sandornagy_161_23

MTA doktori értekezés tézisei

Renormálási csoport módszer alkalmazása kvantumelméletekben

Nagy Sándor

DEBRECENI EGYETEM
Elméleti Fizikai Tanszék

Debrecen
2024

sandornagy_161_23

Bevezetés, a kutatások előzményei

A fizikai rendszerek makroszkopikus, infravörös (IR) viselkedését a rendszert alkotó elemek mikroszkopikus, ultraibolya (UV) viselkedése alapján érthetjük meg. Ugyan a mikroszkopikus fizika megfelelő formalizmusban egyszerűnek látszik, azonban a makroszkopikus viselkedés a nagyon sok IR szabadsági fok bonyolult összjátékából alakul ki. Ez az oka annak is, hogy a makroszkopikus fizika nagyon sok arcát mutatja nekünk.

A helyzetet tovább árnyalja, ha az IR és UV skálák között további olyan skálák találhatók, amelyek nélkül az IR viselkedés nem tárgyalható. Ezzel gyakran találkozhatunk a részecskefizikában és a kritikus jelenségek körében. A probléma szisztematikus tárgyalását a wilsoni renormálás adja, amely egy kvantumelmélet szabadsági fokait az energiájuk szerint sorba rendezve eliminálja az UV módusoktól kezdve az IR módusok felé haladva. Matematikailag a renormálási csoport (RG) egyenlet a hatásra, mint funkcionálra vonatkozó differenciálegyenlet. Az egyenlet változója a k skála, amely az UV tartományból indul, ahol feltételezzük, hogy a rendszer mikroszkopikus, nagy energiás viselkedése ismert [1, 2, 3, 4]. Csökkentve a k skálát az IR tartományig megkaphatjuk a fizikai rendszer makroszkopikus, alacsony energiás viselkedését. A fizikai elméletek általában egy adott energiaskála-tartományban érvényesek, amelyben az adott kölcsönhatást jól ismertnek tekintik. Ezzel szemben az RG módszer valódi ereje abban mutatkozik meg, hogy alkalmas arra, hogy a skálatartományból kilépve meghaladja az elmélet kereteit, és egy másik elmélethez tud vezetni bennünket.

A wilsoni renormálás több mint 50 éves múltra tekint vissza [5, 6]. Széles körben alkalmazzák a kvantumos sokrészecske rendszerekben, a részecskefizikában, a gravitációban. Az RG módszer alkalmas skaláris, fermionikus és mértékelméletek fázisszerkezetének feltérképezésére. A wilsoni renormálás a blokkosított hatás evolúcióját írja le, a skálafüggést megadó differenciálegyenlet a Wegner-Houghton egyenlet [7]. Később megjelent a szakirodalomban az effektív hatásra vonatkozó Wetterich-egyenlet [8, 9], amely átvette a vezető szerepet, és tartja a népszerűségét a mai napig.

A skaláris elméletek RG módszerrel történő vizsgálatakor főleg a fixpontok helyzetét és a hozzájuk tartozó kritikus exponenseket számolták a dimenzió, a belső tér dimenziója, a gradiens kifejtés vagy a funkcionális kiterjesztés függvényében. Többek között az $O(N)$ modell Wilson-Fisher

(WF) fixpontját [10], a 2-dimenziós (2d) sine-Gordon (SG) modell Coleman-pontját [11], illetve az aszimptotikusan biztonságos (AB) gravitáció Reuter-fixpontját vizsgálták [12].

A ϕ^4 modell WF fixpontja 3-dimenzióban (3d) az RG módszer állatorvosi lovaként tekinthető. Ha új koncepcióval állnak elő az RG módszert használó kutatók, akkor egyfajta ellenőrzésképp legtöbbször a WF fixpont exponenseit számolják ki. Eredetileg $4-\epsilon$ dimenzióban vizsgálták a ϕ^4 modellt [13], aminek részecskefizikában van jelentősége, a 3d modell inkább egy effektív elméletének tekinthető, azonban utóbbi perturbatív eszközökkel nem vizsgálható.

A 2d SG modell Coleman-pontját mind perturbatív, mind nemperturbatív esetben is vizsgálták. Érdekes, hogy a fixpont érzéketlen az eddig ismert közelítésekre, az UV és IR tartomány viselkedése azonban változik.

A Reuter-fixpont felfedezése az AB gravitációban az RG módszer reneszánszát hozta el, manapság ez a legnépszerűbb kutatási területe a módszernek [12, 4]. Ezekben a munkákban egyrészt a fixpont kiterjesztését vizsgálták a görbület magasabb hatványai és az anyagi terek figyelembe vételével. Másrészt olyan kutatások is nagy számban folynak, ahol az eredetileg használt RG módszer hiányosságait próbálják kiküszöbölni. Ehhez kapcsolódóan megemlítem a Lorentz szignatúrában számolt evolúciót, ezen a területen számos eredményt értek el a kutatók [14, 15].

A munkám során eleinte skaláris elméletekkel foglalkoztam. Kutatásom egyik központi eleme a spontán szimmetriasértett fázisok tulajdonságainak feltérképezése volt. A modellek IR határesetben vett viselkedését annak ellenére nem vizsgálták részletesen, hogy tudjuk, hogy ez a tartomány hordoz főként fizikai tartalmat. Foglalkoztam a ϕ^4 modell és néhány periodikus modell skálázási tulajdonságával.

Folytattam vizsgálatot az AB gravitáció területén, ahol kezdetben szintén az IR tartományra koncentráltam. Dolgoztam a Lorentz szignatúra használatán a modellben.

A kutatásaimban az RG módszer néhány koncepcionális kérdésével is foglalkoztam. Az RG módszer eliminációja következtében megjelenhetnek a kevert állapotok a rendszerben, amennyiben az UV és IR módusok összefonódnak. Ez azt mutatja, hogy az RG módszer nyílt dinamikát ír le. A renormálás valós idejű megfogalmazása a zárt időtengelyes (CTP) formalizmusban tehető meg konzisztens módon, amely kevert állapotok járulékát is figyelembe veszi [16]. Kutatásaim során kerestem a nyílt dinamika következtében megjelenő esetleges új releváns kölcsönhatásokat. A valós idejű renormálás az elmúlt két évtizedben vált népszerű kutatási területté. Erre szükség van dinamikai folyamatoknál, ahol az idő explicit módon megjelenik (pl. nemegyensúlyi folyamatok, kozmológia, stb.), de CTP formalizmus nagyon hatékony a nemrelativisztikus kondenzált anyagok vizsgálatánál vagy a részecskefizikában is.

Célkitűzések

A kvantumelmélet felfedezése óta foglalkoztatja a fizikusokat az a kérdés, hogyan kapjuk meg a kvantumelméletből a klasszikus elméletet. A kvantumelmélet a kis távolságok, nagy energiák elmélete, míg a klasszikus fizika ellenkezőleg: a nagy távolságokhoz és kis energiákhoz tartozik. Innen szemlélve mondhatjuk, hogy a kvantum-klasszikus átmenet az RG módszerrel hatékonyan vizsgálható. A kutatásaimban alapvető motívum közelebb kerülni a kvantum-klasszikus átmenet megértéséhez.

A tradicionális RG módszer keretében a skaláris kvantumelméletek effektív potenciálját kerestem. Célom az volt, hogy az effektív potenciál meghatározásával feltérképezzem a modellek fázisszerkezetét, megkeressem a releváns operátorokat, kiszámoljam a releváns csatolások IR skálázását. Ennek kapcsán felmerült a modelleknél, hogy a szimmetriasértett fázisban megjelenő szingularitást leírjam, és annak fizikai értelmezését adjam. Egy lehetséges magyarázat szerint a szingularitás a kvantum-klasszikus átmenet határát jelöli ki.

Kutatásomban fontos szerepet játszott a szinguláris viselkedés részletes analitikus és numerikus analízise. Grafikusan ábrázolva a fázisteret világosan látszik, hogy a szingularitás egy vonzó tartománya a fázistérnek, amely fixponthoz hasonló viselkedést rejt. Célom volt a megjelenő IR fixpontot tulajdonságait meghatározni, továbbá olyan fizikai mennyiségeket találni, amelyek skáláznak az IR-ben. Másik célom volt annak a vizsgálata, hogy mely modellekben lehet elkerülni a szinguláris viselkedést, és melyekben nem.

Az effektív potenciál meghatározása az adott skaláris kvantumelmélet alacsony energiás viselkedését írja le. Ahhoz, hogy a klasszikus átmenetet megkapjam, a tradicionális RG módszert át kell dolgozni, úgy, hogy az átmeneti amplitúdók helyett a sűrűségmátrix skálainvarianciáját használjam. Ezzel az RG módszer teljesebb leírását kaphatom, mert a hagyományos renormálással szemben ebben a formalizmusban az összefonódásból származó kevert állapotok járulékát is figyelembe vehetem. Célom volt meghatározni a kevert állapotok járulékát, megkeresni a kevert állapotok következtében megjelenő esetleges új releváns csatolásokat.

Az RG módszer valós idejű, CTP formalizmussal vett általánosításával egy egykomponensű skalármodellt vizsgáltam. A környezet és rendszer kölcsönhatásának pontos leírásához számos ponton kell a hagyományos RG módszert módosítani. Szükség van nem-lokális kölcsönhatások bevezetésére, komplex csatolásokra és a levonási pont gondos megválasztására. Célom volt, hogy megértsem, milyen szerepet töltenek be ezek a pontok a renormálásban, azok hogyan befolyásolják a hagyományos formalizmusban kapott eredményeket.

Vizsgáltam nem-lokális potenciál szerepét euklideszi egyidőtengelyes modellekben. A szokásos egykomponensű skalártér mellett a periodikus SG modellt is analizáltam. Célom volt a lokális és nem-lokális potenciállal kapott eredmények összehasonlítása. A kvantumelméletek valós idejű megfogalmazása nyitott kérdés, de ebben az irányban is sikerült lépéseket tennem. A konform redukált gravitációs elméletben használtam a valós idejű formalizmust, és vizsgáltam a modell tulajdonságait.

A CTP formalizmus kapcsán vált világossá, hogy az RG módszer a vizsgált fizikai rendszerek nyílt dinamikáját adja. Egyik fő célkitűzésem az lett, hogy megmutassam, a rendszer és környezet összefonódása releváns kölcsönhatást ad, emiatt az RG módszer hagyományos egyidőtengelyes tárgyalása korrekcióra szorul.

Ez utóbbi célkitűzésem a renormálás olyan problémáira hívja fel a figyelmet, amelyekkel kevesen foglalkoznak. Ennek ellenére azt gondolom, hogy amíg erre a kérdésre nem kapunk megnyugtató választ, addig kérdésessé tehetők a hagyományos renormálási csoport módszerrel kapott eredmények.

Módszerek

A célkitűzéseim megvalósításához az RG módszert használtam. Fontos, hogy a módszer nem-perturbatív, mert gyakran szükséges kritikus jelenségek vizsgálata, ahol jellemzően nemlineáris, nem analitikus, általában perturbatív módon nem elérhető fázistartományban vizsgálódunk.

Ahogy a felvetett kérdések finomodnak, az RG módszer is változtatásra szorul. A tradicionális euklideszi, egyidőtengelyes formalizmuson túl megjelenik a Lorentz szignatúrában megfogalmazott RG módszer, amely az AB gravitáció vizsgálatában kulcsszerepet játszik. A Lorentz szignatúra maga után vonja, hogy a csatolások komplexekké válnak, amely sokkal összetettebbé teszi a fázisszerkezetet.

Hasonló szükséges általánosítás a bilokális potenciál figyelembe vétele a hatásban. Ennek jelentőségét az adja, hogy eredményeim szerint a WH-egyenletben generálódnak olyan tagok, amelyek egy nemlokális potenciál fejlődéséhez adnak járulékot.

A kevert állapotok járulékát leíró RG módszert a zárt időtengelyes formalizmusban lehet figyelembe venni, ami csak Lorentz szignatúra használatával tehető meg. A formalizmus a térváltozók megkettőzésével jár. A két időtengelyt összekötő nem-lokális kölcsönhatások figyelembevétele nem lehetséges a tradicionális RG módszer keretében.

Új tudományos eredmények

A dolgozatban a sine-Gordon (SG) modellt, a ϕ^4 elméletet és az AB gravitációt vizsgáltam különböző aspektusokból az RG módszer segítségével. A modellek fázisszerkezetét, a fixpontokat, valamint az IR viselkedést kerestem.

Skaláris modellek effektív potenciálja

1.1 Meghatároztam az SG modell IR viselkedését mindkét fázisban. Követve a felharmonikusok evolúcióját is, megmutattam, hogy az ionizált (szimmetrikus) fázisban az effektív potenciál triviális, és a felharmonikusokhoz tartozó csatolások egyetlen releváns paraméterrel jellemezhetők. A felharmonikusok figyelembevételével megkaptam a fordított parabola alakú effektív potenciált a molekuláris (szimmetriasértett) fázisban [T1]. Megoldottam a WH-egyenletet a periodikus potenciál Fourier sorfejtése nélkül, és azt kaptam, hogy a szimmetriasértett fázisban véges k skálán az evolúció leáll, mert a térváltozó már nem megfelelő változó a probléma leírására. Ezt kvantum cenzúrának neveztem el [T2]. Rámutattam, hogy az SG modell szimmetriasértett fázisa egy speciális hullámszámnál a 2-dimenziós többszínű kvantum-színdinamikával ekvivalens, és az utóbbi modell emiatt egyetlen fázissal rendelkezik [T3].

1.2 Meghatároztam a tömeges sine-Gordon (MSG) modell alacsony energiás viselkedését. A modell a 2-dimenziós kvantum-elektrodinamika (QED_2) bozonizált változata $\beta^2 = 4\pi$ esetén. Megmutattam, hogy egy külső homogén bariontér periodikus töltéssűrűséget indukál [T4], valamint hogy a modellnek két fázisa van a külső bariontöltés nagyságától függően: a gyenge külső teret teljesen leárnyékolja az indukált töltés, míg erős külső tér esetén a leárnyékolás részleges [T5]. Az MSG modell IR viselkedése alapján arra következtettem, hogy a modellnek két fázisa van, és a szimmetriasértett fázis elkerülhetetlenül szinguláris viselkedést mutat [T6]. Megmutattam, hogy a QED_2 modellnek két fázisa van, ahol a fázishatár $m/e = 0.31$-nek adódott, ahol m az elektron tömege, e a töltése [T7]. Az eredmény pontos egyezést mutat rácsszimulációkkal.

1.3 Igazoltam, hogy a 3-dimenziós ϕ^4 modellben szintén jelen van a kvantum cenzúra, azaz a szimmetriasértett fázisban az evolúció leáll véges skálán [T8]. Az 1-dimenziós ϕ^4 modellben, ami egy kvantum anharmonikus oszcillátornak felel meg, kiszámítottam az alap és az első gerjesztett állapot energiáját egy-, illetve kétrészecske irreducibilis formalizmusban a negyedrendű csatolás, mint skálaparaméter függvényében, és pontos egyezést kaptam a más módszerrel meghatározott irodalmi értékekkel [T9]. Rámutattam, hogy az alapállapoti energia számolása alkalmas az optimális regulátor megválasztására, ami meglepő módon lokális potenciál közelítésben nem a Litim regulátornak adódott [T10]. Egy hőfürdőhöz csatolva az anharmonikus oszcillátort, meghatároztam a szuszceptibilitás és a korrelációs hossz kritikus exponensét [T11], megmutattam, hogy azok levágásfüggetlenek.

Infravörös fixpont a skalárelméletekben

2.1 Meghatároztam az egykomponensű SG modell alacsony és nagyenergiás viselkedését a hullámfüggvény renormálás figyelembevételével. Megmutattam, hogy a modell szimmetriasértett fázisának IR viselkedése skálázási tulajdonságokat mutat, ezért bevezettem a IR fixpontot. Meghatároztam a hozzá tartozó korrelációs hossz kritikus exponensét [T12]. Megmutattam, hogy az eredmény független a regulátortól [T13]. Rámutattam, hogy az UV és az IR skálázás egyfajta dualitást mutat, azaz az UV-ben is találunk egy nem-triviális fixpontot, ezért az SG modell aszimptotikusan biztonságos (AB) [T14]. Hasonló analízist végeztem az SG általánosított modelljein is [T15]. Megmutattam, hogy az IR skálázás alapján az SG és a réteges SG modell végtelen rendű, az MSG modell pedig másodrendű fázisátalakulást mutat.

2.2 Megtaláltam az IR fixpontot a ϕ^4 elméletben is. Vizsgáltam a d-dimenziós $O(N)$ modellt [T16], és megmutattam, hogy nemcsak a 3-dimenziós, másodrendű fázisátalakulást mutató modell tartalmaz IR fixpontot, hanem a 2-dimenziós $O(2)$ modell is, ahol a fázisátalakulás végtelen rendű. Az IR skálázás alapján meghatároztam a korrelációs hosszhoz tartozó kritikus exponenseket, amelyek pontos egyezést mutattak a szakirodalomban ismertetekkel.

2.3 Az IR fixpontra kapott eredményeim alapján azt a következtetést vontam le, hogy a skaláris modellek spontán szimmetriasértett fázisában általában egy vonzó IR fixpont található [T17]. Megmutattam, hogy a vizsgált modelleknek általános és az AB gravitációéhoz hasonló a fázisszerkezetük: az UV fixpontból induló trajektóriákat az átmeneti fixpont szeparálja, és az IR fixpontba futnak a szimmetriasértett fázisban.

Aszimptotikusan biztonságos gravitáció alacsony és nagy energián

3.1 Elsőként a szakirodalomban megmutattam, hogy az AB gravitáció szimmetriasértett fázisában megjelenő szinguláris viselkedés egy újabb fixpontot rejt [T18], ez az IR fixpont. A fixpont IR vonzó, jellemzően egyik irányban vonzó, másik irányban marginális. Megmutattam, hogy az IR fixpont alapján az AB gravitációban másodrendű fázisátalakulás van, azonban bizonyos kiterjesztések elsőrendű fázisátalakulást adnak.

3.2 Az AB gravitáció modelljében meghatároztam a Reuter-fixponthoz tartozó korrelációs hossz kritikus exponensét a regulátorok egy széles halmazán [T19]. Megmutattam, hogy a ϕ^4 modellel ellentétben nincs optimális regulátor. A regulátorok megengedik, hogy akár a fixpont jellege is megváltozzon, amelyből azt a következtetést vontam le, hogy az AB gravitáció modellje lényegében tetszőleges jóslatot adhat.

3.3 A konform redukált AB gravitációban meghatároztam a modell fázisszerkezetét úgy, hogy figyelembe vettem a WH-egyenlet által generált nem-lokális tagokat [T21]. Kiszámoltam az anomális dimenziót különböző sémákban. Meghatároztam a Reuter-fixpont helyét és az exponenseket. Megmutattam, hogy a nem-lokális tag releváns, ugyanúgy helyesen adja vissza a Reuter-fixpontot és exponenseit. Az eredmény azt mutatja, hogy a lokális hatás gradiens kifejtéséből származó anomális dimenzió és a nem-lokális tagból származó összeegyeztethető.

3.4 Egy új eljárást dolgoztam ki, amelynek a segítségével Lorentz szignatúrában sikerült a konform redukált AB gravitáció modelljét feltérképeznem. Az időirányt kiintegrálva és a maradék térimpulzusokban blokkosítva különböző regulátorok esetén meghatároztam a Reuter-fixpont helyzetét és az exponenseket. A munka lehetővé tette, hogy a hagyományos euklideszi formalizmus helyett a fizikailag sokkal relevánsabb Lorentz szignatúrát használva vizsgáljam a modellt [T20].

3.5 Megmutattam, hogy az AB gravitáció konform redukált alakjában, amennyiben a tér és idő irányú hullámfüggvény renormálást hagyjuk egymástól függetlenül fejlődni, akkor a Reuter-fixpont csak közelítőleg fixpont, amely a Lorentz szimmetria sérüléséig jó közelítésnek tekinthető, azonban növelve a skálát, a szimmetriasértés elmossa a Reuter-fixpont közelében lévő skálázást. Tovább haladva az evolúcióban egy új fixpont jelenik meg, amely összeegyeztethető a Horava-féle gravitációs modell gravitációmentes UV fixpontjával, ahol a futó Newton-állandó nullához, míg a futó kozmológiai állandó véges pozitív értékhez tart [T22].

Renormálás valós időben

4.1 Eljárást dolgoztam ki olyan RG egyenlet származtatására, amelyben az evolúció során figyelembe vesszük az összefont állapotok járulékát is. Az új eljárást kvantum renormálási csoportnak neveztem el [T23]. A WH-egyenletet valós időben, CTP formalizmusban írtam fel. Megmutattam, hogy a blokkosítás során éles levágásnál egy nem triviális nyeregpont jelenik meg, amely nemlokális járulékot ad a blokkosított hatáshoz, amely új releváns csatolásokat eredményez. Meghatároztam a bilokális potenciál hatását ϕ^4 modellben [T24], az SG modellben [T25], az AB gravitációban [T21], és rámutattam, hogy a bilokalitás a gradiens kifejtés véges kiterjesztésének tekinthető.

4.2 Megvizsgáltam, hogy az RG módszernek a Minkowski-téridőben történő vizsgálata milyen változást eredményez a tradicionális euklideszi tárgyalással szemben. A frekvenciaváltozót kiintegrálva az éles levágás esetén is tudtam térfüggő hullámfüggvény renormálást számolni. Megmutattam, hogy véges levonási pontot kell alkalmaznunk, hogy a tömeghéj járulékát megkapjuk [T26]. Azt is megmutattam, hogy a csatolások komplexekké válnak, és a tömeg képzetes része azonosítható a Feynman epszilonnal. Az eljárás a Wetterich-egyenlet esetén is komplex csatolásokra vezet [T27]. Ez dinamikai módon sérti az időtükrözési szimmetriát. Emellett nincs gaussi fixpont, aszimptotikusan kaphatjuk meg a szabad elmélet skálázását. A Minkowski-formalizmus következtében gyökeresen megváltozik a fázisszerkezet, a WF fixpont is eltűnik.

4.3 Éles levágást használva elvégeztem az egykomponensű ϕ^4 modell RG analízisét zárt időtengelyes formalizmusban [T28]. A formalizmussal figyelembe vehettem az UV és IR módusok közötti összefonódást, amelynek a járulékai a tradicionális RG formalizmusban nem szerepelnek. Az RG módszer a fizikai rendszertReuter-fixpont dinamikai szempontból nyílttá teszi, de a lokális csatolásokat követve ezt nem láthatjuk. Az időtengelyeket összekötő nyílt csatolásokat vezettem be, amelyek a szakirodalomban eddig nem szerepeltek. A nyílt csatolások között számos releváns van, amely azt mutatja, hogy az UV-IR összefonódás, a rendszer nyíltsága nem hanyagolható el, továbbá a nyíltság miatt új fázisok jelennek meg.

Tézispontokhoz kapcsolódó publikációk

[T1] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi and K. Sailer, „Renormalizable parameters of the sine-Gordon model," Phys. Lett. B **647**, 152-158 (2007)

[T2] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer, Phys. Lett. B **694**, 89-93 (2011) doi:10.1016/j.physletb.2010.09.041 [arXiv:0907.0496 [hep-th]].

[T3] J. Kovacs, S. Nagy, I. Nandori and K. Sailer, „Renormalization of QCD_2," JHEP **01**, 126 (2011)

[T4] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer, „Periodic ground state for the charged massive Schwinger model," Phys. Rev. D **70**, 105023 (2004)

[T5] S. Nagy, „Massless fermions in multi-flavor QED(2)," Phys. Rev. D **79**, 045004 (2009)

[T6] S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer, „Effective potential for the massive sine-Gordon model," J. Phys. A **39**, 8105-8117 (2006)

[T7] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi and K. Sailer, „Generalized universality in the massive sine-Gordon model," Phys. Rev. D **77**, 025026 (2008)

[T8] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi and K. Sailer, „Onset of symmetry breaking by the functional RG method," Int. J. Mod. Phys. A **26**, 1327-1345 (2011)

[T9] S. Nagy and K. Sailer, „Functional renormalization group for quantized anharmonic oscillator," Annals Phys. **326**, 1839-1876 (2011)

[T10] J. Kovacs, S. Nagy and K. Sailer, „Optimized regulator for the quantized anharmonic oscillator," Int. J. Mod. Phys. A **30**, no.12, 1550058 (2015)

[T11] J. Kovacs, B. Fazekas, S. Nagy and K. Sailer, „Quantum-classical transition in the Caldeira-Leggett model," Annals Phys. **376**, 372-381 (2017)

[T12] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi and K. Sailer, „Functional renormalization group approach to the sine-Gordon model," Phys. Rev. Lett. **102**, 241603 (2009)

[T13] S. Nagy and K. Sailer, „Interplay of fixed points in scalar models," Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1350130 (2013)

[T14] J. Kovacs, S. Nagy and K. Sailer, „Asymptotic safety in the sine-Gordon model," Phys. Rev. D **91**, no.4, 045029 (2015)

[T15] S. Nagy, „Degeneracy induced scaling of the correlation length for periodic models," Nucl. Phys. B **864**, 226-240 (2012)

[T16] S. Nagy, „Critical exponents of the O(N) model in the infrared limit from functional renormalization," Phys. Rev. D **86**, 085020 (2012)

[T17] S. Nagy, „Lectures on renormalization and asymptotic safety," Annals Phys. **350**, 310-346 (2014)

[T18] S. Nagy, J. Krizsan and K. Sailer, „Infrared fixed point in quantum Einstein gravity," JHEP **07**, 102 (2012) 5doi:10.1007/JHEP07(2012)102

[T19] S. Nagy, B. Fazekas, L. Juhasz and K. Sailer, „Critical exponents in quantum Einstein gravity," Phys. Rev. D **88**, no.11, 116010 (2013)

[T20] S. Nagy, K. Sailer and I. Steib, „Renormalization of Lorentzian conformally reduced gravity," Class. Quant. Grav. **36**, no.15, 155004 (2019)

[T21] F. Gégény and S. Nagy, „Renormalization of the conformally reduced gravity with bilocal potential," Int. J. Mod. Phys. A **35**, no.22, 2050123 (2020)

[T22] F. Gégény, S. Nagy and K. Sailer, „On the Lorentz symmetry in conformally reduced quantum gravity," Class. Quant. Grav. **40**, no.4, 045004 (2023)

[T23] S. Nagy, J. Polonyi and I. Steib, „Quantum renormalization group," Phys. Rev. D **93**, no.2, 025008 (2016)

[T24] S. Nagy, J. Polonyi and I. Steib, „Euclidean scalar field theory in the bilocal approximation," Phys. Rev. D **97**, no.8, 085002 (2018)

[T25] I. Steib and S. Nagy, „Renormalization of the bilocal sine-Gordon model," Int. J. Mod. Phys. A **34**, no.21, 1950117 (2019)

[T26] I. Steib, S. Nagy and J. Polonyi, „Renormalization in Minkowski space–time," Int. J. Mod. Phys. A **36**, no.05, 2150031 (2021)

[T27] F. Gégény and S. Nagy, „Complex couplings in renormalization," Int. J. Mod. Phys. A **37**, no.11n12, 2250061 (2022)

[T28] S. Nagy and J. Polonyi, „Renormalizing Open Quantum Field Theories," Universe **8**, no.2, 127 (2022)

Irodalomjegyzék

[1] J. Polonyi, „Lectures on the functional renormalization group method,” *Central Eur.J.Phys.*, vol. 1, pp. 1–71, 2003.

[2] K. G. Wilson, „The renormalization group and critical phenomena,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 55, pp. 583–600, 1983.

[3] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, „Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics,” *Phys.Rept.*, vol. 363, pp. 223–386, 2002.

[4] N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J. M. Pawlowski, M. Tissier, and N. Wschebor, „The nonperturbative functional renormalization group and its applications,” *Phys. Rept.*, vol. 910, pp. 1–114, 2021.

[5] K. G. Wilson, „Renormalization group and critical phenomena. 1. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture,” *Phys. Rev.*, vol. B4, pp. 3174–3183, 1971.

[6] K. G. Wilson and J. B. Kogut, „The Renormalization group and the epsilon expansion,” *Phys. Rept.*, vol. 12, pp. 75–200, 1974.

[7] F. J. Wegner and A. Houghton, „Renormalization group equation for critical phenomena,” *Phys.Rev.*, vol. A8, pp. 401–412, 1973.

[8] C. Wetterich, „Exact evolution equation for the effective potential,” *Phys.Lett.*, vol. B301, pp. 90–94, 1993.

[9] T. R. Morris, „The Exact renormalization group and approximate solutions,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A9, pp. 2411–2450, 1994.

[10] D. F. Litim and D. Zappala, „Ising exponents from the functional renormalisation group," *Phys.Rev.*, vol. D83, p. 085009, 2011.

[11] D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, and G. Grinstein, „Renormalization Group Analysis of the Phase Transition in the 2D Coulomb Gas, Sine-Gordon Theory and xy Model," *J.Phys.*, vol. A13, p. 585, 1980.

[12] M. Reuter, „Nonperturbative evolution equation for quantum gravity," *Phys.Rev.*, vol. D57, pp. 971–985, 1998.

[13] K. G. Wilson and M. E. Fisher, „Critical exponents in 3.99 dimensions," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, pp. 240–243, 1972.

[14] E. Manrique, S. Rechenberger, and F. Saueressig, „Asymptotically Safe Lorentzian Gravity," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, p. 251302, 2011.

[15] A. Eichhorn, „Steps towards Lorentzian quantum gravity with causal sets," in *9th International Conference: Spacetime - Matter - Quantum Mechanics: From discrete structures and dynamics to top-down causation (DICE2018) Castiglioncello , Tuscany , Italy, September 17-21, 2018*, 2019.

[16] J. Polonyi, „Quantum-classical crossover in electrodynamics," *Phys. Rev.*, vol. D74, p. 065014, 2006.