Opponensi vélemény Pálvölgyi Dömötör
Coloring Geometric Hypergraphs
c. MTA Doktori Disszertációjáról

A disszertáció 102 oldalú, 39 ábrát tartalmazó, szép kiállítású gondos munka, amely a pályázó 15 cikkére hivatkozik. Ezek közül 6 a Discrete and Computational Geometry, 3 a Journal of Computational Geometry, 1-1 az Advances in Mathematics, Computational geometry, Combinatorica, illetve Journal of European Mathematics vezető folyóiratokban jelent vagy jelenik meg.

A dolgozat első két fejezete egy elméleti bevezetőt és az eredmények áttekintését tartalmazza. A további öt fejezetben a legfontosabbnak itélt eredmények részletes bizonyításokat is tartalmazó tematikus leírását láthatjuk. A munka irodalomjegyzékkel és az eredmények táblázatban való összefoglalásával zárul.

Mivel az irodalomban nincsenek külön kiemelve a dolgozat alapját képező cikkek annak felmérése, hogy az eredmények mennyiben újak vagy a szerző eredményei arra kényszerítik az olvasót, hogy megjegyezze a szerző dolgozatainak a sorszámát elkerülve az oda-vissza lapozgatást. Ez nem túl kényelmes, de az olvasás egy idő után meggyőz arról, hogy felesleges, a szerző csak saját bizonyításokat közöl, ezzel is jelezve, hogy minden, ami a dolgozatban pontosan van tárgyalva az részben vagy teljesen saját eredmény.

Kétségtelenül van a dolgozatban számos eredmény, ami a szerző munkásságát az általa vizsgált területeken megkerülhetetlenné teszi. Említsük először a sokszög eltoltjai által alkotott többszörös fedések felbonthatóságáról szóló Tóth Gézával közös tételt, ami egy közel 30 éves intenzív kutatást zár le.

2.6. Tétel (Pálvölgyi-Tóth [69]). *Egy sokszög eltoltjaira $\chi_m = 2$ akkor és csak akkor, ha a konvex szögeinek bármelyik párja olyan, hogy vagy tartalmazza az egyik szög a másikat, vagy ugyanez a pár előfordulhat egy konvex sokszögben is.*

Inspiráló a szerző azon példája is, mellyel cáfolja, hogy tetszőleges nyílt, korlátos és konvex C halmaz esetén, egy eltoltjaiból álló m szeres fedés, mindig szétbontható két fedés uniójára. Az eredeti ellenpélda egységkörökkel valósítja meg a felbonthatatlan fedést (a dolgozatban ez a 7.1 Tétel), a hetedik fejezetben találunk további hozzájárulásokat is a kérdéskörhöz. Pach Jánossal közös általánosabb eredményük:

7.2. Tétel (Pach-Pálvölgyi [62]). *Legyen C nyílt konvex síkbeli halmaz, aminek van olyan párhuzamos támaszegyenes párja, mely érintési pontjaiban a görbület pozitív. Akkor minden pozitív m esetén van olyan m-szeres fedése a síknak a C eltoltjaival, mely nem bontható két fedés uniójára.*

A bizonyítás mélyén egy két színnel nem színezhető hipergráf konstrukció húzódik (melyet a 7.1 fejezetben ír le a szerző), ez a konstrukció Pálvölgyi Dömötörnek a CDG folyóiratban megjelent cikkében bukkan fel először. Ugyanezen fejezet tartalmazza a magasabbdimenziós esetekre vonatkozó negatív eredményeket is, melyek a síkbeli konstrukció természetes kiterjesztésével adódnak. Szintén itt olvashatjuk a nem korlátos egyenest nem tartalmazó tartományok eltoltjaira vonatkozó pozitív állítású 7.6 Tételt, mely következménye az általánosabb 7.6' Tételnek. Ezen utóbbi bizonyítása üdítően szellemes. A fejezetben található további pozitív eredmények azt mutatják, hogy a téma jelenleg is intenzíven kutatott, a jövőben is érdekes eredményekre számíthatunk. Ezek közül az alábbi állítás, (mely bizonyítása a 7.11 fejezetben található) különösen is figyelemre méltó:

2.30. Tétel (Damásdi-Pálvölgyi [24]). *Bármely C síkbeli konvex testre $\chi_m \leq 3$, azaz van olyan pozitív egész m szám, hogy a sík bármely véges P ponthalmaza 3-színezhető úgy, hogy nincs olyan eltoltja C-nek, amely P legalább m olyan pontját tartalmazza, amelyek mindegyike azonos színű.*

A harmadik fejezet szintén fedés-felbonthatósági tételek bizonyításait tartalmazza. A 2.24 Tételben igazolódik, hogy olyan térnyolcadok esetén, melyek egymás eltoltjai teljesül az $5 \leq m_2 \leq 9$ állítás, azaz tetszőleges P ponthalmaz tetszőleges két színnel való színezése esetén, ha egy részhalmaznak legalább 9 eleme esik egy térnyolcadba, akkor az tartalmaz elemet mindkét színből, azonban van olyan P pontrendszer, aminek tetszőleges két színnel való színezéséhez meg lehet adni egy alkalmas térnyolcadot, ami legalább 4 pontot tartalmaz és a benne levő pontok azonos színűek. Az utóbbi állítás következménye a 3.2 Tételnek, mely háromszögek eltoltjainak tekintetében igazolja, hogy minden háromszöghöz található egy P pontrendszer úgy, hogy ennek tetszőleges 2-színezése esetén van a háromszögnek egy eltoltja, mely pontosan 4 pontot tartalmaz a rendszerből és ezek azonos színnel vannak színezve.

A negyedik fejezet online és dinamikus színezésekről szól. Az online színezés esetén a színezendő objektumok előre nem ismertek, egyesével érkeznek és minden pillanatban fenn kell tartani a már meglévő jó színezést. A dinamikus színezés esetén a módszer ugyanez, csak ismerjük előre az érkező objektumokat és azok érkezési sorrendjét is. Az állítások síkbeli ékekre illetve intervallumokra vonatkoznak, összefoglalóan kijelenthetjük, hogy ötletes, nem triviális konstrukciók és komoly eset analízis vezet el a mutatós eredményekhez.

Az ötödik fejezet egy új geometria fogalmat jár körbe, egy halmazcsalád *önfedhetőségét.* Az S zárt geometriai halmazok gyűjteménye önfedhető, ha létezik egy olyan f *önfedhetőségi függvény* [1], hogy bármely $S \in \mathcal{S}$ és bármely véges, k elemű $P \subset S$ ponthalmaz esetén létezik egy olyan $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, $|\mathcal{S}'| \leq f(k)$, hogy $\cup\mathcal{S}' = S$, de P egyetlen pontja sincs egy $S' \in \mathcal{S}'$ belsejében sem. Az önfedhetőségről szóló tételek (5.3 - 5.7 Tételek) különféle konvex sokszögek esetén adnak becslést vagy pontos értéket $f(k)$-ra. Fontos észrevétel az, hogy az önfedhetőség mértéke sokszögek esetén inkább függ a sokszög alakjától mint a csúcsok számától. A figyelem erre a fogalomra az 5.2 Tétel kapcsán összpontosult, ahol ezen mérték alkalmas alsó becslése, az állítás feltételeként jelenik meg. Habár az 5.2 Tétel általánosítása, egy 2013-ban megjelent háromszög színezéseket tartalmazó cikk megfelelő tételének, a fogalom önmagában is érdekes és a háromszögre és téglalapokra vonatkozó éles eredmények is ötletes bizonyításokat követelnek. A legösszetettebb bizonyítást ebben a témakörben a következő állítás követeli:

5.3. Tétel (Keszegh-Pálvölgyi [47]). *Egy adott C konvex sokszög összes homotetikus példányának családja őnfedhető $f(k) \leq ck$ értékkel, ahol a c állandó csak C-től függ.*

A bizonyítás során a szerzők használják az általános Delaunay felbontást, mely esetükben triangulációnak tekinthető.

A hatodik fejezet a következő tétel bizonyításával kezdődik.

2.16. Tétel (Keszegh-Pálvölgyi [50]). *Egy konvex sokszög homotetikus példányaira $\chi_m \leq 3$.*

A bizonyítás szintén az általános Delaunay triangulációra épül, a nehézséget alapvetően az okozza, hogy a megfelelő gráfnak akármilyen nagy fokszámú csúcsai lehetnek. Ezért a kiindulási pontot a Poh-Goddard tétel adja, mely szerint tetszőleges síkgráf 3-szinezhető úgy, hogy minden egyszínű komponens út. A fejezetben találunk még egy pozitív állítást,

[1] Talán jobban hangzik magyarul az *önfedési függvény* kifejezés.

mely ugyanezen probléma azon esetéről szól, amikor csak olyan homotetikus példányokat tekintünk, melyek tartalmazzák az origót. A szerző megjegyzi, hogy a $\chi_m = 2$ sem lehetetlen konvex sokszögekre, ez az erősebb állítás háromszögekre, négyszögekre, valamint olyan homotetikus példányokkal való fedésekre melyek tartalmazzák az origót, igaz.

Rátérve a dolgozat értékelésére leszögezhetjük, hogy a disszertáció a modern kombinatorikus geometriai kutatások fősodrásához tartozó területekkel foglalkozik, eredeti és sokszor igen általános módon. A szerzőnek a témakör vezető egyéniségeivel illetve fiatalabb kollégáival írt olyan cikkein alapul, melyek a terület vezető folyóirataiban jelentek meg. A matematikai tartalom messze megfelel a szokásos elvárásoknak, a szerző nagy rutinnal használja a kombinatorika és a konvex geometria eszközeit, otthonosan mozog az ötletes, rövid indoklások világában ugyanúgy mint az ismert eredményeket is beépítő, hosszabb diszkussziókat szisztematikusan végig gondoló, nagyobb lélegzetvételű bizonyítások megalkotásában. A dolgozat stílusa, szerkezete, áttekinthetősége, nyelvhasználata egyaránt remek, lényegében nem tartalmaz sajtóhibát, ami egy ilyen terjedelmű munkában kíváló teljesítmény. A tézisek megfogalmazása tömör és világos, a dolgozat tartalma egységes, melyben a fejezetek eredményei könyvszerűen összekapcsolódnak. Új fogalmak bevezetése nem jellemző, de rendkívűl értékelhető a szerző munkamódszere, mely az általa vizsgált problémák teljeskörű lezárására koncentrál, elvarr minden szálat amit tud, és amit nem, azt megoldandó problémaként azonnal interpretálja. A bizonyítások a megfelelő pontossággal tárgyaltak, néhány esetben nehezíti a követést a bizonyításonként bevezetett 2-3 köznapi elnevezés (égtájak szerinti elhelyezkedés, staircase, stairpoint, left-good, right-good, left-right-neighbor, potential member, threatens, wedge-neighbors) matematikai jelentésének a megjegyzése még ha egyesével beszédesek is ... Olyan kérdésem, melyre adott válasz befolyásolhatná a dolgozat szakmai megítélését nincs, a következő kérdések csak természetes kíváncsiság által hajtottak, nem feltétlenül igényelnek részletes, írott választ:

1. A 2.10 Tétel szerint poliéderek eltoltjainak családjára $\chi_m > 2$. Van-e olyan poliéder, melyre χ_m értéke pontosan ismert? Például mi a helyzet tetraéder vagy kocka esetén?

2. Az általános Delaunay trianguláció használata a homotetikus példányok fedésével kapcsolatos problémáknál természetesen vezet el a csúcsok színezési kérdéseihez, mely felvetésében a kapcsolódó hipergráf színezésére vonatkozik. Ugyanakkor a felbontás szolgáltat egy gráfot is, a felbontás élgráfját, mely szintén színeződik. Ismer-e olyan vizsgálatot, mely ezen másodlagos színezésre vonatkozó valamely további feltétel teljesülését is megköveteli? (Példaként: Bizonyos a másodlagos gráfra vonatkozó feltételek esetén, lehet a hipergráf csúcsait mondjuk két színnel jól színezni úgy, hogy valamelyik egyszínű komponens a másodlagos gráf élrendszerére nézve élösszefüggő legyen?)

A fentiek alapján kijelenthetem, hogy a disszertáció anyaga megfelel az MTA doktorával szemben támasztható szakmai követelményeknek. **Javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását, és melegen támogatom a pályázónak az MTA doktora cím odaítélését.**

2024 április 15

G.Horváth Ákos
MTA Doktora