Válasz Baran Sándor opponensi bírálatára

Egyenként válaszolok a felmerült kritikákra, kérdésekre. Először a szabad formátumban megfogalmazott észrevételekre reagálok, majd utána tételesen az opponensi kérdésekre.

Az 1. fejezet sztochasztikus részekben találtam némi inkonzisztenciát a jelölésekben (pl. a 30. definícióban nem világos, hogy a θ a stacionárius eloszlást jelöli, ami a 32. definícióban már π, bár ez utóbbi explicit nem lett kimondva). Ugyanitt nem minden fogalom (pl. reverzibilitás) lett definiálva.

Válasz: A bírálónak teljesen igaza van, a stacionárius eloszlásra π a standard jelölés, és a 30. definícióban is π-vel kellett volna jelölni. Ugyanígy a reverzibilitást is jó lett volna definiálni.

102 definíció 4. pontjánál nem világos mik a p_j valószínűségek.
Válasz: Sajnos itt megint egy gépelési hiba van , itt p_j és p_{j+1} helyett π_j és π_{j+1}-nek kellene szerepelnie helyesen. Ezek nem valószínűségek, hanem előjeles permutációk. Ráadásul a transzformációk indexelésében is van egy gépelési hiba, π_i-ből π_j-be $j-i$ darab transzformációval (rendező reverzióval) jutunk el, de ha a transzformációkat 0-tól indexeljük, akkor az utolsó transzformáció indexe $j-i-1$ lesz. Tehát a 102. definíció 4. pontjában a képlet helyesen az új legrövidebb reverziós rendező szcenárióra:

$$\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_i, \pi_i \circ tr_0, \pi_i \circ tr_0 \circ tr_1, \ldots \pi_i \circ tr_0 \circ tr_1 \circ \ldots \circ tr_{j-i-1} = \pi_j, \pi_{j+1}, \ldots \pi_k.$$

A 125. tételből hiányzik az állítás. Az eredeti cikkben „can be defined" szerepel.
Válasz: Valóban, a „can be defined" hiányzik. Azt állítjuk (akartam állítani), hogy a megadott mennyiségű és tulajdonságú párhuzamos lánc definiálható.

A 202. oldalon levő 139. definíció tulajdonképpen szerepel már a 25. oldalon is.
Válasz: Valóban, azonban kicsit más jelölésekkel. Talán jobb lett volna úgy írni, hogy itt megismételjük a 34. definíciónak a páros gráfokra vonatkozó részét, és a jelölések ebben a fejezetben az itt megadottak lesznek. A 12.1. alfejezetben azért érdemes a páros fokszámsorozatok két pontosztályán levő fokszámsorozatokat (d_i) és (f_j)-vel jelölni, mert itt k színre k db fokszámsorazatunk lesz, így mind a d-k, mind az f-ek pár oldallal később dupla indexűek lesznek (pont indexe, szín indexe). Viszont általában ahol csak egy páros fokszámsorozattal foglalkozunk, ott a standard jelölés az, hogy minden fokot d-vel jelölünk, és akkor a $d_{i,j}$ az i-edik osztályban a j indexű pont fokát jelöli. A 12.1.-ben el szerettem volna kerülni a tripla indexelést. (Általában is a munkám során nehézséget jelentenek a jelölések, mivel a matematika több tudományterületéről jövő fogalmakkal, matematikai entitásokkal dolgozom, és a különböző területekről jövő jelölések üthetik egymást. Pl. gráfelméletben standard jelölés egy fát T-vel jelölni (tree), Markov lánc Monte Carlo módszerekben T jelöli az átmeneti valószínűségeket (transition probabilities), transzformációs nyelvtanok esetén T jelöli a terminális szimbólumok halmazát. És akkor ha egy leszármazási kapcsolatokat jelölő T fán a biológiai makromolekulák változását egy (T, N, S, R, P) sztochasztikus transzformációs nyelvtannal modellezzük, és ebben a modelben a Bayes statisztikai vizsgálathoz

a poszterior eloszlásból egy T átmeneti valószínűségű Markov lánc Monte Carlo módszerrel akarunk mintavételezni, akkor egy munkában ugyanaz a betű három különböző dolgot jelenthet.)

A [126] cikk a folyóirat honlapján az itt megadottaktól eltérő adatokkal szerepel (más a szerzők sorrendje, a cikk címe és az oldalszám

Válasz: A szerzők sorrendje előtt én is értetlenül állok. Még megvan a 2014. július 31-i emailünk a TCS-tól, amelyben értesítenek a kézirat elfogadásáról, és ott még az értekezésemben megadott sorrendben vannak a szerzők. A cikk valóban a 83-ik oldalon kezdődik és nem a 93-on, ahogy az értekezésemben megadtam, az egyértelműen egy gépelési hiba a részemről.

Opponensi kérdések

1. *Számomra nem érthető a 65. tétel bizonyítása utáni példa, de lehet, hogy ennek csak a témában való járatlanságom az oka. A szerző azt szeretné illusztrálni, hogy a (4.8) egyenlőtlenség éles. Példaként az $c1 = n/4$, $c2 = 3n/4$, $d1 = m/4$ és $d2 = 3m/4$ határokat veszi és megmutatja, hogy pl. $d2 = (3/4 + \varepsilon)n$ esetén van olyan páros fokszámsorozat, ami nem P-stabil (d1 és d2 esetén gondolom a dolgozatban szereplő n szorzó csak elírás). Mi garantálja, hogy az eredetileg megadott határok mellett a fokszámsorozatok P-stabilak, hiszen ezekre a (4.9) egyenlőtlenség nem feltétlenül teljesül (pl. ha $n = m = 8$)?*

   Válasz: Hálásan köszönöm ezt az észrevételt, itt valóban kicsit össze voltam zavarodva, és (részben) valótlant állítok. Az alábbiakban javítom magamat. Mentségemre azt tudom felhozni, hogy amikor az értekezésnek ezen részét írtam, azzal egyidőben foglalkoztunk azzal a meglepő észrevétellel, hogy korlátokkal megadott P-stabil fokszámsorozat osztályok lényegében megegyeznek azon korlátokkal megadott fokszámsorozat osztályokkal, amelyben minden olyan fokszámsorozat grafikus, amely teljesíti a kézfogási lemmát (a fokszámösszeg páros). Az erről szóló kéziratunk elbírálás alatt van, ld. [1]. Ebben a kéziratban foglalkoztunk a Jerrum, McKay és Sinclair által egyszerű gráfokra megadott P-stabilitási feltétellel [3], nevezetesen, ha egy fokszámsorozat osztály véges sok kivétellel minden fokszámsorozatára

   $$(c_1 - c_2 + 1)^2 \leq 4c_2(n - c_1 - 1) \tag{1}$$

   ahol n a fokszámsorozat hossza, c_1 a maximális fok, c_2 a minimális fok, akkor az osztály P-stabil. Könnyen látható, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra, ha a maximális fok $c_1 = (\frac{3}{4} - \varepsilon)n$ és a minimális fok $c_2 = (\frac{1}{4} + \varepsilon)n$, akkor elég nagy n-re a fenti egyenlőtlenség teljesül. Ugyanígy, könnyű belátni, hogy bármely $\varepsilon > 0$-ra azon fokszámsorozat-osztály, amely minden fokszámsorozatában a fokok összege páros és minden n hosszú sorozatban a fokok $(\frac{1}{4} + \varepsilon)n$ és $(\frac{3}{4} - \varepsilon)n$ között vannak, véges sok kivétellel csak grafikus fokszámsorozatot tartalmaznak.

   Erős sejtés, és dolgozunk annak a bizonyításán, hogy páros gráfok esetében is a P-stabilitás és a mindig grafikusság lényegében egybeesik. Páros gráfok esetén (most az egyszerűség kedvéért, maradjunk az $n+n$ pontú páros gráfoknál) a „véges sok kivétellel mindig grafikus", a fokszámokra vett szimetrikus határ élesen az $\frac{1}{4}n$ és $\frac{3}{4}n$ között van (ráadásul itt a véges sok kivétel 0). Azaz

1. Állítás. *Legyen $\mathcal{D}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ az a páros fokszámsorozat osztály, amelyben minden fokszámsorozat ugyananyi pontot tartalmaz a két pontosztályon, ha mindkét pontosztály mérete n, akkor minden fok $\lceil \frac{1}{4}n \rceil$ és $\lfloor \frac{3}{4}n \rfloor$ között van, és a két pontosztályban a fokok összege ugyanannyi. Ekkor $\mathcal{D}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ minden fokszámsorozata grafikus.*

Könnyen látható, hogy ez az éles határ. Legyen ugyanis D egy olyan fokszámsorozat $n+n$ ponton tetszőleges 4-gyel osztható n-re, amely mindkét osztályon tartalmaz egy $\frac{3}{4}n+1$ fokú pontot, $\frac{n}{2}-1$ darab $\frac{3}{4}n$ fokú pontot és $\frac{n}{2}$ darab $\frac{n}{4}$ fokú pontot. Ez a fokszámsorozat nem lesz grafikus, mert megsérti $k = \frac{n}{2}$-re a Gale-Ryser egyenlőtlenséget:

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} d_{1,i} > \sum_{j=1}^{n} \min\left\{\frac{n}{2}, d_{2,j}\right\}$$

azaz:

$$\frac{n}{2} \times \frac{3}{4}n + 1 > \frac{n}{2} \times \frac{n}{4} + \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$$

Ezután természetes sejtés, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra a $\mathcal{D}(\frac{1}{4}+\varepsilon, \frac{3}{4}-\varepsilon)$ fokszámsorozat-osztály P-stabil, sőt, az értekezésben megadott fokszámsorozat-osztály, amelyben minden $n+m$ ponton megadott fokszámsorozatban az n pontot tartalmazó pontosztályán minden fok $\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)m$ és $\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)m$ között van és az m pontot tartalmazó pontosztályán minden fok $\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)n$ és $\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n$ között van, valamint n és m arányára van egy korlát, P-stabil. Az alábbiakban ezt mindjárt bebizonyítom, de ez a fokszámsorozat-osztály nem azért P-stabil, mert teljesíti az értekezés 4.9. feltételét! Azaz, nem a 4.9. feltételben megadott egyenlőtlenség adja meg a legszélesebb alsó-felső korlátú páros P-stabil fokszámsorozat-osztályt. Azt sejtjük, hogy kell léteznie a Jerrum, McKay és Sinclair által megadott egyenlőtlenséggel (ld. 1. egyenlet) analóg egyenlőtlenségnek, és még dolgozunk ezen. Bár az általános egyenlőtlenséget még nem ismerjük, a legszélesebb páros P-stabil fokszámsorozat-osztály a fent megadott korlátú. Azaz:

2. Állítás. *Legyen egy $\varepsilon > 0$-ra $\mathcal{D}_t(\frac{1}{4}+\varepsilon, \frac{3}{4}-\varepsilon)$ az a páros fokszámsorozat osztály, amelyben az $n+m$ pontokon megadott fokszámok esetében az m méretű osztályon minden pont foka $\left\lceil\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)n\right\rceil$ és $\left\lfloor\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)n\right\rfloor$ között van, az n méretű osztályon minden pont foka $\left\lceil\left(\frac{1}{4}+\varepsilon\right)m\right\rceil$ és $\left\lfloor\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)m\right\rfloor$ között van, és a két pontosztályban a fokok összege ugyanannyi, továbbá létezik a $\max\left\{\frac{n}{m}, \frac{m}{n}\right\}$-re egy t felső korlát. Ekkor bármely $\varepsilon > 0$-ra és t pozitív számra a $\mathcal{D}_t(\frac{1}{4}+\varepsilon, \frac{3}{4}-\varepsilon)$ P-stabil.*

Bizonyítás A bizonyításnál azt használjuk ki, hogy egy fokszámosztály P-stabil, ha létezik egy k páratlan természetes szám úgy, hogy véges sok kivétellel az osztály minden fokszámsorozatának minden $G = (U, V, E)$ realizációjában minden u_i és v_j pont között megy egy legfeljebb k hosszú nem éllel kezdődő és nem éllel végződő, nem él - él alternáló út (mert ilyen alternáló útból csak polinom sok van, és ilyen alternáló úton „átcsapva" az éleket és nem éleket tudunk egy-sok leképezést létesíteni egy fokszámsorozat realizációi és a fokszámsorozat kismértékű perturbáltjának a realizációi között, amely egy-sok leképezés megfelelő felső korlátot ad a P-stabilitás definíciójában szereplő realizók számainak a hányadosára). Ezt a jelen esetre $k = 7$-tel bizonyítjuk.

Legyen tehát $G = (U, V, E)$ páros gráf $n + m$ ponton a fokszámaira előírt alsó és felső korlátokkal, és fixáljunk egy u_i és v_j pontot. Ha $(u_i, v_j) \notin E(G)$, akkor találtunk egy 1 hosszú utat.

Ha $(u_i, v_j) \in E(G)$, akkor legyen X_1 a v_j szomszédai halmazának komplementere, és legyen X_2 az u_i szomszédai halmazának a komplementere. Ha létezik $u_1 \in X_1$ és $v_1 \in X_2$ úgy, hogy $(u_1, v_1) \in E(G)$, akkor találtunk egy 3 hosszú utat: $(u_i, v_1) \notin E$, $(v_1, u_1) \in E$, $(u_1, v_j) \notin E$. A továbbiakban feltesszük, hogy X_1 és X_2 között nem megy él.

Jelölje Y_1 az X_2 beli pontok szomszédainak az únióját, és jelölje Y_2 az X_1beli pontok szomszédainak az únióját. Vegyük észre, hogy $(X_1 \cup \{u_i\}) \cap Y_1 = \emptyset$ és $(X_2 \cup \{v_j\}) \cap Y_2 = \emptyset$. Ha létezik $u_2 \in Y_1$ és $v_2 \in Y_2$ úgy, hogy $(u_2, v_2) \notin E$, akkor alkalmas $u_1 \in X_1$ és $v_1 \in X_2$-vel találunk egy 5 hosszú, nem éllel kezdődő és nem éllel végződő alternáló utat u_i-ből v_j-be. A továbbiakban tehát feltesszük, hogy Y_1 és Y_2 között a teljes gráf van.

Jelölje Z_1 azt a halmazt, amit úgy kapunk, hogy Y_2 beli pontok szomszédai komplementereinek az úniójából (a nem-szomszédainak az úniójából) kivesszük $X_1 \cup \{u_i\}$-t. Hasonlóan jelölje Z_2 azt a halmazt, amit úgy kapunk, hogy Y_1 beli pontok szomszédai komplementereinek az úniójából kivesszük $X_2 \cup \{v_j\}$-t. Először azt látjuk be, hogy Z_1 és Z_2 egyike sem az üres halmaz. Indirekt bizonyítunk, azaz tegyük fel, hogy Z_1 az üres halmaz, azaz $X_1 \cup \{u_1\}$ komplementere és Y_2 között teljes páros gráf van. Továbbá legyen $c := \frac{1}{4} + \varepsilon < 0.5$, $\varepsilon > 0$. Mivel minden X_1-beli pont foka legalább cm, az Y_2-ből induló élek összegére egy alsó becslés:

$$|E[Y_2]| \geq |X_1| \times cm + |Y_2| \times (n - 1 - |X_1|).$$

Másrészt a fokszámokra adott korlát miatt

$$|Y_2| \times (1 - c)\, n \geq |E[Y_2]|,$$

amiből

$$|Y_2| \times (1 - c)\, n \geq |X_1| \times cm + |Y_2| \times (n - 1 - |X_1|). \tag{2}$$

Jelöljük W-vel a $X_1 \cup \{u_1\}$ halmaz komplementerét. Vegyük észre, hogy a V pontosztályból minden él W-be megy kivéve legfeljebb $(1 - c)n$ él u_i-be. (Valójában legfeljebb $\min\{(1 - c)n, m - |Y_2|\}$ él, itt most elég lesz az $(1 - c)n$ becslés is). Így a W-ből kiinduló élekre egy alsó becslés:

$$|E[W]| \geq |Y_2| \times |W| + (m - |Y_2|)cn - (1 - c)n.$$

Másrészt a fokokra adott korlát miatt

$$|W| \times (1 - c)m \geq |E[W]|,$$

amiből

$$|W| \times (1-c)m \geq |Y_2| \times |W| + (m - |Y_2|)cn - (1-c)n. \tag{3}$$

Jelöljük $w := \frac{|W|}{n}$ és $y := \frac{Y_2}{m}$, továbbá tudjuk, hogy $|W| + |X_1| = n-1$, amiből a (2) és (3) egyenletekre kapjuk, hogy

$$ym(1-c)n \geq (n-1-wn)cm + ynwm$$

és

$$wn(1-c)m \geq (m-ym)cn + ynwm - (1-c)m,$$

melyek összegének is teljesülnie kell, azaz

$$(1-c)(y+w)nm \geq 2ywnm + (1-w)cnm + (1-y)cnm - m.$$

Ezt nm-mel leosztva kapjuk, hogy

$$(1-c)(y+w) \geq 2yw - c(y+w) + 2c - \frac{1}{n}.$$

Ezt egy oldalra rendezve, kiemelve egy szorzatot kapjuk:

$$0 \geq 2\left(\frac{1}{2} - w\right)\left(\frac{1}{2} - y\right) - \frac{1}{2} + 2c - \frac{1}{n}. \tag{4}$$

Vegyük észre, hogy (ε függvényében) elég nagy n-re és m-re mind y, mind w kisebb, mint $\frac{1}{2}$, különben a W és Y_2 halmazok legalább egyikén (a saját osztálya méretében relatíve kisebb halmazon) az átlagfokszám legalább $\frac{3m}{4}$ illetve $\frac{3n}{4}$ lenne. Valóban, ha $y \geq \frac{1}{2}$ és $y \geq w$, akkor

$$|E[W]| \geq |Y_2| \times |W| + (m - |Y_2|)cn - \min\{(1-c)n, m - |Y_2|\} \geq$$

$$\geq wn\left(ym + \frac{m(1-y)(cn-1)}{wn}\right) \geq wnm\left(y + \frac{1-y}{y}\left(c - \frac{1}{n}\right)\right) \geq$$

$$\geq wnm\left(\frac{1}{2} + c - \frac{1}{n}\right) \geq wnm\left(\frac{3}{4} + \varepsilon - \frac{1}{n}\right).$$

Mivel $\frac{m}{n} \leq \max\left\{\frac{n}{m}, \frac{m}{n}\right\} \leq t$, nagy m-re n is nagy lesz, így $\varepsilon - \frac{1}{n}$ pozitív lesz véges sok kivétellel. A $w \geq \frac{1}{2}$, $w \geq y$ eset bizonyítása hasonlóan megy. Ezért a $2\left(\frac{1}{2} - w\right)\left(\frac{1}{2} - y\right)$ szorzat véges sok kivétellel mindig pozitív. Ugyanígy, alkalmasan nagy n-re

$$2c = \frac{2}{4} + 2\varepsilon \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{n},$$

így a (4) egyenletben szereplő egyenlőtlenség véges sok fokszámsorozat kivételével nem teljesül. Így véges sok kivétellel Z_1 nem az üres halmaz. Teljesen szimmetrikus érveléssel adódik, hogy véges sok kivétellel Z_2 halmaz sem üres.

Ha létezik $u_3 \in Z_1$ és $v_3 \in Z_2$ úgy, hogy $(u_3, v_3) \in E$, akkor alkalmas $u_2 \in Y_1$, $v_2 \in Y_2$, $u_1 \in X_1$ és $v_1 \in X_2$ pontokkal találunk egy 7 hosszú alternáló, nem éllel kezdődő és nem éllel végződő utat u_i-ből v_j-be.

A bizonyítás befejezéséhez azt látjuk be, hogy (véges sok kivétellel) nem lehet az, hogy Z_1 és Z_2 között nem megy él. Vegyük észre, hogy X_1 és Z_2 között nem megy él (mert X_1 szomszédjai Y_2-ben vannak), és hasonló okokból X_2 és Z_1 között sem megy él. Tehát ha nem menne él Z_1-ből Z_2-be, akkor Y_1 és Y_2 között teljes páros gráf menne, továbbá minden az U osztály Y_1 komplementer részéből csak Y_2-be mennének élek, kivéve esetleg v_i néhány éle, hasonlóan, Y_2 komplementeréből csak Y_1-be mennének élek, kivéve esetleg u_i néhány éle. A fenti érveléshez hasonlóan ekkor (W helyett) Y_1 és Y_2 összélei felső és alsó korlátaiból adódó egyenlőtlenségek alapján ellentmondásra jutnánk.

Így véges sok kivétellel mindig lesz u_i és v_j között legfeljebb 7 hosszú, nem éllel kezdődő és végződő él – nem él alternáló út, így a $\mathcal{D}_t(\frac{1}{4}+\varepsilon, \frac{3}{4}-\varepsilon)$ fokszámsorozatosztály minden $\varepsilon > 0$-ra és t pozitív számra P-stabil. $\square$

2. *Lehet, hogy ez a kérdés is triviális. Miért létezik mindig a 148. lemmában szereplő V' halmaz? Ugyanez a kérdés merül fel a 151. definícióban szereplő megadott tulajdonságú c_s és c_e csúcsok (színek) létezésével kapcsolatban.*

   Válasz: A 148. lemmában valóban fel kell tenni, hogy G_1 és G_2 különböznek (Ha azonosak, akkor G_1 0 darab perturbációval átalakítható G_2-be, és az eset érdektelen). Ha G_1 és G_2 különböznek, akkor létezik egy (u, v_1) él, aminek a színe G_1-ben és G_2-ben nem ugyanaz. Legyen (u, v_1) színe G_1-ben c_1, G_2-ben pedig $c_2 \neq c_1$. Mivel G_1 és G_2 ugyanannak a fokszámmátrixnak a faktorizációja, u-nak ugyanannyi c_2 színű éle van G_1-ben és G_2-ben. Ezért létezik egy v_2 pont, úgy, hogy az (u, v_2) él G_1-ben c_2 színű, és $c_3 \neq c_2$ színű G_2-ben. Ha $c_3 = c_1$, akkor találtunk egy kételemű V' halmazt az előírt feltételekkel. Ha $c_3 \neq c_1$, akkor folytatjuk tovább az eljárást: létezik egy olyan v_3 pont, amire (u, v_3) színe G_1-ben c_3 és G_2-ben $c_4 \neq c_3$. Ha $c_4 \in \{c_1, c_2\}$, akkor találtunk egy 2 vagy 3 elemű V' halmazt (rendre attól függően, hogy $c_4 = c_2$ vagy $c_4 = c_1$). Ha $c_4 \notin \{c_1, c_2\}$, akkor folytatjuk tovább az eljárást. Mivel véges sok szín van, valami i-re létezik v_i úgy, hogy G_1-ben az (u, v_i) él színe c_i, G_2-ben $c_{i+1} \neq c_i$, de $c_{i+1} \in \{c_1, c_2, \ldots c_{i-1}\}$. Ha $c_{i+1} = c_j$, akkor $V' = \{v_j, v_{j+1}, \ldots v_i\}$, és a $(v_i, v_{i-1}, \ldots, v_j)$ ciklikus permutáció az alkalmas π, amire minden $v \in V'$-re (u, v) színe G_1-ben megegyezik $(u, \pi(v))$ színével V_2-ben.

   A 151. definícióban mindig létezik c_s és c_e ha G egy félig reguláris fokszámmátrix faktorizációja, és az U pontosztályon van a félig reguláris faktor, vagy a 146. és 147. Lemmában szereplő majdnem faktorizációja, az U pontosztályon van a reguláris faktor, és u-nak van egy $(+c_{i_1} - c_{i_2})$ hiánya (ld. 144. definíció) és esetleg u'-nek van egy $+c_{i_2} - c_{i_1}$ hiánya vagy $+c_{i_3} - c_{i_1}$ hiánya. Ha G faktorizáció, akkor minden $K(G, u, u')$-ben minden pont be és kifoka ugyanannyi. Valóban, minden c színre u-nak és u'-nek ugyanannyi c színű éle van. Minden v-re, amelyre (u, v) c színű, $K(G, u, u')$-ben a c-hez tartozó pontból lesz egy kiél, és minden v-re, amelyre (u', v) c színű, a szóban forgó ponthoz lesz egy beél. Egy ponton levő hurkot úgy tekintünk, hogy az egyszerre egy kiél és beéle az adott pontnak. Ilyen hurkok vannak minden olyan v-re, amelyre mind (u, v), mind (u', v) c színű.

   Ha G majdnem faktorizáció, a fent említett hiányokkal, akkor u-nak több c_{i_1} színű pontja van, mint u'-nek, és vagy c_{i_2} vagy c_{i_3} színű élből kevesebb. Ekkor $K(G, u, u')$-

ben a c_1-hez tartozó pontnak több kimenő foka van, mint bejövő, és vagy a c_{i_2}-höz vagy a c_{i_3} színhez tartozó pontnak pedig kevesebb kiéle lesz, mint beéle. Minden más pontnak továbbra is ugyanannyi a be és kifoka. Így $c_s = c_{i_1}$ és c_e egyenlő vagy c_{i_2} vagy c_{i_3}.

A 151. definícióban szereplő f függvényt az 1. algoritmusban használjuk a fent nevezett G faktorizációkra és majdnem faktorizációkra.

3. *Milyen gyakorlati bioinformatikai problémákhoz köthető a 12. fejezetben ismertetett páros gráfok k-élszínezése?*

   Válasz: Latin téglalapok befejezéseit kísérlet áttervezésekre használják, amikor egy Latin négyzettel megtervezett kísérlet egy részét áttervezik. Könnyű belátni, hogy 1-1 értelmű megfeleltetés van $n \times (n-r)$-es Latin téglalapok befejezései és $n+n$ pontú r-reguláris páros gráfok r-élszínezései között. A páros gráf egyik osztálya a Latin téglalap oszlopai, a másik osztálya $[n]$, és két pont között akkor megy él, ha az adott oszlopból az adott szám hiányzik. Minden élszínezés egy lehetséges befejezése a Latin téglalapnak, ha a v oszlop u száma között levő él színe k, akkor u-t a v-ik oszlop k-ik sorába írjuk be.

   Már nem bioinformatikai, hanem tisztán számítástudományi/diszkrét matematikai kérdés, hogy szükséges-e regularitást feltételeznünk a 12. fejezetben ismertetett eredményekhez. A válasz az, hogy nem. Nemcsak reguláris, hanem tetszőleges páros gráf k-élszínezésein tudunk adni olyan irreducibilis Markov láncot, amelynek kicsi az átmérője és a Metopolis-Hastings hányados inverzére polinom felső korlát van.

   Latin téglalapok befejezésein bolyongó Markov láncok azért is érdekelnek minket, mert bosszantóan nem tudjuk bizonyítani a Latin négyzeteken keverő Jacobson-Matthew Markov lánc [2] gyors konvergenciáját. A Jacobson-Matthew Markov láncot 1996-ban publikálták, és a gyors konvergenciáját azóta sem sikerült senkinek sem bizonyítania. Pedig random Latin négyzetek előállításának a problémája sok helyen felmerül. Továbbá a Latin négyzeteket nagyon reguláris matematikai objektumoknak tekintjük, hiszen minden szám minden sorban és minden oszlopban pontosan egyszer szerepel. A fokszámsorozat-realizációkon folytatott kutatásaink során láttuk, hogy a regularitás mennyire megkönnyíti egyes tételek bizonyítását. Ennek ellenére a Jacobson-Matthew Markov lánc gyors konvergeciájának a bizonyításához úgy tűnik, hogy nem elegendő a szükséges technikai tudásunk. Természetes kutatási irány, hogy próbáljunk meg egyszerűbb eseteket tekinteni. A lehetséges legegyszerűbb (de már nem triviális) eset az $n \times (n-3)$-as Latin téglalapok befejezései, azaz a 3-reguláris páros gráfok 3-élszínezései.

Budapest, 2024. október 16.

Miklós István

Hivatkozások

[1] Erdős, P.L., Miklós, I., Soukup, L. (2024) Fully graphic degree sequences and P-stable degree sequences. `https://arxiv.org/abs/2405.12013`

[2] Jacobson, M.T., Matthews, P. (1996) Generating uniformly distributed random latin squares. J. Combin. Des., 4(6):404–437.

[3] Jerrum, M.R., McKay, B.D., Sinclair, A. (1992) When is a Graphical Sequence Stable? Chapter 8 in Random Graphs: Volume 2 Eds.: A. Frieze and T. Luczak, Wiley, pp. 304.