Opponensi vélemény
Pálvölgyi Dömötör
Geometriai Hipergráfok Szinezése
cimű akadémiai doktori értekezéséről

A doktori értekezés elsősorban geometriai hipergráfok különböző szinezését vizsgálja. A hipergráf csúcsai általában a sik/tér pontjai lesznek, élek pedig a csúcsok részhalmazainak egy családja. A részhalmazok általában geometriailag lesznek definálva (például él lehet azon csúcsok halmaza, amelyek egy körlap által vannak lefedve. Ebben a konkrét esetben az élek egy kör elrendezésnek felelnek meg) . Annál a kérdésnél, hogy milyen szinezéseket vizsgál a dolgozat, meg kell állnunk egy pillanatra.

Amikor a geometriai hipergráfok szinezéséről beszélünk, akkor legtöbbször a csúcsok (pontok) lesznek szinezve, a kérdések pedig arról szólnak hogy tudjuk-e a hipergráfok egy osztályának minden tagját úgy szinezni, hogy minden él rendelkezzen egy előre előirt kritériumnak megfelelő szinű csúcsokkal. A cél persze a lehető legkevesebb (vagy a kritériumtól függően a lehető legtöbb) szin használata.

Számomra a Fejes Tóth László által létrehozott diszkrét geometria legszebb aranykorát idézik a problémák. Itt is a problémákat valós alkalmazások inspirálják, de ha a sorrend forditott és egy tétel motivál rokon feladatokat akkor is kiderül, hogy az új probléma életszerű kérdéshez kapcsolódik. Talán fontos kiemelni az értekezés bevezetőjének azon mondatát, amelyik szerint a geometria hipergráfok jó és polikromatikus szinezésének szisztematikus vizsgálatát 1980-ban Pach János kezdeményezte.

A bevezetőt olvasva azon tünődtem, hogy szellemes dolog lenne (vagy éppen kimondottan hasznos az alkalmazhatóság indoklásakor) elgondolkozni azon, hogy a mai ‘háborús’ hangulatban nem célszerű-e aknamezők nyelvezetén leirni szinte mindegyik kérdést. Egy telepitett aknának lehet hatósugara, lehet lefolytott aknáról beszélni ami csak egy szektorban okoz kárt, lehet wifi aktivizált aknákról beszélni, lehet kontrolálni az aktiv időintervallumokat, lehet beszélni többszörösen biztositott aknamezőről, lehet meghibásodási kockázatról beszélni és ezért több osztályba sorolni az aknákat, lehet olcsó és drágá aknákról beszélni.

A szinezési kritériumok szellemesek. Csak néhányat emlitve beszélnek szivárványos szinezésről (ahol egy él minden csúcsa különböző szinű), konfliktus mentes szinezésről (ha minden élnek van olyan csúcsa, amelynek szine különbözik az adott él többi csúcsától), jó szinezésről (ha minden él tartalmaz két különböző szinű csúcsot), polikromatikus szinezésről (ha minden élen előfordul az összes szin).

A doktori értekezés a jó és a polikromatikus szinezésekről szól. Ezért kicsit többet kell irnunk a konkrét definiciókról. A szinek legkisebb k számát, melyre létezik egy adott $\mathcal{H}$ hipergráfnak egy jó szinezése, $\chi(\mathcal{H})$ -val jelöljük. Előfordulhat hogy ha egy élnek nincs elég sok csúcsa, ilzenkor nem is létezik megfelelő szinezés. Emiatt a jelölést szokás pontositani és egy m indexet használni ami technikailag azt jelenti, hogy egy adott $\mathcal{F}$ hipergráf család esetén $\chi_m(\mathcal{F})$ -val jelölik azt a legkisebb k értéket, amelyhez valamilyen m esetén minden olyan $\mathcal{F}$ beli $\mathcal{H}$ hipergráf esetén amelyek élei legalább m csúcsot tartalmaznak létezik megfelelő k szinezés. Ha ilyen k nincs, akkor $\chi_m(\mathcal{F})$ =∞. Polikromatikus hipergráf családhoz a következő szinezési számot szokás rendelni: $m_k(\mathcal{F})$ azt a legkisebb m számot jelenti (ha létezik) amelyre minden olyan $\mathcal{F}$ beli $\mathcal{H}$ hipergráf, amelynek élei legalább m csúcsot tartalmaznak polikromatikusan szinezhető. Ha nincs ilyen m akkor $m_k(\mathcal{F}) = \infty$.

A fennti két definicióból azonnal következik, hogy $m_2(\mathcal{F}) < \infty$ akkor és csak akkor, ha $\chi_m(\mathcal{F})$ =2 továbbá az is nyilvánvaló, hogy $m_k(\mathcal{F}) \leq m_{k+1}(\mathcal{F})$.

A doktori értekezést olvasva egyrészt úgy tűnik, hogy a szerzőnek jelentős szerepe van egy bizonyitottnak hitt sejtés újrafelfedezésében és népszerüsitésében, masrészt ez a sejtés inspirálhatta a szerző újabb vizsgálatait és új saját sejtések kimondását (utóbbit már Keszegh Balázzsal közös munkákban). A most emlitett sejtés mai is nyitott és formálisan azt mondja , hogy $m_2(\mathcal{F}) < \infty$ esetén $m_k(\mathcal{F}) < \infty$ is igaz minden k-ra es örökletes $\mathcal{F}$ családra (elismételve jelölés függetlenül szavakkal válik a sejtés igazán hihetővé). A Keszegh Balázzsal közös erősebb sejtés azt mondja, hogy $m_k(\mathcal{F}) \leq (k-1)(m_2(\mathcal{F})-1)+1$ igaz minden k-ra és örökletes $\mathcal{F}$ családra. Fontos megemliteni, hogy ez az egyenlőtlenség több geometria család esetén éles, ahogy ez az 5. fejezetben kiderül.

Pálvölgyi Dömötör a doktori értekezésében 14 megjelent és 3 megjelenés alatt álló cikk eredményeit dolgozza fel, vagy használja. A hét fejezetben feldolgozott eredmények listája igen hosszú, egy fejezeten belül is több tétel, következmény, esetenként ellenpélda kerül bizonyitásra.

Az opponensi vélemény irásakor a következő taktikát követtem. A bevezető, a definiciók, és az összefoglaló fejezet átfutása után a 102. oldal úgynevezett összefoglaló táblázatát vizsgáltam meg és próbáltam megérteni annak kiterjedtségét. Ennek a táblázatnak (amit itt a mostani paragrafus után a szöveg közé másolok) a sorai geometria hipergráfok él tipusait jelentik. A táblázat ennek megfelelően 16 esetben sorol fel konkrét bizonyitott χ_m és m_k értékeket (6 esetben csak az egyikre). A konkrét értékek mellett szerepel a bizonyitást tartalmazó cikk hivatkozása. Bekarikáztam azokat, amelyek a szerző saját vagy társszerzős publikációi. A 26 konkrét érték közül 19 közvetlenül Dömötör nevéhez kapcsolódik. Ez önmagában is mutatja, hogy a konkrét eredmények felsorolása a legszükségesebb előzménnyekkel jogosan vett igénybe 11 oldalt.

A Summary Table

basic shape	translates	homothets
bottomless rectangle	$\chi_m = 2$ [42] $m_k \leq 2k - 1$ [15, 48]	$\chi_m = 2$ [42] $1.67k - 2.5 \leq m_k \leq 3k - 2$ [7]
triangle	$\chi_m = 2$ [75] $m_k = O(k)$ [37]	$\chi_m = 2$ [45] $m_k = O(k^{4.09})$ [17] + [49]
convex polygon	$\chi_m = 2$ [69] $m_k = O(k)$ [37]	$2 \leq \chi_m \leq 3$ [50] $\chi_m = 2$ for squares [2]
non-convex polygon*	$3 \leq \chi_m$ [67]	$3 \leq \chi_m$ [67]
stabbed convex polygon	$\chi_m = 2$ [69] $m_k = O(k)$ [37]	$\chi_m = 2$ [22] $m_k = O(k)$ [22]
stabbed disk	$\chi_m = 2$ [22] $m_k = O(k)$ [22]	$\chi_m \leq 3$ [1] $\chi_m = 3$ [22]
disk	$\chi_m = 3$ [23, 62]	$\chi_m = 4$ [22]
smooth body**	$\chi_m = 3$ [24, 62]	$\chi_m = 4$ [22]

Ezután néztem át a fejezeteket.

2. fejezet

Ez a fejezet egy önálló 10 oldalas cikknek tekinthető, amely a geometriai családok χ_m és m_k értékeivel kapcsolatos legérdekesebb eredmények áttekintését tartalmazza.

A 2. fejezetben felsorolt tételeknek csak egy része kerül bizonyitásra a 3.-7. fejezetekben. A szerző, talán a több társszerzős cikk miatt, az elvártnál több publikációt vett bele az értekezésébe. Végül ez az értekezés erényére vált persze. Itt, amikor a fejezetek tartalmát tekintem át fejezetenként csak egy-két eredményt emelek ki és igy illusztrálom a fejezetek tartalmát.

3. fejezet.

Ez a fejezet 3, Keszegh Balázzsal közös cikkről szól. A fejezet azokkal a hipergráfokkal foglalkozik, ahol a csúcsok az R^3 pontjai, élei pedig egy térnyolcad eltoltjai a természetes tartalmazási relációval . Amikor a szerző az $5 \leq m_2 \leq 9$ egyenlőtlenséget bizonyitja akkor a felső korláthoz minden véges sok ponthalmazt két szinnel szinez úgy, hogy bármely eltolt térnyolcad, ami legalább 9 pontot tartalmaz, tartalmaz mindkét szinű pontot. Másrészt (és ez egy trükkös ekvivalencia észrevételén múlik) az alsó korlát bizonyitásakor azt mutatja meg, hogy bármely háromszöghöz lehet véges sok pontot konstruálni úgy, hogy akárhogy szinezi két szinnel valaki őket, van olyan eltolt haromszög, ami pontosan négy pontot tartalmaz és azok azonos szinűek.

4. fejezet

Ez a fejezet intervallumokra és sikbeli szektorokra, mint tartományterekre épülő geometriai hipergráfok online szinezésével foglalkozik és egy Keszegh Balázzsal és Nathan Lemonsszal közös cikkre épül. Kiderül, hogy a sikbeli szektrok szinezése az intervallumokra vonatkozó szinezésekre épül. Egy tipikus tétel úgy hangzik, hogy

Egy N intervallumból álló család intervallumai online módon (azaz ismeretlen sorrendben kapva az intervallumokat) kiszinezhetőek $\Theta(\frac{\log N}{k})$ szinnel úgy, hogy a szinezés minden lépésénél a sik minden pontja amelyik legalább k intervallumhoz tartozik le van fedve két különböző szinü intervallummal.

Tardos Gábor vetette fel azt a kérdést, hogy online módon szinezhetőek-e a pontok siknegyedekre nézve úgy, hogy a szinezés minden lépés után jó marad. Tardos Gábor kérdését a szerző egy Keszegh és Lemonsszal közös cikkben negativan válaszolja meg. Megmutatják, hogy van egy olyan $N = 2^{cm} - 1$ pontból álló pont sorozat úgy, hogy a pontok minden online c szint használó szinezési eljárásának lesz egy pillanata úgy, hogy egy $m + 1$ pontot tartalmazó siknegyed csupa azonos szinű pontot tartalmazzon.

5. fejezet

Ez a fejezet a szerzőnek, arra a Keszegh Balázzsal közös cikkére épül, amelyben először a következő szép elemi geometria tételt bizonyitják:

Ha adott egy C konvex sokszög és belsejében k pont, akkor ki lehet jelölni ck (ahol c csak C-től függ) homotetikus példányát C-nek úgy, hogy azok lefedjék C-t, de egyikőjük belseje se tartalmazzon kiválasztott pontot. Ezt a fedési tulajdonságot a szerző úgy fejezik ki, hogy a C konvex sokszög homotetikus példányainak családja önfedő ck értékkel.

Háromszögek és négyzetek esetén pontos önfedési konstansot is bizonyit a szerző. Hometetikus háromszögek családja $2k + 1$ értékkel, a négyzetek hometetetikus családja pedig $2k + 2$ értékkel önfedő.

A fennti önfedési tétel alkalmazható olyan hipergráfokra, ahol a csúcsok sikbeli pontok, élei pedig egy sokszög homotetikus példányai a természetes tartalmazási relációval. A szerző bebizonyitja, hogy ha egy konvex sokszög homotetikus példányai esetén $m_2 < \infty$, akkor m_k polinomiálisan növekszik.

6. fejezet

Ez az 5 . fejezet vizsgálatának folytatása és egy Keszegh Balázzsal közös cikkre épül. A fejezet olyan hipergráfokkal foglalkozik, ahol a csúcsok sikbeli pontok, élei pedig egy sokszög homotetikus példányai a természetes tartalmazási relációval. A szerzők bebizonyitják, hogy $\chi_m \leq 3.$ Keszegh Balázs és a szerző annak tudatában, hogy háromszögekre és négyzetekre $\chi_m = 2$, azt sejtette, hogy ugyanez igaz marad általánosan C konvex lemezekre. Más szavakkal azt sejtették, hogy van olyan C-től függő m , hogy bármely véges ponthalmaz megenged olyan 3 szinezést , hogy C bármely homotetikus példánya amely legalább m pontot tartalmaz, tartalmaz két különböző szinű pontot. Ezt a szerző Damásdi Gáborral közös cikkben cáfolta meg, konstrukciójukat a 7. fejezet tartalmazza.

7. fejezet

Ez a fejezet a szerzőnek egy Pach Jánossal közös cikkére épülve indul, ezért a hipergráf szinezési eredmények a sik többszörös fedésének több fedésre való szétbontásának nyelvezetén vannak megfogalmazva.

A többszörös fedések két fedésre történő felbonthatóságának története önmagában is nagyon érdekes. A kérdést egységkörökből álló fedésekre Pach János vetette fel 1980-ban. Kezdetben Pach es Mani egy nem publikált kéziratban úgy gondolták, hogy 33-szoros fedéssel ez mindig megtehető. Winkler azt sejtette, hogy a felbontás már 4-szeres fedés esetén is megtehető. 30 évig az volt az uralkodó sejtés, hogy minden nyilt konvex lemezhez létezik egy m egész szám, hogy eltoltakból álló m-szeres fedés mindig szétválasztható két fedéssé. Ezt 1986-ban Pach igazolta közeppontosan szimmetrikus nyilt sokszögekre. 25 év elteltével végül ez igazolást nyert három szerzőpáros cikkeiben (Tardos/Tóth; Pálvölgyi/Tóth; Gibson/Varadarajan) az össze nyilt konvex sokszögre.

Példaként álljon itt a fejezet egyik legfontosabb állitása (ez Pálvölgyi Dömötörnek az ArXivra feltöltött dolgozata), miszerint

Minden pozitiv m egész esetén létezik a siknak nyilt egységkörökből álló m-szeres fedése, amit nem lehet két fedéssé szétválasztani.

Ezt az eredményt általánositotta, és hasonló negativ eredményt bizonyitott a szerző és Pach János nyilt körök helyett, nyilt konvex lemezekre abban az estben, ha C-nek van olyan párhuzamos támaszegyenes párja ahol az érintkezési pontban a határ pozitiv görböletű.

Érdekes az a magasabb dimenziós negativ eredmény is, amit a szerző bizonyitott Naszódi Márton és Taschuk egy konstrukcióját alkalmazva. Az állitás azert is érdekes, mert elentéte annak, amit az intuició sugalna:

Van egy olyan 3-dimenziós korlátos konvex C halmaz úgy, hogy a 4 dimenziós $C \times [0, \infty)$ eltoltjainak van olyan térfedése ahol minden pont végtelen sokszor van fedve mégse lehet a fedést két fedéssé széválasztani.

Több pozitiv állitás kerül bizonyitásra többszörös fedések két fedésre való szétbontásával kapcsolatban A) Magasabb dimenziós terekben egység gömbel történő fedések egy speciális osztályára, B) Sikon ha véges pont halmaz van háromszorosan fedve egy nem korlátos nyilt konvex halmaz eltotljaival, C) Ha a d dimenziós tér van fedve nem korlátos, egyenest nem tartalmazó, nyilt konvex halmazok eltoltjaival.

Értékelés:

Az értekezés keretében bemutatott eredmények azt bizonyitják, hogy a szerző érett kutató, számos évek óta nyitott probléma vizsgálata során ért el új jelentős eredményt. Meglepő ellenpéldái, új sejtései ösztönzően hatnak a terület fejlődésére. A tézisek nagyon jó áttekintését adják a terület mai állapotának. A bizonyitások elegánsak és változatosak, az ellenpéldák ötletgazdagok. Mindezek alapján az értekezés tudományos eredményeit messzemenően elegendőnek tartom az akadémiai doktori cim megszerzéséhez. Melegen javaslom a biráló bizottságnak a nyilvános vita kitűzését és az értekezés elfogadását,

Budapest 2024. 04. 05.

Bezdek András