Válasz Dr. Faragó István bírálatára

Doktori mű: „Rejtett kaotikus rezgések alkalmazott mechanikai feladatokban”

Köszönöm a Bírálónak értekezésem részletekbe menő elemzését, támogató véleményét, és elgondolkodtató kérdéseit. Bevallom, kétségeim voltak, hogy sikerült-e kellő mértékben hangsúlyoznom a disszertációban a három eltérő témakör hasonló vonásait, ezért külön örömömre szolgált a Bíráló ezzel kapcsolatos pozitív véleménye. Azt is nagyon értékes visszajelzésnek tartom, hogy én magam is a bírálatban méltatott eredményeimet gondolom a legérdekesebbeknek. A feltett kérdésekre válaszaim a következők:

1. kérdés: *Az 1. tézis (a) pontjában megfogalmazásra került, hogy az 1/(2n) frekvenciahányadosoknál aszimmetrikus megoldások léteznek. Matematikai szempontból érdekes lehet, hogy tetszőleges (an) nullához tartó frekvenciahányados sorozat esetén a sorozat tagjainak milyen tulajdonsága mellett léteznek nemszimmetrikus megoldások?*

Válasz:

- *Letapadó* megoldások esetében a numerikus szimulációval, illetve követő módszerrel kapott eredmények azt mutatják, hogy az aszimmetrikus megoldások bizonyos frekvenciahányados-intervallumokban létezhetnek, tehát azok megjelenése nem köthető diszkrét frekvenciahányados értékekhez.
- *Nem letapadó* megoldások esetében azonban érdemes lehet megvizsgálni, hogy létezhetnek-e további aszimmetrikus megoldások a bemutatott megoldáscsalád mellett. Az értekezés 2.2.1 fejezete szerint ha
  - a periódusidő $2\pi/\Omega$ és
  - egy periódus alatt kétszer válik nullává a sebesség,

  akkor a szimmetrikus megoldás létezésének az a feltétele, hogy
  - a frekvenciahányados 1-től különböző,
  - a két egymás utáni megállási időpont közötti szakasz θ_1 időtartamára pedig teljesül, hogy $\sin(\theta_1) \neq 0$.

  Az értekezésben közölt levezetés szerint a két utóbbi feltétel sérüléséhez az $\Omega = 1/m$, $m = 1, 2, \ldots$ frekvenciahányadosok tartoznak. A 2.3 fejezetben megmutattam, hogy $m = 1$-ben végtelenhez tart az amplitúdó, $m = 2n + 1$, $n = 1, 2, \ldots$ esetében nem teljesül a periódusonkénti két megállás feltétele, $m = 2n$ esetén pedig az értekezés (2.81) képlete adja meg a nem letapadó megoldások létezésének feltételét:

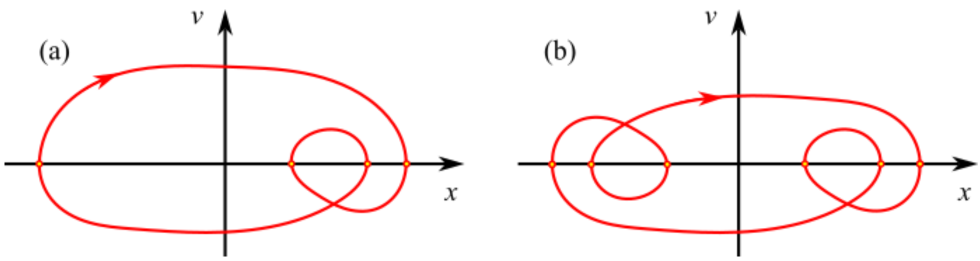
  $$S_0 \leq \frac{1}{4n^2 - 1}. \tag{1}$$

  Ha ez a feltétel teljesül, akkor az adott frekvenciahányadosnál az alábbi intervallumba eső x_0 kezdeti kitéréssel paraméterezhető aszimmetrikus megoldások találhatók:

  $$1 + S_0 \leq x_0 \leq \frac{4n^2 + 1}{4n^2 - 1} - S. \tag{2}$$

Két olyan eset fordulhat még elő, amikor nem zárható ki az aszimmetrikus, nem letapadó megoldások megjelenése:

– Az egyik lehetőség az, amikor sérül a periódusonként két megállás feltétele, és m páratlan. Ezen belül is két eset különíthető el:
  • Páratlan számú megállás csak úgy lehetséges, ha egy megállás előtt és után ugyanolyan a sebesség előjele. Ekkor a gyorsulásnak – és az eredő erőnek – is előjelet kell váltania a megállás pillanatában. $S_0 = S$ esetében ez csak a letapadási tartomány határán fordulhat elő, $S_0 > S$ mellett viszont nincs ilyen megoldás, mert letapadás következik be.
  • Ha felváltva pozitív és negatív sebességű szakaszok követik egymást, akkor csak páros számú megállás történhet egy periódus alatt. Ha négy megállást tételezünk fel, akkor a sebesség előjelváltásai miatt topológiailag az 1(a) diagramhoz hasonló lesz a sebesség és a kitérés közötti kapcsolat. Bárhová kerül is a két közbülső megállási pont, ez a megoldás csak aszimmetrikus lehet, hiszen másképp mozog a test a minimális kitéréstől a maximális felé, mint ellenkező irányban. Szimmetrikus megoldás tehát csak úgy képzelhető el, ha egy periódus alatt $2+4r$, $r = 0, 1, 2, \dots$ alkalommal válik nullává a sebesség. Az $r = 1$ esetet mutatja az 1(b) ábra.



1. ábra. *Lehetséges nem letapadó megoldások, periódusonként négy, illetve hat megállással*

  A bemutatott megoldások azonosításához vagy létezésük kizárásához az értekezésben bemutatottnál jelentősen összetettebb számításokra lenne szükség. Mivel a numerikus szimulációk minden esetben letapadó megoldásokat mutattak a kérdéses frekvenciahányadosoknál, ezt a vizsgálatot nem végeztem el. Az eredmények azonban összhangban vannak azzal a sejtéssel, hogy minél több megállás történik egy periódus alatt, annál nagyobb valószínűséggel esik bele valamelyik megállási pont a letapadási tartományba.

– További lehetőséget jelent aszimmetrikus nem letapadó megoldások keresésére, ha módosítjuk a periódusidőre vonatkozó feltételt. Egy 2005-ös konferencia cikkben [1] megvizsgáltam a $2k\pi/\Omega$, $k = 1, 2, 3, \dots$ periódusidő és a periódusonként két megállás esetét. Sikerült levezetni mind a szimmetrikus, mind az aszimmetrikus megoldások analitikus kifejezését. A szimmetrikus megoldásokról belátható, hogy $k > 1$ mellett mindenképpen sérül a két megállásra vonatkozó feltétel. A keresett alakú aszimmetrikus megoldások csak az $\Omega = k/m$, $m = 1, 2, \dots$ frekvenciahányadosoknál jelenhetnek meg, de $\Omega > 1/2$ esetében ezek sem létezhetnek. Numerikus szimulációk arra utalnak, hogy ha $k > 1$, akkor $2k\pi/\Omega$ periódusidő mellett csak letapadó megoldások lehetnek stabilak.

2. kérdés: *Az 1. tézis (b) részében szerepel S0 értékére egy felső korlát, amely mellett létezhetnek nem letapadó aszimmetrikus megoldások. Ez értelmezhető szükséges feltételként? Mennyire éles ez a becslés? Adható elégséges feltétel is a nem letapadó aszimmetrikus megoldások létezésére?*

Válasz: A tézisben szereplő

$$S_0 \leq \frac{1}{4n^2-1} \tag{3}$$

feltétel elégséges. Teljesülése esetén léteznek az értekezés (2.57)-(2.58) egyenleteivel megadható, nem letapadó megoldások, ahol $\Omega = 1/(2n)$ a frekvenciahányados. A tézisben nem emeltem ki, de a Coulomb-modell sajátosságaiból következik, hogy a súrlódási tényezők között teljesülnie kell az

$$S \leq S_0 \tag{4}$$

relációnak is. Abban a határesetben, amikor mind a (3), mind a (4) relációban az egyenlőség teljesül, akkor az adott n-hez tartozó lehetséges aszimmetrikus megoldások halmaza – ami minden esetben tartalmazza a szimmetrikus megoldást is – egy eleművé válik, azaz visszakapjuk a szimmetrikus megoldást. Ezeket – az értekezésben is kifejtett – megkötéseket figyelembe véve az állítás egzakt, bár talán szerencsésebb lett volna a tézisben szigorú egyenlőtlenséggel felírni, hogy az említett szimmetrikus határesetet kizárjuk.

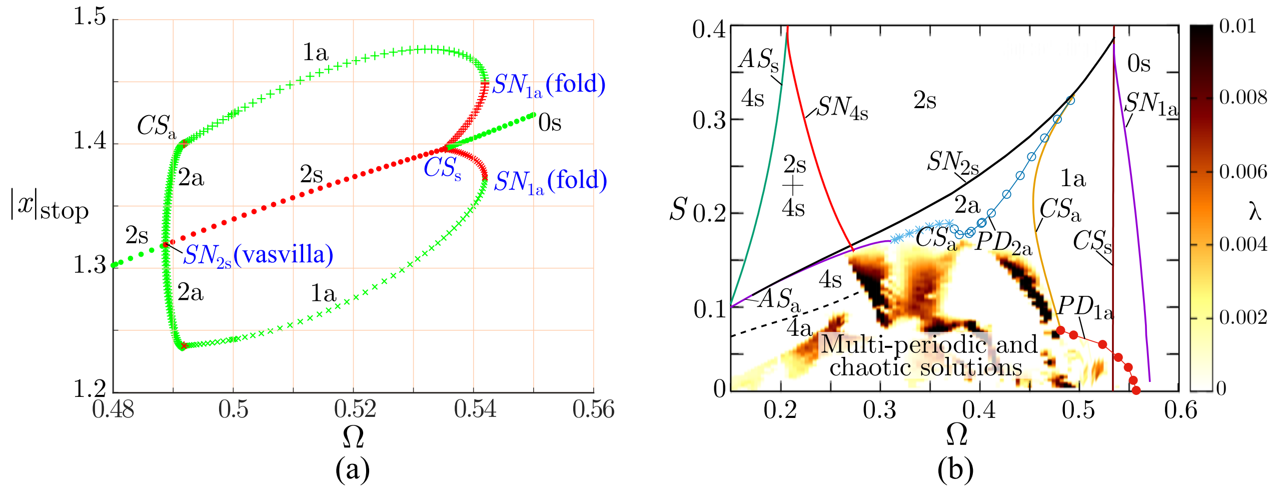
Az értekezés (2.57)-(2.58) egyenleteivel megadott aszimmetrikus megoldások létezéséhez a feltétel szükséges is. Az 1. kérdésre adott válaszom szerint azonban elképzelhetők más alakú nem letapadó aszimmetrikus megoldások is, például olyanok, melyek periódusideje $2k\pi/\Omega$, és/vagy periódusonként kettőnél több megállást is tartalmaznak. Bár ilyen megoldások létezésére egyelőre semmilyen jel sem utal, ebben az általánosabb értelemben egyelőre nem tudtam teljes bizonyossággal kimutatni a feltétel szükséges voltát.

3. kérdés: *Ugyancsak az 1. tézis (b) részében szerepel állítás arra vonatkozóan, hogy az aszimmetrikus megoldások eredetileg nullmértékű paramétertartománya véges mértékűvé válik, ha a tapadási súrlódás együtthatója nagyobb a csúszási súrlódás együtthatójánál. Hogyan kell érteni ezt kijelentést? (Milyen mértékről van szó? Mit jelent az, hogy nulla mértékről véges mértékű lesz, hiszen a nulla mérték is véges?)*

Válasz: Egyetértek a Bírálóval abban, hogy a szóban forgó állítás valóban félreérthető és matematikailag pontatlan. Abban a kutatói körben, amelyben a pályafutásom kezdete óta dolgozom, a „véges” szót néha a nullánál nagyobb, de nem végtelenül nagy értékek megjelölésére használják, ilyen értelemben használtam én is. A tézisben szereplő kijelentés tehát úgy értelmezhető, hogy adott, és egymással egyenlő S_0 tapadási és S csúszási súrlódási tényezők mellett csak véges sok diszkrét frekvenciaértéknél lehet aszimmetrikus megoldás, azaz nullmértékű halmazt alkotnak az ennek megfelelő frekvenciahányadosok. Azonban ha $S < S_0$, akkor pozitív Lebesgue-mértékű frekvenciaintervallumokon teljesülhet az aszimmetria.

4. kérdés: *A 2. tézis (a) pontjában szerepel, hogy a szimmetrikus periodikus megoldásokból keresztező-csúszó, illetve nyereg-csomó bifurkációk során keletkeznek aszimmetrikus megoldások. Milyen további más esetben lehetséges még az aszimmetrikus megoldások létezése?*

Válasz: Ezen a téren valóban maradtak nyitott kérdések az értekezésben. Ennek kapcsán meg kell jegyeznem, hogy a bifurkációs diagramok számításához használt Matlab eszköztár eredetileg csupán néhány alapvető bifurkáció típust ismert fel, a periodikus megoldás stabilitását jellemző karakterisztikus multiplikátorok értéke alapján. Minden olyan esetet nyereg-csomó bifurkációnak detektált, ahol az egyik multiplikátor átlépte az 1-es értéket. Ahogy a 2(a) ábra mutatja, az SN_{1a} jelű bifurkációk valóban nyereg-csomó (fold) típusúak, de a megállások abszolút értékét ábrázolva látszik, hogy az SN_{2s} jelű bifurkációt helyesebb lett volna vasvilla bifurkációnak nevezni. A kétparaméteres bifurkációs diagramok (2(b) ábra) kiszámítása során is az SN-nel jelölt stabilitásváltást követtem a programmal, ezért használtam az SN_{2s} jelölést és a „nyereg-csomó” elnevezést.



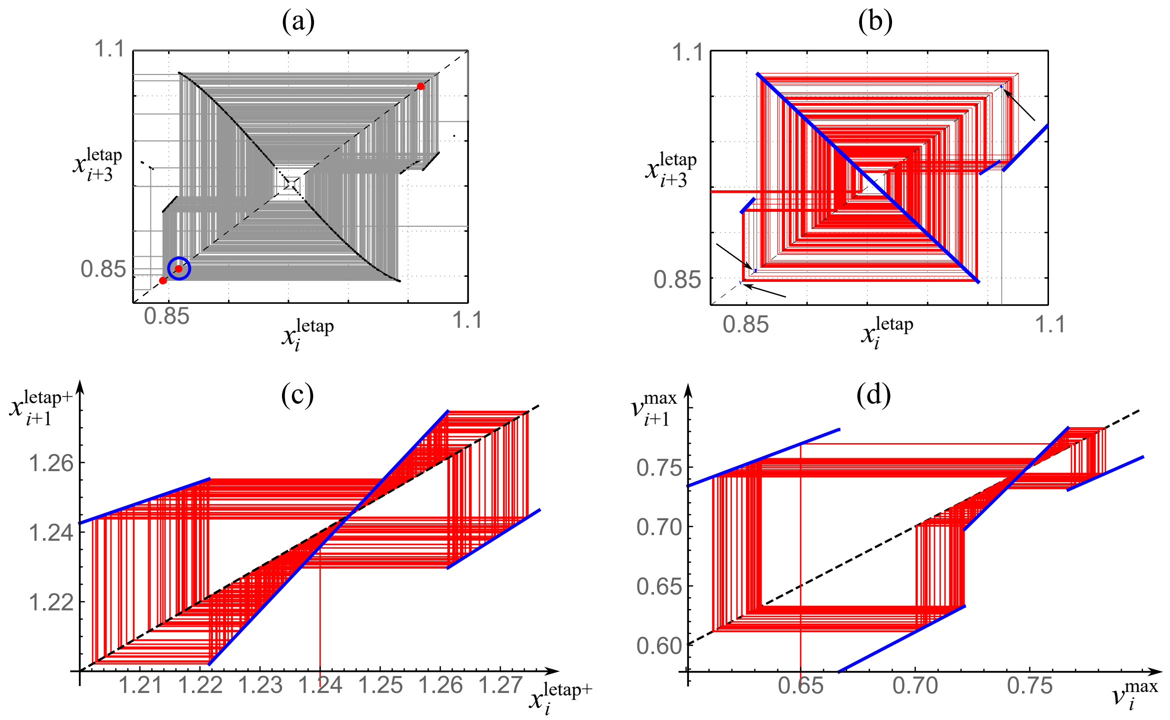
2. ábra. *(a) Az értekezés 2.18-as ábrájának egyik diagramja (S = 0,32, S_0 = 0,4), a bifurkációk típusainak pontosabb megjelölésével. (b) Az értekezés 2.20-as ábrájának S_0 = 0,4-hez tartozó diagramja, kiegészítve további bifurkációs görbékkel*

A nem folytonos bifurkációk (keresztező-csúszó/crossing-sliding, hozzáadó-csúszó/adding-sliding, érintő-csúszó/grazing-sliding és kapcsoló-csúszó/switching-sliding) követésére saját algoritmusokat használtam, így találtam meg az aszimmetriához vezető keresztező-csúszó (CS_s) bifurkációt is. Bár az értekezés 2.20-as ábrájának jobb oldali diagramján (itt 2(b) ábra) látható AS_a jelű görbe azt sejteti, hogy hozzáadó-csúszó (adding-sliding) bifurkáció vezet aszimmetrikus megoldáshoz, itt a 2a jelű, már aszimmetrikus megoldás-pár tűnik el ezzel a bifurkációval.

Az értekezésben elsősorban azokra az esetre fókuszáltam, amikor vagy a letapadás nélküli, vagy a két letapadásos megoldás válik aszimmetrikussá. Legutóbbi vizsgálataim arra utalnak, hogy a több letapadást mutató megoldások esetében is hasonló bifurkációk vezetnek aszimmetriához. Az AS_s görbe mentén létrejön egy négy letapadásos szimmetrikus megoldás (4s) a két letapadásos szimmetrikus megoldás (2s) hozzáadó-csúszó bifurkációjával. Ez a megoldás azonban az AS_s görbétől jobbra is létezik, így kialakul egy ék alakú bistabil tartomány, melyet a másik oldalról a nyereg-csomó (fold) bifurkációval történő stabilitásvesztéshez tartozó – az értekezésben nem jelölt – SN_{4s} görbe határol. Kis S súrlódási tényezőknél a négy letapadásos szimmetrikus (4s) megoldást négy letapadásos aszimmetrikus (4a) megoldás-pár váltja fel, a 2(a) ábrán mutatott SN_{2s}-hez hasonló vasvilla bifurkáció során. Bár konvergenciaproblémák miatt pontosan nem tudtam meghatározni a megfelelő bifurkációs görbét, az hozzávetőlegesen a szaggatott vonallal berajzolt szakasz közelében található.

5. kérdés: *A 2. tézis (c) pontjában megemlíti a Szerző, hogy a nyers erő módszerével bifurkációs vizsgálatot folytatott társszerzőjével, és meghatározták a kaotikus megoldások létezését jelentő paramétertartományokat. Ehhez egyik eszközként szakaszosan lineáris közelítő függvényeket használtak. Ezek valójában spline-féle közelítéseket jelentenek? Alkalmazhatók-e magasabb fokú közelítések?*

Válasz: Az általunk alkalmazott közelítő függvényeknek ugrása van az értelmezési tartományt felosztó szakaszok határpontjaiban, tehát a spline-féle közelítéseket jellemző folytonossági feltétel semmilyen rendben sem teljesül. Az értekezés 2.26(a) ábráján (itt 3(a) ábra; $S_0 = 0{,}4$, $S = 0{,}0465$, $\Omega = 0{,}5$) a letapadási pontokból kirajzolódó négy sötétebb görbeszakaszt négy darab viszonylag hosszabb, a fixpontok környezetét pedig három darab rövid – az ábrán alig kivehető – egyenes szakasszal közelítettük. Ez utóbbiakat nyilak mutatják a 3(b) ábrán. A Ljapunov-exponens becslését az iteráció során kapott, abszolút értékben vett meredekségek logaritmusainak átlagolásával, majd az iteráció lépései között eltelt átlagos idővel történő osztással végeztük el. Természetesen magasabb fokú közelítés is alkalmazható, ekkor az érintők meredekségével kell számolni. Bár szemmel látható a negatív meredekségű



3. ábra. *Az értekezés 2.26(a) ábrája (a), és 2.26(c) ábrája, kiegészítve (b). A letapadási koordináták pozitív kitéréseknél (c), és a sebesség maximumai (d) az $S_0 = 0{,}3$, $S = 0{,}15$ és $\Omega = 0{,}45$ paramétereknél*

szakasz görbülete a 3(a) ábrán, a szakaszonként lineáris közelítés esetében könnyebb az illesztés megvalósítása, és $S_0 < 0{,}5$ tapadási súrlódási tényezők mellett általában ez is kielégítő pontossággal alkalmazható – ezt illusztrálják a 3. ábra (c) és (d) diagramjai, melyeket a kaotikus tartományból véletlenszerűen kiválasztott paraméterekkel készítettem, két különböző Poincaré-leképezéssel. A szimulációval kapott pontok vonalvastagságon belül illeszkednek a szakaszosan lineáris közelítő függvényekre. Emellett – bár még a szakaszok száma is más – a Ljapunov-exponensre 5%-on belül ugyanazt az értéket adta ez a két közelítés.

Egyező súrlódási tényezők mellett belátható, hogy nem jöhetnek létre kaotikus megoldások [2]. Ezért célunk elsődlegesen annak ellenőrzése volt, hogy a szakaszosan sima differenciálegyenlettel leírható rendszer Ljapunov-exponensének számítására használt, a közeli megoldások távolodását vizsgáló algoritmus nagyságrendileg helyes értékeket ad, és megalapozottan állíthatjuk, hogy $S \neq S_0$ mellett kaotikus megoldásokat találtunk. Mivel a leképezések kiértékelése hasonló nagyságú, de valamivel nagyobb Ljapunov-exponenseket szolgáltatott, az eredmények alátámasztják a kaotikus megoldások létezését.

6. kérdés: *A 4. tézis (e) pontjához kapcsolódóan. A disszertáció ehhez kapcsolódó része egészen magas matematikai színvonalú, igényesen elkészített, precíz munka. A Szerző megemlíti, hogy a mikro-káosz leképezések fázisterének globális vizsgálatára kidolgozták C-SCM algoritmust. Ennek előnyei a tézisben felsorolásra is kerülnek (4.6.4 szakasz) Vannak-e hátrányai ennek az algoritmusnak?*

Válasz: Köszönöm a Bíráló elismerő szavait! A C-SCM algoritmus kapcsán ugyanazok a hátrányok említhetők, mint bármilyen más párhuzamosított algoritmusnál: mérlegelni kell, hogy a párhuzamos futtatással nyert időt nem veszítjük-e el a különálló eredmények összekapcsolása során. Ebben a konkrét esetben az összekapcsolni kívánt régiók számától és a közöttük átívelő periodikus csoportok mennyiségétől függ, hogy érdemes-e használni a csoportosított algoritmust. Ha tudjuk, hogy a feladatot egyetlen SCM futtatással el tudjuk végezni, akkor memóriahasználat szempontjából az eredeti algoritmus a jobb választás. Éppen ezért javasoljuk a módszert azokra az esetekre, amikor nem ismert előre a feltérképezni kívánt tartomány mérete.

7. megjegyzés: *Nem kérdésként, hanem megjegyzésként szeretném kiemelni a 3.tézis (c) pontjának azon eredményét, miszerint egy konkrét modellben (késleltetett és szakaszosan sima modell, ami a periodikusan képződő és leváló élsisak hatását írja le lágyacél esztergálása során) a megoldás kaotikus és az attraktor dimenziója véges, noha a fázistér végtelen dimenziós.*

Válasz: Köszönöm a megjegyzést! A tézis matematikai előzményei Foias és Prodi 1967-es cikkéig [3] nyúlnak vissza: eredményeik szerint a Navier-Stokes egyenlet végtelen dimenziós fázisterében léteznek véges dimenziós attraktorok. Késleltetett differenciálegyenletek vizsgálata során Farmer [4] mutatott rá véges dimenziós attraktorok létezésére, a nemlineáris dinamika eszköztárának felhasználásával. Szakaszosan sima késleltetett modellben azonban nem találtam utalást hasonló eredményre a szakirodalomban.

Bízva abban, hogy a fentiekben kielégítő válaszokat adtam az opponensi véleményben megfogalmazott kérdésekre és megjegyzésekre, még egyszer köszönöm a Bíráló előremutató észrevételeit.

Budapest, 2024.06.24.

Csernák Gábor

Dr. Csernák Gábor
egyetemi docens
BME Műszaki Mechanikai Tanszék

Hivatkozások

[1] Csernák G., Stépán G.: Symmetric and asymmetric motions of a harmonically driven dry-friction oscillator, 5th EUROMECH European Nonlinear Oscillations Conference, Eindhoven, 10p, (2005)

[2] M. Kunze: On Lyapunov exponents for non-smooth dynamical systems with an application to a pendulum with dry friction, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, Vol. 12, No. 1, pp. 31-116, (2000)

[3] C. Foias, G. Prodi: Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des équations de NavierStokes en dimension 2, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. 39, pp. 1-34, (1967)

[4] J.D. Farmer: Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system, Physica 4D, pp. 366–393, (1982)