $i$  időpontban bekapcsolhatjuk az összes olyan érzékelőt, amelynek a hatótávolsága a  $\mathcal{C}_i$ -hez tartozik ( $1 \leq i \leq k$ ). A lehető leghosszabb szolgáltatás garantálása érdekében maximalizálni akarjuk  $k$  értékét. Természetesen az első kérdés a következő, melyet Pach vetett fel 1980-ban.

**2.1. Probléma** (Pach [60]). *Igaz-e, hogy ha a síkot egységkörökkel  $m$ -szeresen fedjük, akkor az mindig felbontható két fedésre, ha  $m$  elég nagy?*

Mani és Pach egy hosszú, nem publikált kéziratban [56] azt állította, hogy a kérdésre adott válasz igenlő,  $m \leq 33$  értékkel. Pach [66] arra figyelmeztetett, hogy ezt „máig nem sikerült független módon ellenőrizni”. Winkler [77] azt sejtette, hogy az állítás igaz már  $m = 4$  esetén is. Több mint 30 évig az volt az uralkodó feltevés, hogy bármely  $C$  nyílt síkbeli *konvex test* (azaz korlátos konvex halmaz) esetén létezik olyan  $m = m(C)$  pozitív egész szám, hogy a sík minden  $C$  eltoltjaival való  $m$ -szeres fedése felbontható két fedésre. Ezt a feltételezést Pach [61] bizonyította be középpontosan szimmetrikus konvex sokszögekre. Csaknem 25 évbe telt, mire az állítást sikerült általánosítani az összes konvex sokszögre [75, 69, 37]. Így ez a kérdés évtizedek óta motiválta a kutatást a területen. Végül nagy meglepetésre a szerző nemleges választ adott rá.<sup>7</sup> Később az ellenpéldát kiterjesztették más sima határú testekre is egy Pachhal közösen írt cikkben [62], lásd az értekezésbeli 7. Fejezetet.

A fejezet hátralévő részében természetes geometriai családok tartományterei-nek hipergráfjaira vonatkozó színezési eredményeket fogunk ismertetni, főként az elsődleges tartományterekre és a véges hipergráfokra koncentrálva.

## 2.1. Sokszögek eltoltjai

Ahogy említettük, cikkek sorozatában bebizonyították, hogy minden nyílt konvex sokszög fedés-szétszedhető. Ezek a bizonyítások a véges hipergráfokról szóló következő eredményekre támaszkodtak.

**2.2. Tétel** (Pach [61]). *Bármely középpontosan szimmetrikus konvex sokszög eltoltjaira  $\chi_m = 2$ .*

**2.3. Tétel** (Tardos-Tóth [75]). *Bármely háromszög eltoltjaira  $\chi_m = 2$ .*

**2.4. Tétel** (Pálvölgyi-Tóth [69]). *Bármely konvex sokszög eltoltjaira  $\chi_m = 2$ .*

Megjegyezzük, hogy a fenti állítás nem terjeszthető ki minden sokszögre.

**2.5. Tétel** (Pach-Tardos-Tóth [65]). *Bármely konkáv négyszög eltoltjaira  $\chi_m > 2$ .*

Bár a  $\chi_m$  felső korlátját még nem vizsgálták részletesen, de megmutatható, hogy  $\chi_m \leq n - 1$  bármely  $n$ -szög eltoltjaira.

A konkáv sokszögek egy nagyobb osztályát, amelyek eltoltjaira  $\chi_m > 2$ , adta meg a szerző [67], és kiderült, hogy a sokszögekben található szögpároknak fontos szerepe van. Valójában ezen eredmények alapján a sokszögek eltoltjait teljes mértékben meghatároztuk  $\chi_m = 2$  tekintetében.

<sup>7</sup>D. Pálvölgyi, Indecomposable coverings with unit disc, preprint <https://arxiv.org/abs/1310.6900v1>, 2013.

**2.6. Tétel** (Pálvölgyi-Tóth [69]). *Egy sokszög eltoltjaira  $\chi_m = 2$  akkor és csak akkor, ha a domború<sup>8</sup> szögeinek bármelyik párja olyan, hogy vagy tartalmazza az egyik szög a másikat, vagy ugyanez a pár előfordulhat egy konvex sokszögben is.*

A  $\chi_m = 2$  értékű családok esetében az  $m_k$  függvény növekedési sebességét is alaposan tanulmányozták. Az egyetlen eset, amikor  $m_2$ -t is kifejezetten vizsgálták, a háromszögek eltoltjai, amelyekre  $5 \leq m_2 \leq 9$  a 3.2. és 2.24. Tételek következményeként. A [61] cikk bizonyította, hogy bármely középpontosan szimmetrikus konvex  $P$  sokszög esetében az  $m_k$  paraméter létezik, és  $k$  exponenciálisan gyorsan növekvő függvénye által felülről becsülhető. A [75]-ben hasonló eredményt állapítottak meg háromszögekre, a [69]-ben pedig konvex sokszögekre. Mindezeket az eredményeket végül egy sor cikkben az optimális lineáris korlátra javították.

**2.7. Tétel** (Pach-Tóth [66]). *Bármely középpontosan szimmetrikus konvex sokszög eltoltjaira  $m_k = O(k^2)$ .*

**2.8. Tétel** (Aloupis et al. [5]). *Bármely középpontosan szimmetrikus konvex sokszög eltoltjaira  $m_k = O(k)$ .*

**2.9. Tétel** (Gibson-Varadarajan [37]). *Bármely konvex sokszög eltoltjaira  $m_k = O(k)$ .*

Bár [37]-ben csak a konvex sokszögeket vizsgálták, a bizonyításuk bármely olyan sokszögre is működik, amelynek bármely domború szögpárja olyan, hogy vagy tartalmazza az egyik szög a másikat, vagy ugyanez a pár előfordulhat egy konvex sokszögben is.

Magasabb dimenziókban azonban teljesen más a helyzet.

**2.10. Tétel** (Pálvölgyi [67]). *Bármely poliéder eltoltjaira  $\chi_m > 2$ .*

A bizonyítás azon a megfigyelésen alapul, hogy bármely  $P$  poliéderhez vagy van olyan sík, amelyik  $P$ -t egy konkáv sokszögben metszi, amelyre a 2.6. Tétel miatt  $\chi_m > 2$ , vagy van két párhuzamos sík, amelyek a  $P$ -t két olyan sokszögben metszik, hogy egy-egy domború szöget véve mindegyikből nem tudnának konvex sokszöget alkotni. Mindkét esetben vehetünk egy síkot a térben és  $P$  eltoltjainak egy olyan családját, amelyek a [67] síkbeli konstrukciót ebben a síkban  $P$  eltoltjaival valósítják meg.

## 2.2. Sokszögek homotetikus példányai

Emlékezzünk vissza, hogy egy halmaz homotetikus példánya a halmaz nagyított és eltolt példánya (a forgatások *nem* megengedettek). A sokszögek homotetikus példányai által indukált geometriai tartományterek színezéseit sokkal kevésbé tanulmányozták, mint a sokszögek eltoltjait. Megjegyezzük, hogy az általánosított

---

<sup>8</sup>Egy szöget domború szögnek nevezünk, ha kisebb, mint  $\pi$ .

Delaunay-gráf síkbeliségéből (1.3.2. Fejezet) következik homotetikus példányokra, hogy  $\chi_m \leq 4$ .

Az első olyan cikk, amelyben kifejezetten homotetikus példányokat vizsgáltak, a következőket bizonyította.

**2.11. Tétel** (Cardinal et al. [16]). *Egy háromszög homotetikus példányaira  $m_k \leq 144k^8$ .*

Módszerüket Keszegh és a szerző fejlesztette tovább.

**2.12. Tétel** (Keszegh-Pálvölgyi [47]). *Egy háromszög homotetikus példányaira  $m_k \leq m_2 \cdot k^{\log_2(2m_2-1)}$ .*

Mivel a 2.24. Tétel következménye szerint a háromszög homotetikus példányaira jelenleg  $m_2 \leq 9$  a legjobb korlát, ez  $m_k \leq 9 \cdot k^{4.09}$ -t ad. Továbbá, a [47]-ben egy általános módszert dolgoztunk ki, amely azt jelenti, hogy ha  $m_2 < \infty$  bármely konvex sokszög homotetikus példányaira, akkor  $m_k$  polinomiálisan növekszik; lásd az 5.4. Következményt. Ennek a módszernek a leírása teljes részletességgel megtalálható az 5. Fejezetben. A háromszögeken kívül azonban a négyzet (és affin transzformációi, azaz a paralelogrammák) az egyetlen olyan konvex sokszög, amelynek a homotetikus példányaira  $m_2 < \infty$  jelenleg bizonyított.

**2.13. Tétel** (Ackerman-Keszegh-Vizer [2]). *Egy négyzet homotetikus példányaira  $m_2 \leq 215$ .*

Ezt kombinálva az 5.2. és az 5.6. Tétélekkel, a következő korlátot kapjuk.

**2.14. Következmény** (Ackerman-Keszegh-Vizer [2]). *Egy négyzet homotetikus példányaira  $m_k = O(k^{8.75})$ .*

A helyzet meglepő módon teljesen más a homotetikus példányok duális tartományterei esetében. Egy háromszög homotéteire a 2.26. Következményből  $m_k^* = O(k^{5.09})$ -t kapunk, mert ha egy hipergráf (duális) megvalósítható egy háromszög homotetikus példányával, akkor az ténylegcsodokkal is megvalósítható. Más sokszögek homotetikus példányaira azonban Kovács a [67] konstrukcióra építve a következőt mutatta meg.

**2.15. Tétel** (Kovács [53]). *A háromszöget kivéve bármely sokszög homotetikus példányaira  $\chi_m^* > 2$ .*

Ezáltal a négyzetek homotetikus példányaira  $\chi_m = 2$ , de  $\chi_m^* > 2$ . Az eltoltakhoz hasonlóan a  $\chi_m$  végessége bármely sokszög homotetikus példányaira a háromszögek homotetikus példányaira vonatkozó  $\chi_m = 2$  értékből következik. Hasonló korlát bizonyítható a  $\chi_m^*$ -ra is.

A  $\chi_m$ -re vonatkozó korlátot *konvex* sokszögek esetén a következőképpen javítottuk.

**2.16. Tétel** (Keszegh-Pálvölgyi [50]). *Egy konvex sokszög homotetikus példányaira  $\chi_m \leq 3$ .*

Ennek az eredménynek a bizonyítása az értekezésbeli 6. Fejezetben található.

Megjegyezzük, hogy az ismert konstrukciók nem zárják ki annak lehetőségét, hogy konvex sokszögekre  $\chi_m = 2$ ; erről az állításról már említettük, hogy háromszögekre és négyzetekre is érvényes, és ismert arra a speciális esetre is, amikor minden homotetikus példány tartalmaz egy közös pontot, például, ha mindegyik tartalmazza az origót [22].

Keszegh és a szerző azt sejtette, hogy a 2.16. Tétel kiterjeszhető minden  $C$  síkbeli konvex halmazra, azaz, hogy van olyan  $m = m(C)$ , hogy bármely véges ponthalmaz megenged egy olyan 3-színezést, hogy  $C$  bármely homotetikus példány, amely legalább  $m$  pontot tartalmaz, két különböző színű pontot tartalmaz. (A speciális esetet, amikor  $C$  egy kör, Keszegh már korábban felvetette [42].) Ezeket a sejtéseket azonban nemrég megcáfoltuk [22]; lásd a 2.31. Tételt és az értekezésbeli 7.10. Fejezetet.

### 2.3. Tengelypárhuzamos határok

Egy másik természetes család a tengelyekkel párhuzamos határok által határolt különböző alakzatoké. Az intervallumok után a legegyszerűbb tartománytér a (pozitív) síknegyedek családja, azaz a  $[x_0, \infty) \times [y_0, \infty)$  alakú halmazok, amelyekre könnyen bizonyítható a következő állítás.

**2.17. Állítás.** *Pozitív síknegyedekre  $m_k = m_k^* = k$ .*

Ha pozitív síknegyedek helyett mind a négy síknegyed típust megengedjük, akkor is fennáll  $m_k = O(k)$  a négyzetekre vonatkozó 2.9. Tétel egyszerű következményeként, míg  $m_k^* \leq 4k - 3$  az előző állításból következik, ha azt a négy családra külön-külön alkalmazzuk.

Egy másik egyszerű alakzatcsalád a tengelypárhuzamos csíkok, azaz a  $[x_1, x_2] \times \mathbb{R}$  és  $\mathbb{R} \times [y_1, y_2]$  alakú halmazok. Ha csak vízszintes vagy csak függőleges csíkokat veszünk figyelembe, akkor a kapott család izomorf az  $\mathbb{R}$ -beli intervallumok családjával. Ha mindkettő megengedett, akkor a következő eredmények ismertek.

**2.18. Tétel** (Aloupis et al. [6]). *Tengelypárhuzamos csíkokra  $1.5k - 1 \leq m_k \leq 2k - 1$  és  $m_k^* \leq 2k - 1$ .*

Ugyanebben a dolgozatban néhány magasabb dimenzióra vonatkozó általánosítást is bebizonyítottak. Definiáljuk a sávot két párhuzamos hipersík közötti részként  $\mathbb{R}^d$ -ban.

**2.19. Tétel** (Aloupis et al. [6]).  *$d$ -dimenziós tengelypárhuzamos sávokra  $2\lceil(2d - 1)k/2d\rceil \leq m_k \leq k(4 \ln k + \ln d)$  és  $\lfloor k/2 \rfloor d + 1 \leq m_k^* \leq d(k - 1) + 1$ .*

Sokat tanulmányozták *feneketlen téglalapokat* is. Emlékezzünk vissza, hogy  $\mathbb{R}^2$  egy részhalmazát (zárt) feneketlen téglalapnak nevezzük, ha  $\{(x, y) : \ell \leq x \leq r, y \leq t\}$  alakú. A feneketlen téglalapok tartományterét először Keszegh [42] tanulmányozta, aki megmutatta, hogy  $m_2 = 4$  és  $m_2^* = 3$ . Később a következő általános felső korlátot igazolták  $m_k$ -ra.

**2.20. Tétel** (Asinowski et al. [7]). *Feneketlen téglalapokra*  $1.67k - 2.5 \leq m_k \leq 3k - 2$ .

Tehát a feneketlen téglalapokról ismert, hogy teljesül rájuk az 1.2. Sejtés, de nem tudjuk, hogy az egyenlőtlenség éles-e. Sokkal kevesebbet tudunk a duális tartományterükről. A legjobb korlát,  $m_k^* = O(k^{5.09})$ , a tényolcadokra vonatkozó 2.26. Következmény folyamánya; néhány speciális esetben jobb korlátok is ismertek, lásd [15]. Nemrég bebizonyosodott az is, hogy feneketlen téglalapok és vízszintes csíkok egyesítésére  $\chi_m > 2$  [19], míg a 2.18. és 2.20. Tételek, valamint az 1.5. Lemma alapján azt kapjuk, hogy  $\chi_m \leq 3$ , tehát  $\chi_m = 3$ .

A síkban tengelypárhuzamos téglalapok családjára csak negatív eredmények születtek.

**2.21. Tétel** (Chen-Pach-Szegedy-Tardos [21]). *Tengelypárhuzamos téglalapokra*  $\chi_m = \infty$ .

**2.22. Tétel** (Pach-Tardos [64]). *Tengelypárhuzamos téglalapokra*  $\chi_m^* = \infty$ .

Cardinal észrevette, hogy  $\mathbb{R}^d$  ortánsai  $d \geq 4$  esetén szimulálhatják egy megfelelő módon beágyazott síknak a tengelypárhuzamos téglalapjait, tehát ilyen családokra is  $\chi_m = \infty$ .

A síknegyedek és a tértizenhatodok között csak a tényolcadok esete volt nyitott, egészen a következő eredményig.

**2.24. Tétel** (Keszegh-Pálvölgyi [45, 49]). *Pozitív tényolcadokra*  $5 \leq m_2 \leq 9$ .

Ennek az eredménynek a részletes bizonyítása az értekezésbeli 3. Fejezetben található. A módszer azon alapszik, hogy a térben színezendő pontokat levetítjük az  $x$ - $y$  síkra, és a  $z$  koordinátát időnek tekintve egy dinamikus ponthalmazt színezzük síknegyedekre nézve. Természetes kérdés (G. Tardos vetette fel), hogy vajon online módon is színezhetők-e a dinamikus pontok síknegyedekre nézve. Erre nemleges választ adtunk.

**4.2. Tétel** (Keszegh-Nathan-Pálvölgyi [44]). *Egyetlen  $c$  szint használó online színezési módszer sem tudja elkerülni, hogy a futása során valamikor egy  $m + 1$  pontot tartalmazó síknegyed csupa azonos színű pontot tartalmazzon, egy alkalmas,  $N = 2^{cm} - 1$  pontból álló sorozatra.*

Megemlítjük még, hogy a tényolcadok által megvalósítható 6-nehez hipergráfok mindig jól 3-színezhetőek [9].

Az  $m_k$ -ra a [45]-beli módszerből nem következett semmilyen felső korlát. Később csak a nagyon gyenge  $m_k \leq 12^{2^k}$  korlátot sikerült bizonyítanunk [46].



Ezután Cardinal et al. [16, 17], valamint a Keszegh és a szerző [47] egy cikksorozatban egy általános módszert dolgoztak ki, amely a következő polinomiális korlátban csúcsosodott ki.

**2.25. Tétel** (Cardinal et al. [17]). *Pozitív térnjolcadokra  $m_k \leq m_2 \cdot k^{\log_2(2m_2-1)+1}$ .*

A 2.24. és 2.25. Tételek kombinációja a következő korlátot adja.

**2.26. Következmény.** *Pozitív térnjolcadokra  $m_k = O(k^{5.09})$ .*

Végül megemlítjük, hogy ha a pozitív térnjolcadok helyett mind a 8 térnjolcadot megengedjük, akkor a [67] módszereiből következik, hogy  $\chi_m > 2$ , míg  $\chi_m$  korlátossága az 1.5. Lemmából, vagy egyszerűen a különböző térnjolcadokra vonatkozó színezések direkt szorzatából következik.

## 2.4. Körök

Az első fontos eredmény az olyan alakzatokkal kapcsolatban, amelyek határa nem rögzített irányú szakaszokból áll, a következő volt.

**2.27. Tétel** (Smorodinsky-Yuditsky [74]). *Félsíkokra  $m_k = 2k - 1$  és  $2k - 1 \leq m_k^* \leq 3k - 2$ .*

Később Fulek [34] megmutatta, hogy a félsíkok duális tartományterére az alsó korlát éles  $k = 2$  esetén, azaz  $m_2^* = 3$ . Keszeghnek és a szerzőnek sikerült általánosítani a 2.2. Tételt pszeudofélsík elrendezésekre is, amelyek a következőképpen definiálhatók. Egy *pszeudoegyenes elrendezés* olyan egyszerű görbék gyűjteménye, amelyek mindegyike a síkot két korlátlan részre osztja úgy, hogy bármely két görbe legfeljebb egyszer metszi egymást. Egy *pszeudofélsík* egy ilyen elrendezésben egy pszeudoegyenes egyik oldalán lévő terület.

**2.28. Tétel** (Keszegh-Pálvölgyi [48]). *Pszeudofélsíkokra  $m_k = 2k - 1$  és  $2k - 1 \leq m_k^* \leq 3k - 2$ .*

Megjegyezzük, hogy a félsíkokkal megvalósítható hipergráfok egységkörökkel is megvalósíthatók, de ez a későbbi család sokkal gazdagabbnak bizonyult: A szerző bizonyította rájuk, hogy  $\chi_m > 2$ -t, ezzel nemleges választ adva a 2.1 Problémára; később az ellenpéldát más sima testekre is kiterjesztettük egy Pachal közös cikkben.

**2.29. Tétel** (Pach-Pálvölgyi [62]). *Legyen  $C$  bármilyen konvex test a síkban, amelynek két párhuzamos érintője olyan, hogy  $C$  szigorúan konvex a két érintési pont egy környezetében.<sup>9</sup> Ekkor bármely pozitív egész  $m$  számra létezik olyan 3-kromatikus  $m$ -uniform hipergráf, amely  $C$  eltoltjaival realizálható, tehát  $\chi_m > 2$ .*

Emlékezzünk vissza, hogy ha  $\mathcal{F}$  valamilyen síkbeli konvex test eltoltjaiból vagy homotetikus példányaiból áll, akkor az általános Delaunay-háromszögelés

<sup>9</sup>Ez a feltétel lazítható úgy, hogy csak egy sima környezetet követelünk meg  $C$  határán. Ezt később Damásdi és a szerző fedezte fel [24].

síkbeliségéből következik, hogy  $\chi_m \leq 4$ . Ez csak a következő kérdést hagyta nyitva az eltoltakra: Létezik-e bármilyen  $C$  síkbeli konvex testre olyan pozitív egész  $m$  szám, hogy nincs olyan 4-kromatikus  $m$ -uniform hipergráf, amely a  $C$  eltoltjaival megvalósítható? Erre a közelmúltban Damásdi és a szerző adott választ.

**2.30. Tétel** (Damásdi-Pálvölgyi [24]). *Bármely  $C$  síkbeli konvex testre  $\chi_m \leq 3$ , azaz van olyan pozitív egész  $m$  szám, hogy a sík bármely véges  $P$  pontthalmaza 3-színezhető úgy, hogy nincs olyan eltoltja  $C$ -nek, amely  $P$  legalább  $m$  olyan pontját tartalmazza, amelyek mindegyike azonos színű.*

Ez eddig csak akkor volt ismert, ha  $C$  egy sokszög (ebben az esetben 2 szín is elegendő a 2.4. Tétel szerint, és 3 szín még a homotetikus példányokra is elég a 2.16. Tétel szerint), valamint közös pontban metsző ún. pszeudodiszk családokra [1] (ez utóbbi eredmény általánosítja azt az esetet, ha  $C$  nem korlátos, amikor egyébként már 2 szín is elegendő [62]).

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás egy korábbi változata [23] csak akkor működött, ha  $C$  kör, és míg az általánosítás más sima határú konvex testekre kivitelezhetőnek tűnt, nem láttuk, hogy hogyan terjeszthetnénk ki a módszert tetszőleges konvex testekre. A 2.30. Tétel bizonyítása két másik híres eredménnyel való meglepő kapcsolatra támaszkodik, a megvilágítási sejtés kétdimenziós esetének megoldására (Levi [55]), valamint az Erdős–Sands–Sauer–Woodrow sejtés nemrégii megoldására (Bousquet, Lochet és Thomassé [12]). Valójában az utóbbi eredmény egy általánosítását használjuk, amelyet szintén bizonyítunk [24].

A 2.30. Tétel bizonyításának fő része az értekezésbeli 7.11 Fejezetben található.

A homotetikus példányokról kiderült, hogy a legtöbb testre, beleértve a kört is, a  $\chi_m \leq 4$  egyenlőtlenség éles, megcáfolva a korábbi sejtéseket [42, 50], és megjavítva a [65] cikket, mely a körökre  $\chi_m > 2$ -t bizonyított.

**2.31. Tétel** (Damásdi-Pálvölgyi [22]). *Legyen  $C$  bármely olyan konvex test a síkban, amelynek két párhuzamos érintője olyan, hogy  $C$  szigorúan konvex a két érintőpont egy környezetében. Bármely pozitív egész  $m$  számra létezik egy 4-kromatikus  $m$ -uniform hipergráf, amely megvalósítható  $C$  homotetikus példányával, tehát  $\chi_m = 4$ .*

A 2.31. Tétel bizonyítása az értekezésbeli 7.10 Fejezetben található.

## 5. Önfedhetőség

A [47] cikk alapján vezessük be a következő definíciót.

**5.1. Definíció.** *Az  $\mathcal{S}$  zárt geometriai halmazok gyűjteménye önfedhető, ha létezik egy olyan  $f$  önfedhetőségi függvény, hogy bármely  $S \in \mathcal{S}$  és bármely véges,  $k$  elemű  $P \subset S$  pontthalmaz esetén létezik egy olyan  $S' \subset \mathcal{S}$ ,  $|S'| \leq f(k)$ , hogy  $\cup S' = S$ , de  $P$  egyetlen pontja sincs egy  $S' \in \mathcal{S}'$  belsejében sem.*

Megjegyezzük, hogy a definíció szerint  $P$  pontjai csak az  $\mathcal{S}'$ -beli halmazokon kívül vagy a határukon lehetnek. Azt viszont feltételezhetjük, hogy  $P$  minden pontja  $S$  belsejében van.

Például könnyen belátható, hogy a (zárt<sup>10</sup>) tengelypárhuzamos téglalapok önfedhetőek  $f(k) = k + 1$  értékkel, és hogy a síkban lévő összes kör (vagy bármely más sima határú halmaz homotétikus példányai) nem önfedhetőek, mivel már  $f(1)$  sem létezik.

E definíció tanulmányozásának motivációja a következő tétel, amely a Cardinal et al. [16] cikkben implicit módon szereplő egyik eredmény általánosítása.

**5.2. Tétel** (Keszegh-Pálvölgyi [47]). *Tegyük fel, hogy  $\mathcal{S}$  önfedhető egy monoton  $f$  önfedő függvényvel, amelyre  $f(k) > k$ , és  $\mathcal{S}$ -re  $m_2 \leq m$ , azaz bármely véges ponthalmaz két színnel színezhető úgy, hogy ha  $S \in \mathcal{S}$  legalább  $m$  pontot tartalmaz, akkor  $S$  tartalmazza mindkét színt. Ekkor  $m_k \leq m(f(m-1))^{\lceil \log k \rceil - 1}$ , azaz bármely véges ponthalmaz színezhető  $k$  színnel úgy, hogy ha  $S \in \mathcal{S}$  legalább  $m(f(m-1))^{\lceil \log k \rceil - 1} \leq k^d$  pontot tartalmaz, akkor  $S$  tartalmazza mind a  $k$  színt. (Itt  $d$  egy konstans, amely csak az  $\mathcal{S}$ -től függ.)*

Az önfedhetőséggel kapcsolatos fő eredményeink a konvex sokszögek homotetikus példányaira vonatkoznak.

**5.3. Tétel** (Keszegh-Pálvölgyi [47]). *Egy adott  $C$  konvex sokszög összes homotetikus példányának családja önfedhető  $f(k) \leq ck$  értékkel, ahol a  $c$  állandó csak  $C$ -től függ.*

Más szóval, ha adott egy  $C$  konvex sokszög és a belsejében  $k$  pont, akkor van  $ck$  darab homotetikus példánya  $C$ -nek, amelyeknek az uniója  $C$ , és egyik homotetikus példány sem tartalmazza a belsejében a pontok egyikét sem.

**5.4. Következmény.** *Ha egy konvex sokszög homotetikus példányaira  $m_2 < \infty$ , akkor  $m_k \leq k^d$ .*

Háromszögek és négyzetek esetén az  $f$  pontos értékét is meghatároztuk.

**5.5. Tétel** (Keszegh-Pálvölgyi [47]). *Egy adott háromszög összes homotetikus példányainak családja  $f(k) = 2k + 1$  értékkel önfedő, és ez éles.*

**5.6. Tétel** (Keszegh-Pálvölgyi [47]). *Egy négyzet összes homotetikus példányainak családja  $f(k) = 2k + 2$  értékkel önfedő, és ez éles.*

Végül az 5.3. Tételben szereplő konstans nem függhet csak a  $P$  csúcsainak számától, mivel még egy négyszög esetében is tetszőlegesen nagy lehet.

**5.7. Tétel** (Keszegh-Pálvölgyi [47]). *Minden  $c$ -hez létezik egy  $Q$  négyszög, amelynek összes homotetikus példányainak családja csak  $f(k) \geq ck$  értékkel önfedő.*

<sup>10</sup>Ebben a fejezetben minden sokszöget zártnak tekintünk.

## Hivatkozások

- [1] E. Ackerman, B. Keszegh, D. Pálvölgyi, Coloring hypergraphs defined by stabbed pseudo-disks and ABAB-free hypergraphs, *SIAM J. on Discrete Math.*, 34, 2250–2269, 2020.
- [2] E. Ackerman, B. Keszegh, M. Vizer, Coloring points with respect to squares, *Discrete and Computational Geometry* 58, 757–784, 2017.
- [3] N. Alon, A non-linear lower bound for planar epsilon-nets, *Discrete and Computational Geometry* 47, 235–244, 2012.
- [4] N. Alon, J. H. Spencer, *The probabilistic method*, third edition, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, Hoboken, NJ, 2008.
- [5] G. Aloupis, J. Cardinal, S. Collette, S. Langerman, D. Orden, P. Ramos, Decomposition of multiple coverings into more parts, *Discrete and Computational Geometry* 44, 706–723 2010.
- [6] G. Aloupis, J. Cardinal, S. Collette, S. Imahori, M. Korman, S. Langerman, O. Schwartz, S. Smorodinsky, P. Taslakian, *Colorful Strips*, *Graphs and Combinatorics* 27, 327–339, 2011.
- [7] A. Asinowski, J. Cardinal, N. Cohen, S. Collette, T. Hackl, M. Hoffmann, K. Knauer, S. Langerman, M. Lason, P. Micek, G. Rote, T. Ueckerdt, *Coloring Hypergraphs Induced by Dynamic Point Sets and Bottomless Rectangles*, *Algorithms and Data Structures*, *Lecture Notes in Computer Science* 8037, 73–84, 2013.
- [8] C. Berge, *Balanced matrices*, *Mathematical Programming* 2, 19–31, 1972.
- [9] A. Biniarz, P. Bose, J. Cardinal, M. Payne, *Three-Coloring Three-Dimensional Uniform Hypergraphs*, in *Proceedings of the 31st Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2019)*.
- [10] B. Bollobás, D. Pritchard, T. Rothvoß, A. Scott, *Cover-decomposition and polychromatic numbers*, *SIAM J. Discrete Math.* 27, 240–256, 2013.
- [11] B. Bosek, S. Czerwinski, M. Debski, J. Grytczuk, Z. Lonc, P. Rżazewski, *Coloring Chain Hypergraphs*, in *20 Years of the Faculty of Mathematics and Information Science*, A collection of research papers in mathematics, Politechnika Warszawska, Warszawa, 2020.
- [12] N. Bousquet, W. Lochet, S. Thomassé, *A proof of the Erdos-Sands-Sauer-Woodrow conjecture*, *J. Combin. Theory Ser. B* 137, 316–319, 2019.

- [13] A. L. Buchsbaum, A. Efrat, S. Jain, S. Venkatasubramanian, and K. Yi, Restricted strip covering and the sensor cover problem, in Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2007), 1056–1063, ACM, New York, 2007.
- [14] B. Bukh, Radon partitions in convexity spaces, arXiv:1009.2384, unpublished.
- [15] J. Cardinal, K. Knauer, P. Micek, D. Pálvölgyi T. Ueckerdt, N. Varadarajan, Colouring bottomless rectangles and arborescences, to appear.
- [16] J. Cardinal, K. Knauer, P. Micek, T. Ueckerdt, Making Triangles Colorful, *Journal of Computational Geometry* 4, 240–246, 2013.
- [17] J. Cardinal, K. Knauer, P. Micek, T. Ueckerdt, Making Octants Colorful and Related Covering Decomposition Problems, *SIAM J. Discrete Math.* 28, 1948–1959, 2014.
- [18] T. Chan, Conflict-free coloring of points with respect to rectangles and approximation algorithms for discrete independent set, in Proceedings of the twenty-eighth annual Symposium on Computational Geometry (SoCG 2012), ACM, New York, 2012.
- [19] V. Chekan, T. Ueckerdt, Polychromatic Colorings of Unions of Geometric Hypergraphs, in Proceedings of Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2022), LNCS 13453, Springer, Cham.
- [20] K. Chen, A. Fiat, H. Kaplan, M. Levy, J. Matoušek, E. Mossel, J. Pach, M. Sharir, S. Smorodinsky, U. Wagner, E. Welzl, Online Conflict-Free Coloring for Intervals, *SIAM J. Comput.* 36, 1342–1359, 2006.
- [21] X. Chen, J. Pach, M. Szegedy, G. Tardos, Delaunay graphs of point sets in the plane with respect to axis-parallel rectangles, *Random Struct. Algorithms* 34, 11–23, 2009.
- [22] G. Damásdi, D. Pálvölgyi, Realizing an  $m$ -uniform four-chromatic hypergraph with disks, *Combinatorica* 42, 1027–1048 (2022).
- [23] G. Damásdi, D. Pálvölgyi, Unit disks hypergraphs are three-colorable, extended abstract appeared in Extended Abstracts EuroComb 2021, *Trends in Mathematics* 14, 483–489, 2021.
- [24] G. Damásdi, D. Pálvölgyi, Three-chromatic geometric hypergraphs, to appear in *Journal of the European Mathematical Society*.
- [25] P. Erdős, On a combinatorial problem, *Nordisk Mat. Tidskr.* 11, 5–10, 1963.

- [26] P. Erdős, L. Lovász, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, in *Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday)*, Vol. II, 609–627. Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 10, North-Holland, Amsterdam, 1973.
- [27] P. Erdős and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* 2, 463–470, 1935.
- [28] L. Esperet, G. Joret, Colouring planar graphs with three colours and no large monochromatic, *Combinatorics, Probability and Computing*, 23, 551–570, 2014.
- [29] G. Even, Z. Lotker, D. Ron, and S. Smorodinsky, Conflict-free colorings of simple geometric regions with applications to frequency assignment in cellular networks, *SIAM J. Comput.* 33, 94–136, 2003.
- [30] U. Feige, M. M. Halldórsson, and G. Kortsarz, Approximating the domatic number, *SIAM J. Comput.* 32, 172–195, 2002/03.
- [31] G. Fejes Tóth, New results in the theory of packing and covering, in *Convexity and its applications*, 318–359, Birkhäuser, Basel, 1983.
- [32] G. Fejes Tóth and W. Kuperberg, A survey of recent results in the theory of packing and covering, in *New trends in discrete and computational geometry*, 251–279, *Algorithms Combin.* 10, Springer, Berlin, 1993.
- [33] R. Fulek, personal communication, 2010.
- [34] R. Fulek, Coloring geometric hypergraphs defined by an arrangement of half-planes, in *Proceedings of 22nd Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2010)*, 71–74.
- [35] H. Gebauer, H. Gebauer, Disproof of the neighborhood conjecture with implications to SAT, *Combinatorica* 32, 573–587, 2012.
- [36] D. Gerbner, B. Patkós, *Extremal Finite Set Theory*, Chapman and Hall/CRC, 2018.
- [37] M. Gibson, K. Varadarajan, Decomposing coverings and the planar sensor cover problem, *Discrete and Computational Geometry* 46, 313–333, 2011.
- [38] W. Goddard, Acyclic colorings of planar graphs, *Discrete Math.* 91, 91–94, 1991.
- [39] B. Gonska, A. Padrol, Neighborly inscribed polytopes and Delaunay triangulations, *Advances in Geometry* 16, 349–360, 2016.

- [40] B. Grünbaum, Venn diagrams and independent families of sets, *Math. Mag.* 48, 12–23, 1975.
- [41] D. Haussler, E. Welzl,  $\epsilon$ -nets and simplex range queries, *Discrete Comput. Geom.* 2, 127–151, 1987.
- [42] B. Keszegh, Coloring half-planes and bottomless rectangles, *Computational Geometry: Theory and Applications* 45, 495–507, 2012.
- [43] B. Keszegh, Weak conflict free colorings of point sets and simple regions, in *Proceedings of the 19th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2007)*, 97–100, 2007.
- [44] B. Keszegh, N. Lemons, D. Pálvölgyi, Online and quasi-online colorings of wedges and intervals, *Order* 33, 389–409, 2016.
- [45] B. Keszegh, D. Pálvölgyi, Octants are Cover Decomposable, *Discrete and Computational Geometry* 47, 598–609, 2012.
- [46] B. Keszegh, D. Pálvölgyi, Octants are cover-decomposable into many coverings, *Computational Geometry* 47, 585–588, 2014.
- [47] B. Keszegh, D. Pálvölgyi, Convex Polygons are Self-Coverable, *Discrete and Computational Geometry* 51, 885–895, 2014.
- [48] B. Keszegh and D. Pálvölgyi, An abstract approach to polychromatic coloring: shallow hitting sets in ABA-free hypergraphs and pseudohalfplanes, *Journal of Computational Geometry* 10, 1–26, 2019.
- [49] B. Keszegh, D. Pálvölgyi, More on Decomposing Coverings by Octants, *Journal of Computational Geometry* 6, 300–315, 2015.
- [50] B. Keszegh, D. Pálvölgyi, Proper Coloring of Geometric Hypergraphs, *Discrete and Computational Geometry*, 62, 674–689, 2019.
- [51] R. Klein, *Concrete and Abstract Voronoi Diagrams*. Lecture Notes in Computer Science 400, Springer, 1989.
- [52] J. M. Kleinberg, R. Motwani, P. Raghavan, S. Venkatasubramanian, Storage management for evolving databases, *38th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS '97)*, 353–362, 1997.
- [53] I. Kovács, Indecomposable coverings with homothetic polygons, *Discrete and Computational Geometry* 53, 817–824, 2015.
- [54] I. Kovács, G. Tóth, Multiple coverings with closed polygons, *Electronic Journal of Combinatorics* 22, 18 pages, 2015.

- [55] F. W. Levi, Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns, Arch. Math. (Basel), 6, 369–370, 1955.
- [56] P. Mani-Levitska, J. Pach, Decomposition problems for multiple coverings with unit balls, manuscript, 1986.
- [57] J. Matoušek, The determinant bound for discrepancy is almost tight, Proc. Amer. Math. Soc. 141, 451–460, 2013.
- [58] E. W. Miller, On a property of families of sets, C. R. Soc. Sci. Varsovie 30, 31–38, 1937.
- [59] M. Naszódi, S. Taschuk, On the transversal number and VC-dimension of families of positive homothets of a convex body, Discrete Math. 310, 77–82, 2010.
- [60] J. Pach, Decomposition of multiple packing and covering, Diskrete Geometrie 2. Kolloq. Math. Inst. Univ. Salzburg, 169–178, 1980.
- [61] J. Pach, Covering the plane with convex polygons, Discrete and Computational Geometry 1, 73–81, 1986.
- [62] J. Pach, D. Pálvölgyi, Unsplittable coverings in the plane, Advances in Mathematics 302, 433–457, 2016.
- [63] J. Pach, D. Pálvölgyi, G. Tóth, Survey on Decomposition of Multiple Coverings, in Geometry, Intuitive, Discrete, and Convex (I. Bárány, K. J. Böröczky, G. Fejes Tóth, J. Pach eds.), Bolyai Society Mathematical Studies 24, 219–257, Springer-Verlag, 2014.
- [64] J. Pach, G. Tardos, Coloring axis-parallel rectangles, Journal of Combinatorial Theory. Series A 117, 776–782. 2010.
- [65] J. Pach, G. Tardos, G. Tóth, Indecomposable coverings, Discrete Geometry, Canadian Mathematical Bulletin 52, 451–463, 2009.
- [66] J. Pach, G. Tóth, Decomposition of multiple coverings into many parts, Computational Geometry: Theory and Applications 42, 127–133, 2009.
- [67] D. Pálvölgyi, Indecomposable coverings with concave polygons, Discrete and Computational Geometry 44, 577–588, 2010.
- [68] D. Pálvölgyi, Radon numbers grow linearly, Discrete and Computational Geometry 68, 165–171, 2022.
- [69] D. Pálvölgyi, G. Tóth, Convex polygons are cover-decomposable, Discrete and Computational Geometry 43, 483–496, 2010.



- [70] K. S. Poh, On the linear vertex-arboricity of a planar graph, *J. of Graph Theory*, 14, 73–75, 1990.
- [71] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring, *Random Structures Algorithms* 16, 4–32, 2000.
- [72] B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow, On monochromatic paths in edge-coloured digraphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 33, 271–275, 1982.
- [73] S. Smorodinsky, Conflict-free coloring and its applications, in *Geometry, Intuitive, Discrete, and Convex* (I. Bárány, K. J. Böröczky, G. Fejes Tóth, J. Pach eds.), *Bolyai Society Mathematical Studies* 24, Springer-Verlag, 331–389, 2014.
- [74] S. Smorodinsky, Y. Yuditsky, Polychromatic coloring for half-planes, *J. Combin. Theory Ser. A*, 119, 146–154, 2012.
- [75] G. Tardos, G. Tóth, Multiple coverings of the plane with triangles, *Discrete and Computational Geometry* 38, 443–450, 2007.
- [76] K. Varadarajan, Weighted geometric set cover via quasi-uniform sampling, in *Proceedings of the 2010 ACM International Symposium on Theory of Computing (STOC 2010)*, 641–647, ACM, New York, 2010.
- [77] P. Winkler, on page 137 of *Mathematical mind-benders*, A K Peters, Wellesley, MA, 2007. See also: P. Winkler, *Puzzled: covering the plane*, *Commun. ACM* 52, 112, 2009.

## A. Összefoglaló táblázat

alakzat	eltoltakra	homotetikus példányokra
<b>feneketlen téglalap</b>	$\chi_m = 2$ [42] $m_k \leq 2k - 1$ [15, 48]	$\chi_m = 2$ [42] $1.67k - 2.5 \leq m_k \leq 3k - 2$ [7]
<b>háromszög</b>	$\chi_m = 2$ [75] $m_k = O(k)$ [37]	$\chi_m = 2$ [45] $m_k = O(k^{4.09})$ [17] + [49]
<b>konvex sokszög</b>	$\chi_m = 2$ [69] $m_k = O(k)$ [37]	$2 \leq \chi_m \leq 3$ [50] $\chi_m = 2$ négyzetekre [2]
<b>konkáv sokszög*</b>	$3 \leq \chi_m$ [67]	$3 \leq \chi_m$ [67]
<b>konvex sokszög, közös ponttal</b>	$\chi_m = 2$ [69] $m_k = O(k)$ [37]	$\chi_m = 2$ [22] $m_k = O(k)$ [22]
<b>kör, közös ponttal</b>	$\chi_m = 2$ [22] $m_k = O(k)$ [22]	$\chi_m \leq 3$ [1] $\chi_m = 3$ [22]
<b>kör</b>	$\chi_m = 3$ [23, 62]	$\chi_m = 4$ [22]
<b>sima test**</b>	$\chi_m = 3$ [24, 62]	$\chi_m = 4$ [22]

A síkbeli geometriai hipergráfok jó és polikromatikus színezésével kapcsolatos néhány fontos eredmény összefoglalása. Egy család esetében  $\chi_m$  azt a legkisebb pozitív egész  $k$  számot jelöli, amelyhez létezik olyan egész  $m$  szám, hogy minden véges ponthalmaz  $k$ -színezhető úgy, hogy a család minden legalább  $m$  pontot tartalmazó tagja legalább két színt tartalmazzon. Az  $m_k$  azt a legkisebb olyan egész  $m$  számot jelöli, amelyre bármely véges ponthalmaz  $k$ -színezhető úgy, hogy a család bármely tagja, amely legalább  $m$  pontot tartalmaz, tartalmazza mind a  $k$  színt.

\* Néhány speciális konkáv sokszögre  $\chi_m = 2$ ; a teljes osztályozást lásd [69]-ben.

\*\* Az alsó korlát csak a legtöbb sima testre érvényes; részletekért lásd [24].