Opponensi vélemény
Pálvölgyi Dömötör
Coloring Geometric Hypergraphs
(Geometriai hipergráfok színezése)
c. MTA doktori értekezéséről

Pálvölgyi Dömötör disszertációjában az algoritmikus és kombinatorikus geometria területére eső színezési problémákkal foglalkozik, nevezetesen olyan hipergráfok színezési kérdéseivel, melyek csúcsai az euklideszi vagy egy másik tér pontjai, hiperélei pedig kitüntetett geometriai alakzatoknak a csúcshalmazzal vett metszetei. Alapvetően két különböző színezési invariánssal foglalkozik. Hipergráfok egy $\mathcal{F}$ osztályára $\chi_m(\mathcal{F})$ jelöli a legkisebb olyan k számot, melyhez létezik olyan $m > 0$ egész, hogy bármely $\mathcal{F}$-beli hipergráf csúcsai kiszínezhetők k színnel úgy, hogy a legalább m csúcsot tartalmazó hiperélek legalább két színt tartalmaznak. A másik, a dolgozatban sokat vizsgált színezési invariáns $m_k(\mathcal{F})$ az olyan m természetes számok infimuma, melyekre igaz, hogy ha egy $\mathcal{F}$-hez tartozó hipergráf minden hiperélének legalább m pontja van, akkor a hipergráf polikromatikusan kiszínezhető k színnel, azaz úgy, hogy minden él tartalmazza mind a k színt. Ez a témakör egy igen intenzíven kutatott terület, sok ismert eredménnyel és sok még nyitott kérdéssel. A disszertációban a szerző 2 önálló és 15 társszerzős publikációban közölt eredményeit ismerteti, melyek többségében vezető folyóiratokban jelentek meg. Terjedelmi korlátok miatt jelen bírálatban a disszertációban bemutatott számos eredmény közül csak néhány fontosabbnak tartottat ismertetünk részletesen.

A 102 oldalas disszertáció 7 fejezetből, egy hivatkozásjegyzékből és egy, az eredményeket összefoglaló táblázatból áll.

Az 1. bevezető fejezet első fele összefoglalja az általános absztrakt hipergráfok színezéseire vonatkozó gyakran használt tulajdonságokat és az ezekből tulajdonságokból származtatható színezési invariánsokat. Bemutat néhány ezeket összekötő egyenlőtlenséget, melyek között néhány egyszerű következménye a definícióknak, néhány viszont máig vár a bizonyításra. Foglalkozik a hipergráfok uniójának színezési invariánsaival, és röviden bemutatja, hogy $m_k(\mathcal{F}) = O(k)$-ból miért következik egy $O(1/\epsilon)$ méretű erős ϵ-háló létezése $\mathcal{F}$-hez.

Az 1. fejezet második fele a geometriai hipergráfokra vonatkozó alapvető definíciókat, konstrukciókat, a különféle geometriai hipergráfok közti kapcsolatokat, és a geometriai hipergráfokhoz tartozó színezési invariánsok geometriai interpretációit gyűjti össze. Tipikusan úgy keletkezik egy geometriai hipergráfcsalád, hogy egy X geometriai térben rögzítjük az X részhalmazainak egy $\mathcal{R}$ rendszerét, és az olyan hipergráfok tartoznak a családhoz, melyek V csúcshalmaza az X egy véges részhalmaza, hiperélei pedig a $V \cap E$, $(E \in \mathcal{R})$ metszetek. Néha csak ezen hipergráfok bizonyos részhipergráfjainak családját vizsgáljuk. Külön figyelmet kapnak ezen hipergráfok duálisainak színezési invariánsai is. Az 1.2.1 részben a különböző módokon származtatott geometriai hipergráfok közti kapcsolatok közül azokról esik szó, melyekre a későbbiekben is szükség lesz. A 1.2.2. rész ismerteti az általánosított Delaunay-trianguláció konstrukcióját és kimondja annak néhány fontos tulajdonságát. Az általánosított Delaunay-triangulációnak fontos szerep jut majd az 5. és 6. fejezetekben.

A 2. fejezet különböző geometriai hipergráfcsaládok χ_m és m_k színezési invariánsaira vonatkozó legérdekesebb eredményeket foglalja össze, a szerző saját eredményeinek bemutatásán túl történeti áttekintést is adva. A 2.1. alfejezet azokkal a hipergráfcsaládokkal foglalkozik, melyek egy síkbeli sokszögtartomány eltoltjaiból álló halmazrendszerből származtathatók a fent leírt módon. A 2.2. alfejezet egy síkbeli sokszögtartomány pozitív homotetikus példányai által meghatározott hipergráfokcsaládokra vonatkozó eredményeket foglalja össze, a 2.3. alfejezet pedig a tengelypárhuzamos egyenesdarabokkal határolt tartományokkal (síknegyedekkel, sávokkal, „feneketlen” téglalapokkal) foglalkozik. Az első három alfejezetben vizsgált alakzatok közös jellemzője, hogy határaikat olyan egyenesdarabok alkotják, melyek iránya véges sok rögzített irány közül kerül ki. A 2.4. alfejezet ezzel szemben azokra a halmazrendszerekre összpontosít, melyek nem ilyenek: az összes félsík, a pseudo-félsíkok, illetve egy általános konvex síkbeli test eltoltjainak rendszereire. A fejezet néhány nyitott probléma tárgyalásával zárul.

A 3. fejezet a térbeli negatív térnyolcadok által definiált hipergráfokra bizonyítja az $5 \leq m_2 \leq 9$ korlátokat a szerző és Keszegh Balázs három közös cikkének alapján. Mindkét becslés redukálható egy-egy síkbeli probémára. A $m_2 \leq 9$ egyenlőtlenség az 1.2. alfejezetben ismertetett dualizálással és az egyik koordinátát az „időnek” tekintve a statikus problémát egy síkbeli dinamikus feladatnak átfogalmazva arra vezetődik vissza, hogy ha a síkon véges sok pont egymás után, adott sorrendben érkezik, akkor a pontoknak van olyan színezése két színnel, hogy bármely időpillanatban tekintsük is az addig megérkezett pontokat, ha egy negatív síknegyed közülük legalább 9 pontot tartalmaz, akkor a benne fekvő pontok közt van két különböző színű. Ennek az állításnak a bizonyítása a pontok konfigurációját a feladat szempontjából jól leíró erdő rekurzív felépítésén múlik, melyre a csúcsok 2 színnel színezése meg fog felelni a feltételeknek. Mivel egy síkból egy T hegyesszögű háromszög pozitív homotetikus példányai kimetszhetők egy térnyolcad eltoltjaival, az $m_2 \geq 5$ becsléshez elegendő a T háromszög síkjában konstruálni véges sok pontot úgy, hogy bárhogyan színezzük is ki ezeket a pontokat 2 színnel, lesz a T-nek egy olyan eltoltja, mely a pontok közül pontosan négyet tartalmaz, és azok mind ugyanolyan színűek. A 3.2. alfejezet egy ilyen ponthalmazt ír le.

A 4. fejezet különféle online és dinamikus színezési feladatokkal foglalkozik. A dinamikus színezési feladatok tulajdonképpen egy magasabb dimenziós statikus feladat hasznos átfogalmazásai. Igaz, hogy a pontokra úgy tekintünk, hogy azok az időben egymást követve érkeznek, de valójában előre ismerjük, hogy a pontok hova és mikor fognak megérkezni. Ezzel szemben, amikor egy online színezési feladatról beszélünk, a pontjaink (vagy egyéb objektumaink) véletlenszerűen érkeznek, és érkezésükkor azonnal ki kell őket színezni úgy, hogy bizonyos feltételek teljesüljenek, és a már kiszínezett pontok színét nem változtathatjuk meg a későbbiekben.

A 4.2. alfejezet először egy negatív választ ad Tardos Gábor egy kérdésére a negatív síknegyedekre vonatkozó, monokromatikus k-ast elkerülő, c színt használó online színezési algoritmus létezéséről: Nincs olyan online színezési algoritmus, mely c színnel színezve a síkon egymás után megjelenő pontokat biztosan el tud jutni a $2^{c(k-1)} - 1$-edik pontig anélkül, hogy menet közben sose keletkezzen egy olyan negatív síknegyed, mely a kiszínezett pontok halmazát k darab egyszínű pontban metszi. Kevés szín esetén ez az exponenciális felső korlát nagyon durva. A szerző és Keszegh Balázs korábban belátta, hogy $c = 2$-re a legjobb algoritmus is leáll a $(2k-1)$-edik lépésben egy monokróm k-assal, $c = 3$-ra a legjobb algoritmussal a (k^2-1)-edik pontig biztosan ki tudjuk színezni megfelelően a pontokat, de biztosan elakadunk a k^2-edik lépésben, ha a pontok kedvezőtlen helyekre esnek. Ha a színek száma legalább 4, akkor a disszertáció 4.4. tétele szerint lényeges változás áll be a tekintetben, hogy meddig tudjuk megfelelően színezni a pontokat. Létezik ugyanis egy olyan online színezési algoritmus, mely $O(1.22^{ck})$ lépésig elkerüli a monokróm k-asokat, sőt, ha k elég nagy, akkor ez a lépésszám $O(1.46^{ck})$-ra emelkedik. A 4.2. alfejezet további részében két rokon problémát vizsgál a szerző. Az egyik, hogy ha azáltal akarjuk elkerülni a monokróm k-asok létrejöttét, hogy a pontok számának növekedésével szükség esetén a használt színek számát is emeljük, akkor milyen ütemben kell a színek számát emelni, a másik kérdés pedig az, hogy ha rögzítjük a színek számát és az a célunk, hogy a negatív síknegyedek által kimetszett monokróm részek méretét minél alacsonyabban tartsuk, akkor ez a méret milyen ütemben fog végtelenhez tartani.

A rövid 4.3. alfejezet az online, 4.4. alfejezet pedig a dinamikus intervallumszínezési feladattal foglalkozik. Ennél a feladatnál egy egyenesre érkező intervallumok alkotják a kiszínezendő hipergráf csúcsait, a hiperéleket pedig az egyenes egy pontja által lefogott intervallumok alkotják. Az online intervallumszínezésről szóló 4.3. fejezet annak az észrevételnek a következményeit foglalja össze, mely szerint az intervallumok online színezési feladata a 4.2. alfejezetben tárgyalt, negatív síknegyedekre vonatkozó online színezési feladat egy megszorított változatának tekinthető, amikor a síknegyedek csúcsai az $x + y = 0$ egyenesre esnek.

A 4.4. alfejezetben intervallumok egy adott sorrendben érkező sorozatát szeretnénk c színnel színezni úgy, hogy bármely időpillanatban, ha egy pontot az intervallumok közül elég sok tartalmaz, akkor a pontot fedő intervallumok nem mind ugyanolyan színűek. A 4.12. tétel azt mondja ki, hogy ha 2 színt használunk, akkor el tudjuk érni, hogy a legalább háromszor lefedett pontokra a fedő intervallumok ne legyenek azonos színűek, a 4.13. tétel pedig 3 szín használata esetén azt állítja, hogy létezik olyan dinamikus színezés, hogy bármely időpillanatban a legalább kétszer lefedett pontokat fedő intervallumok nem azonos színűek. A 4.12. és 4.13. tételek bizonyítása algoritmust ad a jó színezés megtalálására, melynek futási ideje n intervallum esetén $O(n \log n)$. Ezt mondja ki a 4.14. tétel. Megjegyzendő, hogy a dinamikus intervallumszínezési feladatok ekvivalensek a feneketlen téglalapokhoz tartozó statikus analóg színezési problémákkal, melyeket Keszegh Balázs korábban már megoldott, de a disszertáció a Keszegh által adott bizonyításnál egyszerűbb és gyorsabb algoritmust ad a jó színezés megtalálására.

A 4.5. alfejezet összehasonlító, áttekintő jellegű, azt foglalja össze, hogy az eddig vizsgált különféle színezési problémákkal kapcsolatban elért eredmények hogyan kapcsolódnak egymáshoz.

Az 5. fejezet egy új fogalmat vezet be, egy halmazrendszer önfedhetőségét. Azt mondjuk, hogy egy geometriai tér $\mathcal{S}$ halmazrendszere önfedhető, ha létezik egy olyan $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ önfedhetőségi függvény, hogy bármely $\{P_1, \dots, P_k\} \subset S \in \mathcal{S}$ esetén léteznek olyan $S'_1, \dots, S'_{f(k)} \in \mathcal{S}$ halmazok, melyekre $S = \bigcup_{i=1}^{f(k)} S'_i$ és $P_i \notin \operatorname{int} S'_j$ minden $1 \le i \le k$-ra és $1 \le j \le f(k)$-ra. Az önfedhetőség és az m_k színezési invariánsok kapcsolatáról szól az 5.2. tétel, mely szerint ha $\mathcal{S}$ egy önfedhető halmazrendszer egy f monoton önfedhetőségi függvénnyel, melyre $f(k) > k$, és létezik a legkisebb m_2 természetes szám, melyre a tér tetszőleges véges ponthalmaza kiszínezhető 2 színnel úgy, hogy ha egy $\mathcal{S}$-beli halmaz a pontok közül legalább m_2 pontot tartalmaz, akkor ezen pontok között mindkét szín előfordul, akkor $m_k \le m_2 \cdot f(m_2 - 1)^{\lceil \log k - 1 \rceil}$, azaz bármely véges sok pont a térben kiszínezhető k színnel úgy, hogy ha egy $\mathcal{S}$-beli halmaz a pontok közül legalább $m_2 \cdot f(m_2 - 1)^{\lceil \log k - 1 \rceil}$ pontot fed, akkor az általa fedett pontok között mind a k szín előfordul. Ez a tétel kellő motivációt ad arra, hogy bizonyos geometriai halmazrendszerekre belássuk azok önfedhetőségét és kiszámoljuk az önfedhetőségi függvényüket. Az 5.2. alfejezetben egy háromszög pozitív homotetikus példányairól a szerző belátja, hogy az $f(k) = 2k + 1$ önfedhetőségi függvénnyel önfedhető, míg egy négyzet homotetikus példányainak rendszere az $f(k) = 2k + 2$ önfedhetőségi függvénnyel önfedhető, és mindkét esetben az önfedhetőségi függvény optimális. Az 5.3. alfejezet egy tetszőleges konvex sokszög pozitív homotetikus példányaira bizonyítja be, hogy egy ck alakú lineáris önfedhetőségi függvénnyel önfedhető halmazrendszert alkotnak, ahol c csak az adott konvex sokszög geometriájától függ, de nem csak a csúcsok számától, mert a négyszögekhez választható minimális c érték is tetszőlegesen nagy lehet.

A 6. fejezet fő eredménye a 2.16-os tétel bizonyítása, mely azt mondja ki, hogy egy konvex sokszögtartomány pozitív homotetikus példányaira $\chi_m \le 3$, azaz létezik olyan, csak a sokszögtől függő m természetes szám, melyre bármely véges sok pont a síkon kiszínezhető 3 színnel úgy, hogy ha az adott sokszög egy pozitív homotetikus példánya legalább m pontot tartalmaz, akkor ezek a pontok nem lehetnek mind azonos színűek. Egyelőre nem ismert, hogy ebben a tételben mondhatunk-e $\chi_m \leq 3$ helyett $\chi_m = 2$-t. Annyit tudunk, hogy a 3.1. tétel miatt $\chi_m = 2$ fennáll egy háromszög pozitív homotetikus példányaira, illetve Ackerman, Keszegh és Vígh tétele szerint egy parallelogramma homotetikus példányaira. A 6.3. alfejezet ezt a két ismert esetet kiegészíti azzal az esettel, amikor a geometriai halmazrendszert alkotó elemek egy konvex sokszögtartomány egy rözített pontot tartalmazó pozitív homotetikus példányai. A szerző és Damásdi Gábor közös tételükben valójában erre az egy ponttal lefogható homotetikus sokszögcsaládra a $\chi_m = 2$-vel ekvivalens $m_2 < \infty$ állítás helyett az erősebb $m_k = O(k)$ becslést bizonyítják.

A 7. fejezet egyik fő eredménye, hogy egységkörlapokra és bizonyos általánosabb konvex lemezekre $\chi_m > 2$. A 7.1. alfejezet minden pozitív egész k, l számhoz definiál egy absztrakt $\mathcal{H}(k,l)$ hipergráfot, melyet nem lehet jól 2 színnel kiszínezni. A 7.2. alfejezet megkonstruálja ezeknek az absztrakt hipergráfoknak a geometriai realizációját egységkörlapokkal. Ebből már következik, hogy az egységkörlapok rendszerére $\chi_m > 2$. Természetesen vetődik fel a kérdés, hogy egységkörlapok helyett milyen más konvex síkidom eltoltjaira általánosítható ez az állítás. A rövid 7.3. alfejezet a szerző és Damásdi Gábor azon észrevételét mondja ki, hogy egy nyílt félkörlap eltoltjaival szintén realizálható a $\mathcal{H}(k,l)$ hipergráf. A 7.1 és 7.2. pontokban konstruált $\mathcal{H}(k,l)$ hipergráf és annak geometriai realizációja a csúcsoknak megfeleltetett $V(k,l)$ véges pontrendszerből, és a hiperéleket kimetsző véges sok nyílt egységkörlapból áll. A végesség miatt végtelen sok olyan körlap van, amelyik a $V(k,l)$ csúcshalmazt nem metszi. A 7.4. alfejezet a $k = l = m$ esetben kibővíti ezt a $V(m,m)$ halmazt egy végtelen halmazzá úgy, hogy bármely egységsugarú nyílt körlap legalább m pontot tartalmazzon a kibővített ponthalmazból, de megőrződjön az a színezési tulajdonság, hogy akárhogy színezzük is ki a kibővített pontrendszert, lesz egy nyílt egységsugarú körlap, melybe csak azonos színű pontok esnek. A 7.5. alfejezetben a szerző belátja, hogy a 7.1-7.3 fejezetekben leírt konstrukciók nemcsak egységkörlapokra és egy félkörlap eltoltjaira működnek, hanem tetszőleges olyan C konvex lemez eltoltjaira is, melynek van két olyan párhuzamos támaszegyenese, melyek egy-egy sima pozitív görbületű pontban érintik a konvex lemezt. A 7.6. alfejezet a 7.1. és 7.2. alfejezetek 3-dimenziós analogonját konstruálja meg, melyből következik, hogy a 3-dimenziós euklideszi tér egységgömbjeire $\chi_m \geq 4$. A 7.7 alfejezet egy függőleges félegyenest tartalmazó nyílt konvex halmaz segítségével definiálható hipergráfokról, az úgynevezett speciális csúsztatásláncokról (special shift-chains) mutatja meg, hogy 2 színnel jól színezhetőek, és egy jó színezésük lineáris időben megtalálható. A 7.8. alfejezet egy olyan konvex nyílt halmazt vizsgál a d-dimenziós euklideszi térben, melyhez van egy olyan egyenes, amelyik a halmazt egy nyílt félegyenesben metszi. A fő eredmény szerint a térnek egy ilyen nem korlátos halmaz eltoltjaival való fedése mindig felbontható két fedés uniójára. Egy ellenpélda mutatja, hogy 4 dimenziótól fölfelé a halmaz nyíltságára vonatkozó feltevést nem lehet elhagyni.

Tegyük fel, hogy C egy olyan konvex lemez, melynek van két olyan párhuzamos támaszegyenese, melyek egy-egy sima pozitív görbületű pontban érintik C-t. A 7.5. alfejezetben bizonyított állításokból kijön, hogy ekkor minden m természetes számhoz van a síknak olyan m-rétű fedése C eltoltjaival, mely nem szedhető szét két fedés uniójára. Körlap esetén ez az eredmény negatív választ ad Pach János egy 1980-ban felvetett kérdésére. Meglepő további fordulat, hogy ezeknél a fedéseknél a legnagyobb multiplicitással fedett pontban a rétegszámnak m-mel exponenciálisan kell nőnie. A 7.9. alfejezet szerint tetszőleges $d \geq 2$ dimenzióban igaz a következő tétel: Legyen $\mathcal{C}$ $\mathbb{R}^d$-beli, legfeljebb D átmérőjű és legalább v térfogatú halmazok egy rendszere, és jelölje $\pi^*_{\mathcal{C}}(n)$ a $\mathcal{C}$ duális daraboló függvényét (dual shatter function). Ekkor, ha $\mathcal{C}$ elemeivel m-rétűen lefedjük $\mathbb{R}^d$-t úgy, hogy egyik pont sincs több, mint $\frac{v}{\omega D^d}(\pi^*_{\mathcal{C}})^{-1}(2^{m-3})$ rétegben fedve, ahol ω a 2 sugarú d-dimenziós gömb térfogata, akkor a fedés felbomlik két fedés uniójára.

Végül a 7. fejezet utolsó két alfejezetében található annak a két tételnek a bizonyítása, hogy nyílt körlapokra $\chi_m = 4$, kongruens nyílt körlapokra pedig $\chi_m = 3$.

Összefoglalva, Pálvölgyi Dömötör értekezése egy jól felépített mű, melyben a szerző egy intenzíven kutatott területen bizonyít be jelentős eredményeket. A disszertáció és a szerző munkássága egyértelműen bizonyítja, hogy a szerző a témakörben alapos, széleskörű ismeretekkel rendelkezik, és a felvetődő problémákat újszerű ötletekkel és kreatív konstrukciókkal képes megoldani. A disszertációban bemutatott szerteágazó eredmények közül különösen fontosak a Pach János által felvetett, többszörös fedések dekomponálhatóságára vonatkozó kérdéskörben elért pozítív és negatív eredményei, és a fedésdekompozíciós probléma által is motivált χ_m színezési invariáns meghatározására vonatkozó eredményei különböző geometriai hipegráfcsaládokra. A szerző publikációi rangos nemzetközi folyóiratokban jelentek meg és magas nemzetközi érdeklődést kaptak. Az elért eredmények nagyrésze társszerzős. Feltételezve, hogy ezen eredményekhez a társszerzők egyenlő mértékben járultak hozzá, akkor is kijelenthető, hogy a szerző munkássága nyomán a kombinatorikus geometria sok értékes eredménnyel lett gazdagabb.

Az értekezés minden szempontból megfelel a követelményeknek. Határozottan támogatom az értekezés nyilvános vitára bocsátását és Pálvölgyi Dömötörnek az MTA Doktora cím odaítélését.

Kérdések és megjegyzések:

1. A χ_{rb} szivárványos kromatikus szám bevezetése a 2. oldalon ebben a formában nem látszik érdekesnek. Ha a színek k száma legalább annyi, mint a csúcsok száma, akkor minden csúcsot különböző színűre színezhetünk, és ezzel egy szivárványos színezést kapunk, tehát nincs legnagyobb az olyan k számok között, melyekre létezik szivárványos színezés. Ha megköveteljük, hogy minden színt fel kell használni, akkor a maximum a csúcsok száma. Ez sem tűnik egy érdekes invariánsnak. A megfelelő k számok minimuma érdekesebbnek látszó szám. Nem lehet, hogy másképp kellett volna definiálni χ_{rb}-t?

2. Az előzőhöz hasonlóan egy olyan színezés, melynél minden csúcs különböző színű, erős színezés lesz, így vagy nem létezik legnagyobb k, melyre van erős színezés, vagy ha megköveteljük, hogy minden színt fel kell használni, akkor χ_s a csúcsok száma. Ha $k = 1$ és minden csúcs (szükségszerűen) azonos színű, akkor a színezés erős, ezért a megfelelő k értékek minimuma sem ad hasznos színezési invariánst. Hogy érdemes definiálni a χ_s-t?

3. Ha egy hipergráf minden hiperélének páratlan sok pontja van, akkor a monokróm színezés páratlan, ezért $\chi_{odd} = 1$. Emiatt a $\chi \leq \chi_{odd}$ egyenlőtlenség nem tűnik igaznak.

4. A 24. oldalon a **2Comparable** eset szöveges leírásában jó lett volna hozzátenni, hogy a q pont lépcsőhöz csatolásával egyidőben *eltávolítjuk a lépcsőről azokat a pontokat, melyek q-tól ÉK-re esnek*, ahogy a következő oldalon található ábra is mutatja.

5. A 25. oldalon a **4Incomparable** esetnél a szöveges rész $q_1, \ldots, q_4$ pontjai az 6. ábrán $p_1, \ldots, p_4$-gyel vannak jelölve.

6. A 34. oldalon be van vezetve az a megállapodás, hogy az ék (wedge) szó egyszerre fogja jelölni a negatív síknegyedeket és azok metszetét egy adott, vagy éppen vizsgált pontrendszerrel. Ezt a konvenciót jó lett volna jóval előbb bevezetni, mivel már ezt megelőzően is használatban van ez a kettős jelentés. Például az ék *méretéről* akkor van értelme beszélni, ha azon a pontrendszerrel vett metszetet értjük. Metszetként kell gondolnunk az ékre

akkor is, amikor egy új pontról eldöntjük, hogy pontenciálisan tagja lehet-e egy éknek. Ilyenkor ugyanis nem az a lényeg, hogy az új pont benne van-e *abban* a negatív síknegyedben, amelyikkel az eredeti éket kimetszettük, hanem az, hogy *van-e egy olyan* negatív síknegyed, az eredeti éken kívül a q pontot tartalmazza.

7. A 4.4. tétel bizonyítása azzal indul, hogy *„Minden lépésben definiáljuk az online beérkezett pontok egy partícióját úgy, hogy a partíció mindegyik halmaza pontosan egy maximális monokromatikus éket tartalmaz.”*. A továbbiakban nem esik szó arról, hogy hogyan keletkezik ez a partíció. A 35. oldal tetején már úgy hivatkozik rá a bizonyítás, mint valami jól definiált dolog: *„... belátjuk, hogy az újonnan létrehozott (vagy megnövelt) ékhez társított partíciós halmaz viszonylag nagy.”*. Végülis hogyan definiáljuk ezt a partíciót? Egyértelműen definiálja a partíciót a tőle megkövetelt tulajdonság? A tulajdonságban a „maximális” szó „maximális elemszámút”, vagy „tovább nem bővíthetőt” jelent?

8. A 35. oldal első bekezdésében az i és a j mintha hirtelen szerepet cserélt volna. Ugyanebben a paragrafusban, amikor a $j \in \{1, 2, \dots, c\}$ egy színt jelöl, miért igaz, hogy *„j mindig kisebb c-nél.”*?

9. A 7.6. alfejezet a címében és a szövegben is többször a magasabb dimenzió*k*ról beszél, de abban konkrétan csak a $\mathcal{H}(k, l, m)$ hipergráfok konstrukciója, és azok 3-dimenziós geometriai realizációja kerül tárgyalásra. Mi a helyzet magasabb dimenziókban? Konstruálható egy $\mathcal{H}(k_1, \dots, k_d)$ hipergráfsereg, melyet nem lehet k színnel jól színezni, és mely realizálható a d-dimenziós tér egységgömbjeivel?

10. A 78. oldalon a $C(m; x)$ halmaz nemcsak a leírt esetben lehet nem értelmezhető. Az is előfordulhat, hogy C egy eltoltja $k < m$ pontot tartalmaz, de a C határára ráesik legalább $m - k + 1$ további pont.

11. A 7.21. állítás igaz, de a bizonyításnak az a mondata, hogy $C(m; x)$ és $C(m, x')$ halmazok határai pontosan egy pontban metszik egymást, nem mindig igaz. Előfordulhat, hogy a határoknak nincs közös pontja, vagy egy vízszintes határú nyílt félsík esetén a határok egybe is eshetnek.

12. A 7.28. lemmában fel kell tenni, hogy $k \geq m$, különben a lemma nyilván nem igaz.

Budapest, 2024. július 17-én.

....

Csikós Balázs