# Válasz Csikós Balázs bírálatára

Nagyon köszönöm Csikós Balázsnak is a bírálatát és a hihetetlenül alapos átolvasást, több pontatlanságot is talált, amik felett a már megjelent cikkeknek mind a szerzői, mind a bírálói átsiklottak korábban. 12 kérdést tett fel, melyekre alább válaszolok; némelyik kérdést rövidítettem, hogy csak a lényegre szorítkozzak.

**1. kérdés.** A $\chi_{rb}$ szivárványos kromatikus szám bevezetése a 2. oldalon ebben a formában nem látszik érdekesnek. [..] A megfelelő $k$ számok minimuma érdekesebbnek látszó szám. Nem lehet, hogy másképp kellett volna definiálni $\chi_{rb}$-t?

**2. kérdés.** [Az erős kromatikus szám definíciója is hibás.] Hogy érdemes definiálni a $\chi_s$-t?

**Válasz az első két kérdésre.** Teljes mértékben igaza van a bírálónak, véletlenül „legnagyobbat” írtam „legkisebb” helyett a szivárványos esetben, és ez összezavart. Korábbi előadásaimban mindig azt is megemlítettem, hogy szintén használt elnevezés ugyanerre a fogalomra az erős színezés, ez a helyes definíció mindkét esetben; tehát ez a paraméter egyenlő annak a gráfnak a kromatikus számával, amit úgy kapunk, hogy bármely két, egy hiperélbe eső csúcsot összekötünk. Mivel ez így egy tisztán (nem hiper) gráfelméleti fogalomra redukálódik, emiatt nem is szoktuk hipergráfokra vizsgálni, csak futólag említést tenni róla.

**3. kérdés.** Ha egy hipergráf minden hiperélének páratlan sok pontja van, akkor a monokróm színezés páratlan, ezért $\chi_{odd} = 1$. Emiatt a $\chi(\mathcal{H}) \leq \chi_{odd}(\mathcal{H})$ egyenlőtlenség nem tűnik igaznak.

**Válasz.** Valóban, elnézést az elírásért, a helyes egyenlőtlenségek így vannak:

$$\max(\chi(\mathcal{H}), \chi_{odd}(\mathcal{H})) \leq \chi_{cf}(\mathcal{H}) \leq \chi_{um}(\mathcal{H}) \leq \chi_{rb}(\mathcal{H}).$$

**4. kérdés.** A 24. oldalon a **2Comparable** eset szöveges leírásában jó lett volna hozzátenni, hogy a $q$ pont lépcsőhöz csatolásával egyidőben *eltávolítjuk a lépcsőről azokat a pontokat, melyek $q$-tól ÉK-re esnek*, ahogy a következő oldalon található ábra is mutatja.

**5. kérdés.** A 25. oldalon a **4Incomparable** esetnél a szöveges rész $q_1, \ldots, q_4$ pontjai az 6. ábrán $p_1, \ldots, p_4$-gyel vannak jelölve.

**6. kérdés.** A 34. oldalon be van vezetve az a megállapodás, hogy az ék (wedge) szó egyszerre fogja jelölni a negatív síknegyedeket és azok metszetét egy adott, vagy éppen vizsgált pontrendszerrel. Ezt a konvenciót jó lett volna jóval előbb bevezetni, mivel már ezt megelőzően is használatban van ez a kettős jelentés. [..]

**Válasz a 4., 5., 6. kérdésekre.** Elnézést kérek a fenti hibákért is.

**7. kérdés.** A 4.4. tétel bizonyítása azzal indul, hogy „Minden lépésben definiáljuk az online beérkezett pontok egy partícióját úgy, hogy a partíció mindegyik halmaza pontosan egy maximális monokromatikus éket tartalmaz." [..] Végülis hogyan definiáljuk ezt a partíciót? [..]

**Válasz.** Sajnos itt helytelen szót használtunk, partíció helyett részpartíciót kellett volna írnunk, mert néhány pont törlődik az eljárás során. A részpartíció minden osztályának van egy pontja, ami minden más ponttól balra és lefelé helyezkedik el. Ezenkívül minden osztályhoz hozzárendelünk egy éket, ami ezt a pontot tartalmazza, monokromatikus és maximális elemszámú. Mivel az algoritmus mindig a szomszédos ékektől eltérő színt ad az új érkező pontnak, ezért egy ilyen ék csak úgy nőhet, ha tőle balra-lentre érkezik egy újabb pont.

**8. kérdés.** A 35. oldal első bekezdésében az $i$ és a $j$ mintha hirtelen szerepet cserélt volna. Ugyanebben a paragrafusban, amikor a $j \in \{1, 2, \ldots, c\}$ egy színt jelöl, miért igaz, hogy „$j$ mindig kisebb $c$-nél."?

**Válasz.** Véletlenül fel volt cserélve az $i$ és a $j$ a második mondatban. Így az is világos, hogy valóban $j$ mindig legfeljebb $c$ (nem pedig szigorúan kisebb nála, köszönöm az újabb észrevételt), erre van szükségünk.

**9. kérdés.** A 7.6. alfejezet a címében és a szövegben is többször a magasabb dimenziókról beszél, de abban konkrétan csak a $\mathcal{H}(k, \ell, m)$ hipergráfok konstrukciója, és azok 3-dimenziós geometriai realizációja kerül tárgyalásra. Mi a helyzet magasabb dimenziókban? Konstruálható egy $\mathcal{H}(k_1, \ldots, k_d)$ hipergráfsereg, melyet nem lehet $k$ színnel jól színezni, és mely realizálható a $d$-dimenziós tér egységgömbjeivel?

**Válasz.** Igen, a konstrukció kiterjeszthető magasabb dimenziókba, de ennél erősebb dolgot is tudunk mondani. A 19. oldal alján említem, hogy az 5-dimenziós tér féltereivel bármilyen kúpszelet ($Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \leq 0$) kivágható az $x_3 = x_1^2, x_4 = x_1x_2, x_5 = x_2^2$ felületből, és emiatt ezekkel realizálható a Hales–Jewett hipergráf, tehát $\chi_m = \infty$. Azt nem tudom, hogy 3- és 4-dimenzióban végtelen-e $\chi_m$ félterekre illetve (egység)gömbökre.

**10. kérdés.** A 78. oldalon a $C(m; x)$ halmaz nemcsak a leírt esetben lehet nem értelmezhető. Az is előfordulhat, hogy $C$ egy eltoltja $k < m$ pontot tartalmaz, de a $C$ határára ráesik legalább $m - k + 1$ további pont.

**Válasz.** Valóban, helyesen az **a.** pontban azt kellett volna írni, hogy legfeljebb $m$ darab $P$-beli pontot tartalmaz az eltolt.

**11. kérdés.** A 7.21. állítás igaz, de a bizonyításnak az a mondata, hogy $C(m; x)$ és $C(m, x')$ halmazok határai pontosan egy pontban metszik egymást, nem mindig igaz. Előfordulhat, hogy a határoknak nincs közös pontja, vagy egy vízszintes határú nyílt félsík esetén a határok egybe is eshetnek.

**Válasz.** Valóban, a leírt bizonyításnak ez a mondata csak a nem elfajuló esetekre igaz.

**12. kérdés.** A 7.28. lemmában fel kell tenni, hogy $k \geq m$, különben a lemma nyilván nem igaz.

**Válasz.** Pontosabban az kell, hogy $m \geq k$, ez valóban hiányzott; mentségemre legyen mondva, hogy betű szerint idéztem az Erdős–Lovász cikkből.

Köszönöm, hogy támogatja a nyilvános vitára bocsátást és az MTA Doktora cím megítélését.

Budapest, 2024. október 3.

Pálvölgyi Dömötör