

sandornagy_161_23

MTA doktori értekezés

**Renormálási csoport módszer alkalmazása
kvantumelméletekben**

Nagy Sándor

DEBRECENI EGYETEM
Elméleti Fizikai Tanszék

Debrecen
2024

sandornagy_161_23

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, a kutatás előzményei	2
2. Evolúciós egyenletek	10
2.1. A Wegner-Houghton egyenlet	10
2.2. A Wetterich-egyenlet	12
2.3. Az evolúciós egyenletek összehasonlítása	14
3. Skaláris modellek effektív potenciálja	16
3.1. A sine-Gordon modell	16
3.2. A tömeges sine-Gordon modell	20
3.3. A ϕ^4 modell	23
4. Infravörös fixpont a skalárelméletekben	29
4.1. A sine-Gordon modell infravörös viselkedése	30
4.2. Az infravörös fixpont	33
4.3. Infravörös fixpont periodikus modellekben	37
4.4. Az $O(N)$ modell infravörös fixpontja	43
4.5. Infravörös fixpont további modellekben	46
5. Aszimptotikusan biztonságos gravitáció alacsony és nagy energi- án	51
5.1. A Reuter-fixpont	53
5.1.1. Az aszimptotikusan biztonságos gravitáció infravörös viselke- dése	56
5.2. Kritikus exponensek az aszimptotikusan biztonságos gravitációban .	57
5.3. Konform redukált aszimptotikusan biztonságos gravitáció	61
5.3.1. A konform redukált gravitáció bilokális hatással	62
5.3.2. A konform redukált gravitáció Lorentz szignatúrával	63
5.3.3. Lorentz-invariancia a konform redukált gravitációban	67
5.4. Az aszimptotikusan biztonságos gravitáció nyitott kérdései	74

6. Renormálás valós időben	77
6.1. Nyílt kvantumrendszerek	80
6.1.1. Zárt rendszerek	80
6.1.2. Nyílt rendszerek	80
6.1.3. A propagátor	81
6.1.4. Fa-szintű renormálás	82
6.2. Nem-lokális evolúció	84
6.3. Minkowski-téridő, levonási pont	88
6.3.1. Komplex csatolások a Wetterich-egyenletben	90
6.4. Renormálás és nyílt dinamika	92
Köszönetnyilvánítás	96
Irodalomjegyzék	97

sandornagy_161_23

Készült

a Debreceni Egyetem Elméleti Fizikai Tanszékén

sandornagy_161_23

Rövidítések

UV	ultraibolya
IR	infravörös
RG	renormálási csoport
WH	Wegner-Houghton
GFP	gaussi fixpont
NGFP	nem-gaussi fixpont
WF	Wilson-Fisher
CTP	zárt időtengelyes
dd	d-dimenziós
SG	sine-Gordon
MSG	tömeges sine-Gordon
QED	kvantum-elektrodinamika
QCD	kvantum-színdinamika
AB	aszimptotikusan biztonságos
CS	Callan-Symanzik
1PI	egyrészecske irreducibilis
2PI	kétrészecske irreducibilis
css	kompakt tartójú sima
LSG	réteges sine-Gordon
NLSM	nem-lineáris σ modell
GN	Gross-Neveu
PT	valódi idejű
EH	Einstein-Hilbert
KRG	konform redukált AB gravitáció
ADM	Arnowitt-Deser-Misner

1. fejezet

Bevezetés, a kutatás előzményei

A múlt század két legfontosabb eredménye a fizikában a relativitáselmélet, amely a gravitációs kölcsönhatást tárgyalja, és a kvantumelmélet, amely a további három alapvető kölcsönhatás - az elektromágneses, a gyenge és az erős kölcsönhatás - pontos leírását adja. A kvantummechanika sikeresen magyarázta meg az atomfizikai folyamatokat, ahol a kvantumrészecskék klasszikus terekkel való kölcsönhatását számolták. Amint a klasszikus teret kvantumtéreként vesszük figyelembe, azonnal egy súlyos problémába ütközünk: bizonyos fizikai mennyiségek végtelenné válnak. A tereket (másképp nevezve: mezőket) lényegében harmonikus oszcillátorok összegeként írhatjuk fel, ezért a terek energiája végtelen. Ezzel a végtelennel könnyű elbánni, normálrendezéssel végessé válik az energia. Az okoz problémát, hogy végtelen sok oszcillátor alapállapotú energiát adunk össze egyre nagyobb frekvenciával, tehát a nagy energiák esetén divergens kifejezést kapunk.

A mikroszkopikus elméletek csupasz paramétereit a klasszikus megfelelőiből vagy azok analóg elméleteiből örököljük. Szükséges ezen paraméterek átdefiniálása úgy, hogy azok a fizikai értéket vegyék fel. A csupasz paraméterek végesek is lehetnek alacsony dimenziós játékmódokban vagy effektív modellekben, de általában végtelenek. A renormálás az az eljárás, amely a csupasz paramétereket azok fizikai értékeire állítja be. Ebből látszik, hogy leggyakrabban a renormálás a végtelen eltávolítására született. Egyik megoldás a végtelen elkerülésére az UV integrál levágása, ahol nem végtelenig, hanem egy Λ paraméterig integrálunk, ezzel a Λ mint egy regulátor paraméter jelenik meg az elméletekben. Ha elméleti jóslatot szeretnénk tenni, akkor el kell érnünk, hogy a Λ -tól ne függjenek eredményeink. Ennek egy nagyon egyszerű és gyakran használt módja, hogy olyan jelenségeket vizsgálunk, amelyeknek az energiaskálája messze van a levágástól.

A regulátor paramétertől való függetlenség olyan transzformációk formájában jelenik meg, amelyek félcsoportot alkotnak, az eljárás neve pedig (pontatlanul) renormálási csoport (renormalization group, RG) módszer. Alapvetően két RG módszert különböztetünk meg, a perturbatív és a funkcionális formát. Előbbi valóban a regulátor függetlenségre épül. Utóbbi szerepe is kapcsolható a végtelenek

eltávolításához, azonban a funkcionális RG módszerben az a fontos, hogy több méretskálát vizsgál egyszerre.

A mikroszkopikus elméleteket kis távolságokon jól ismerjük. A kis távolság nagy energiának felel meg, ezt ultraibolya (ultraviolet, UV) skálának nevezzük. A mikroszkopikus kölcsönhatásban szereplő paraméterek emiatt az UV skálán ismertek. Ezeket a paramétereket csatolásoknak nevezzük. A csatolások egy kölcsönhatás erősségét jellemzik egy adott energiaskálán, emellett a tömegparamétereket is csatolásoknak tekintjük. Azt keressük, hogy a csatolás értéke hogyan függ az energiaskálától. Célunk az, hogy meghatározzuk a vizsgált rendszer makroszkopikus, nagy távolságokhoz tartozó, vagy másképp fogalmazva, alacsony energiás, infravörös (infrared, IR) viselkedését.

A mikroszkopikus és makroszkopikus fizika közötti hídverés nem feltétlen igényli az RG módszert. Gondoljunk csak a hidrodinamikára, ahol a mikroszkopikus fluktuációk kiátlagolásával megkaphatjuk a hidrodinamika klasszikus egyenleteit. Ebből az a tanulság, hogy a probléma szempontjából mindössze egyetlen méretskála az érdekes, ez a molekuláris szinten található mikroszkopikus skála. A funkcionális RG módszer akkor hatékony módszer, ha az elméletben található fluktuációk nem egy, hanem több méretskálán fontosak. Ilyen jelenségek gyakran fordulnak elő a részecskefizikában vagy a kondenzált anyagok fizikájában. Az egyik szemléletes példa a kritikus jelenségek köre, ahol a folytonos fázisátalakulásoknál minden méretskála fontos, a fizikai rendszer a kritikus pont közelében önhasonló, minden skála releváns.

Ez a gondolatmenet követhető a ϕ^4 modell esetében [1]. Eredetileg Landau 1937-ben egy egyszerű negyedrendű energia alakot javasolt a szabadenergiára ferromágneses átalakulás leírására:

$$F = V \left(\frac{1}{2} g_2 \phi^2 + \frac{1}{24} g_4 \phi^4 \right), \quad (1.1)$$

ahol a ϕ az anyag mágnesezettsége, V a térfogat, g_2 és g_4 az elmélet paraméterei. A g_4 előjele pozitív, a g_2 lehet pozitív és negatív is. Utóbbi esetben az energia minimuma egy nem-triviális ϕ_0 értéknél van. A modell a paramágneses-ferromágneses átalakulást írja le, azonban a fázisátalakulást jellemző kritikus exponenseket helytelenül adja meg. A Ginsburg-Landau elmélet ennek általánosítása, az alapötlet az, hogy legyen a $\phi(x)$ helyfüggő:

$$F = \int d^3x \left((\nabla \phi(x))^2 + \frac{1}{2} g_2 \phi^2(x) + \frac{1}{24} g_4 \phi^4(x) - j(x) \phi(x) \right). \quad (1.2)$$

Az első tag a kinetikus energiát írja le, az utolsó pedig a forrást. A modell további általánosítása tartalmazhatja a ϕ vagy a ∇ derivált operátor magasabb hatványait, utóbbi a gradiens kifejtést jelenti. A kritikus exponenseket újraszámolva megint helytelen eredményt kapunk. Ennek az az oka, hogy a hidrodinamikához

hasnólóan továbbra is a kis méretekhez tartozó fluktuációkat átlagoljuk, mert a g_2 és g_4 paramétereiket a kis méreteknél rögzítettük. Ha figyelembe szeretnénk venni a nagyobb méretskálákhoz tartozó fluktuációkat, akkor a paramétereknek is (méret)skálafüggőknek kell lenniük:

$$F = \int d^3x \left((\nabla\phi(x))^2 + \frac{1}{2}g_2(k)\phi^2(x) + \frac{1}{24}g_4(k)\phi^4(x) - j(x)\phi(x) \right). \quad (1.3)$$

Bevezettük a k energiaskálát, ennek inverze az aktuális méretskála. Kenneth Wilson vezetett le differenciálegyenletet a csatolásokra. Ennek megoldása, és az abból számolt kritikus exponensek már helyesek.

Ha a k skála megegyezik a rendszer aktuális korrelációs hosszával, akkor ez nem-analitikusságot vezet be az elméletbe. Ennek kulcsszerepe van, mert a szabadenergia, illetve az abból számolt partíciós függvény, kvantumtérelméletben a generáló funkcionál, analitikus a hőmérsékletben. A kritikus jelenségek esetén a skálázás azonban a hőmérséklet nem-analitikus függvénye. Ez jöhet a termodinamikai limeszből, azonban, ahogyan ez a Landau és a Ginsburg-Landau elméletből látszik, nem ad helyes eredményt. A korrelációs hosszánál lévő további nem-analitikus viselkedés viszont már megfelelő eredményt ad.

A funkcionális RG módszer alkalmas elméleti keretet ad arra, hogy a különböző méretskálán található fluktuációkat szisztematikusan felösszegezze, és ezzel az UV skáláról indulva megmutassa, hogy az adott rendszer hogyan viselkedik az IR skálán.

A gondolatmenet egyik következménye, hogy a fizikai paraméterek, a csatolások skálafüggők lesznek. Ezt már a perturbatív renormálásnál is láthattuk. A perturbációs megközelítésben kell lennie kis paraméternek az elméletben, amely szerint kifejtünk, ez többnyire a csatolás, azaz gyenge kölcsönhatásokat vizsgálunk. Ezzel szemben a funkcionális RG módszer nem követeli meg, hogy a kölcsönhatás perturbatív legyen, emiatt a funkcionális RG módszert gyakran nem-perturbatív RG-nek is nevezik. A funkcionális RG-ben szintén van kis paraméter, ez a skála változása és a levágás hányadosa lesz.

A perturbatív és a funkcionális RG módszer számtalan módon kapcsolódik, és vannak speciális esetek, amikor meg lehet mutatni, hogy a két megközelítés ugyanazt az eredményt adja. A legfontosabb különbség az, hogy a perturbatív renormálás csak renormálható elméleteknél használható hatékonyan. Ahhoz, hogy ezt a mondatot megtöltsük tartalommal, meg kell mondani, mikor renormálható egy elmélet. Megkülönböztetjük a perturbatív és a funkcionális renormálhatóságot. Előbbi esetben arról van szó, hogy egy fizikai mennyiség perturbációs kifejtéséhez nincs szükség új kölcsönhatások bevezetésére. Ez azt jelenti, hogy a kiinduláskor a hatásban szereplő mikroszkopikus kölcsönhatásokon kívül nem jelenik meg új az elméletben.

A funkcionális renormálhatóság eltér a perturbatív renormálhatóságtól, mert

a csatolások skálafüggésére tesz kitétel, konkrétan azt, hogy azok az UV-ben véges értékhez tartanak. Ezt fogjuk aszimptotikus szabadságnak vagy aszimptotikus biztonságnak hívni. Például a ϕ^4 elmélet, a kvantum-elektrodinamika, a Standard Modell perturbatív módon renormálható, azonban funkcionálisan nem-renormálhatóak. Ezekben az elméletekben a csatolás végtelenhez tart a levágás növelésével.

Az RG módszer alapvetően változtatta meg a fizikai szemléletünket. Megtanított bennünket arra, hogy a fizikában valójában nincsenek állandók. A csatolási állandó elnevezés emiatt nem szerencsés, a csatolási változó nem honosodott meg, a futó csatolási állandó pedig, ugyan az angol nyelvben is használják, egy oximoron. A csatolás elnevezést használjuk, és ebbe beleértjük azt, hogy skálafüggő. Ez egy újabb meglepő következményre vezet, a skálafüggés bizonyos változása azt is jelentheti, hogy maguk a fizikai törvények is skálafüggők, bizonyos energián a törvények fontosak, másikon elhanyagolhatóak. Ilyen kölcsönhatásra lehet egy példa a Cooper párok közötti elektron-elektron kölcsönhatás, amely alacsony energián alapvető a szupravezetés leírásában, azonban nagy energián ez a kölcsönhatás nem számottevő.

Az RG módszer a modern fizika szinte minden területén használják. A kvantumelmélet nagyon széles skálán érvényes, és ezen a skálatartományon szinte mindenütt használjuk az RG módszert:

UC: 10^{-7} meV volt skálánál ultrahideg atomokra használjuk az RG módszert.

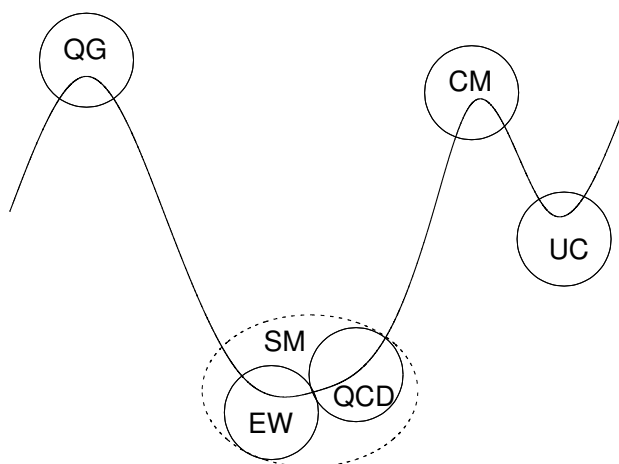
CM: 1 eV energia környékén a kondenzált anyagokban található vezetési elektronok fizikája dominál. Az RG módszer használata ebben a kérdéskörben az egyik legelterjedtebb, sőt a funkcionális RG módszer, ami a Kadanoff blokkosításból származik, eredetileg spinrendszerekre vezettek be.

QCD: Az 1 GeV energián lejátszódó folyamatok a kvantum-színdinamika energiaskáláját adja. A funkcionális RG nagyon hatékony ezen a területen, a kapott eredmények a rácstérelméleti számolásokkal is összevethetők.

EW: 125 GeV-on találjuk a Higgs részecskét, ami az elektrogyenge kölcsönhatás bozonjának szolgáltat tömeget. Az RG módszer ezen az energiatartományon is működik. A megelőző skálával együtt a Standard Modell skálatartományát kapjuk.

QG: A Planck skála környékén, 10^{19} GeV-on azt gondoljuk, hogy a gravitációs effektusok is szóhoz jutnak. Manapság a kvantumgravitáció az RG módszer legnépszerűbb kutatási területe.

A listán 39 nagyságrendnyi energiát öleltünk fel. Az RG módszer képes a legkisebb méretektől a legnagyobbakig, vagy az energiaskála nyelvén fogalmazva, az UV skálától az IR-ig vizsgálatot végezni. A kölcsönhatások skálafüggése, a globális RG



1.1. ábra. A funkcionális renormálási csoport módszer skálatartományainak szemléltetése a csatolások terében. Az energia balról jobbra csökken. A görbe egy trajektóriát reprezentál, amely a skála csökkenésével különböző elméletek érvényességi tartományait éri el. Az ábra [2] alapján készült.

gondolata segítségével vizualizálható [2]. Ezt szemlélteti az 1.1 ábra. A csatolások skálafüggése az RG módszer egyenletei segítségével határozható meg, a csatolások által kifeszített fázistérben a futás trajektóriákkal jeleníthető meg. Az RG módszer kiválóan működik az egyes elméletek érvényességi tartományában. A perturbatív RG-t főleg a Standard Modell területén használjuk, esetleg a kondenzált anyagok fizikájában. Itt a jóslatok nagyon precízek. A kvantumgravitáció erősen nem-perturbatív. Az ábra azt is tükrözi, hogy a funkcionális RG módszer nem elsősorban mérési eredményekkel összevethető elméleti jóslásokra született, sokkal inkább az elméletek globális szerkezetét térképezi fel. Példa erre a kvantumgravitáció RG vizsgálata, ahol nincs remény kísérleti összevetésre, azonban fontos, hogy felismertük, hogy a modellnek van egy UV tartománya, ahol véges eredményt kapunk. A sematikus ábrán az elképzelt trajektória megközelíti az egyes elméleteket, majd utána eltávolodik azoktól. Ez a globális kép az egyes elméletek részletein túl azt is megmutatja, hogy az elméletek hogyan viszonyulnak egymáshoz, hogyan lehetséges egyik elméletből eljutni a másikba.

A perturbatív és a funkcionális renormálhatóság közötti különbség a 1.1 ábrán is jól szemléltethető. A perturbatív renormálhatóság az adott elmélet skálatartományában érvényes. Maga az eljárás immanens, azaz nem képes kilépni a saját skálatartományából. Az ábra alapján funkcionális renormálhatóság nem létezik,

hiszen mindig lesz olyan csatolás, amely kivezet az elméletből, ezáltal transzcendens eljárást ad. Gondoljunk csak a ϕ^4 elmélet trivialitási problémájára. A Higgs tér csatolása ugyan divergál az UV-ben, de azon a skálán már úgysem vagyunk a Standard Modell keretein belül. Az RG módszer arra is alkalmas, hogy megmondja, milyen új kölcsönhatások jelennek meg a skála változtatásával.

A globális RG kép által egységes képet adhatunk a kvantumelmélet megjelenési formáiról a változó skálán. Ennek a képnek az egyszerűsége, eleganciája miatt szerettem meg az RG módszert, és foglalkoztam vele a tudományos pályafutásom alatt.

A funkcionális RG módszer alapjában véve két formában létezik. Az egyik a wilsoni formalizmus, amelyik a Wegner-Houghton (WH)-egyenletre vezet, a másik a Wetterich-egyenlet. Sokszor csak ez utóbbit nevezik funkcionális formalizmusnak. A wilsoni renormálás nemrég volt 50 éves. Kadanoff renormálás ötletét valósította meg a részecskefizikában. A spinrendszerek koordinátatérbeli blokkosítását az impulzustérben végezte el. A WH-egyenlet a blokkosított hatásra vonatkozó RG egyenlet.

A funkcionális RG módszer akkor vált népszerűvé, amikor megjelent a Wetterich-egyenlet, amely az effektív hatás evolúcióját írja le. Először skaláris elméleteket vizsgáltak tetszőleges téridő dimenzióban és tetszőleges számú komponensek esetén. A módszer hatékony véges hőmérsékletű kvantumtérelméletek vizsgálatában is [3]. A Wetterich-egyenlet alkalmas arra is, hogy a hatás gradiens kifejtésben kapott tagjait is kezelje. Ez a wilsoni formalizmusban csak nagy nehézségek árán tehető meg. A Wetterich-egyenlet egy exponenciális alakú regulátort alkalmaz, emiatt az eredeti egyenlet csak numerikusan volt kezelhető, de miután megtalálták az optimális regulátort, az RG egyenletek analitikussá váltak [4]. A wilsoni RG egyenletek formálisan beilleszthetők a Wetterich-egyenletbe megfelelő regulátorválasztással. Szokásosan a WH-egyenletet a Wetterich-egyenlet éles levágású változatának tekintik. Ez csak akkor igaz, ha a blokkosított és az effektív hatás megegyezik, azaz nulla impulzusú vertexek esetén [5].

Az RG módszerrel a skaláris elméleteken keresztül ismerkedtem meg. Először periodikus potenciált tartalmazó modelleket vizsgáltam, kerestem a sine-Gordon (SG) típusú modellek IR viselkedését. Használtam a WH és a Wetterich-egyenletet is. Az effektív potenciál meghatározására koncentráltam, kerestem a releváns csatolásokat az IR limeszben. A megjelenő szingularitásnak fizikai tartalmat tulajdonítottam, amellelt érveltem, hogy a szingularitás egy új fixpontot rejt, az IR fixpontot. A periodikus modellekben szerzett tapasztalatokat sikeresen alkalmaztam a polinomiális potenciálok esetére. Ezeket az eredményeket foglalom össze a 3. fejezetben.

Az IR fixpont a modellekben ott jelenik meg, ahol az RG egyenletek szingularitásba futnak. Skaláris elméletekben a spontán szimmetriasértett fázisban találunk szingularitást, amely általában akkor jelenik meg, amikor a potenciált egy maximumpontja körül fejtjük ki. Ez néha elkerülhető, de a legtöbb modell

hatásában nincs lehetőség a potenciál minimumában kifejtteni. Ilyen az SG modell, ott a Fourier sorfejtést használunk, vagy a kvantumgravitáció, ahol a szinguláris tartomány nem kerülhető el. A témában az eredményeim a 4. fejezetben találhatóak.

A kvantumgravitációban talált Reuter-féle UV fixpont alapvetően változtatta meg az RG módszer helyzetét. Az analitikusan ismert fixpont, az egyszerű béta függvények és a könnyen meghatározható fázisszerkezet a kvantumgravitáció olyan egyszerű képét adta, amely nagyon rövid idő alatt népszerűvé vált. A gravitáció vizsgálata minden más modellt háttérbe szorított az RG módszer területén, és ez a mai napig így van. Ezen a területen az IR fixponttal foglalkoztam, meghatároztam a fixpontot jellemző exponenseket, aztán a Reuter-fixponthoz tartozó exponenseket határoztam meg a regulátor nagyon széles körében. A 5. fejezetben foglaltam össze a témában kapott eredményeimet.

A renormálást eredetileg euklideszi tér-időben használták, ennek oka történeti, technikai és matematikai is. A kvantumgravitáció miatt egyre fontosabbá vált a Lorentz szignatúra, a valós idejű formalizmus használata. Nemcsak a dinamikai rendszerek kapcsán fontos a valós idő, hanem minden modellben, mert a tradicionális tárgyalással kapott korábbi eredmények is változhatnak, például a megjelenő tömeghív szingularitás miatt. A valós idejű RG módszert zárt időtengelyes formalizmusban célszerű megfogalmaznunk, ahol megduplázzuk a térváltozók számát. A két időtengely összekapcsolása új vertexeket eredményez, ezek figyelembevétele segíthet bennünket megtalálni a kevert állapotok járulékát. Az ebben a témában kapott eredményeimet a 6. fejezetben foglaltam össze.

A skaláris elméletek RG módszerrel történő vizsgálatakor főleg a fixpontok helyzetét és a hozzájuk tartozó kritikus exponenseket számolták a dimenzió, a belső tér dimenziója, a gradiens kifejtés vagy a funkcionális kiterjesztés függvényében. Többek között az $O(N)$ modell Wilson-Fisher (WF) fixpontját, a 2-dimenziós (2d) SG modell Coleman-pontját, illetve az aszimptotikusan biztonságos gravitáció Reuter-fixpontját vizsgálták.

A ϕ^4 modell WF fixpontja 3-dimenzióban (3d) az RG módszer állatorvosi lovaként tekinthető. Ha új koncepcióval állnak elő az RG módszert használó kutatók, akkor egyfajta ellenőrzésképp legtöbbször a WF fixpont exponenseit számolják ki. Eredetileg $4 - \epsilon$ dimenzióban vizsgálták a ϕ^4 modellt, aminek részecskefizikában van jelentősége, azonban a 3d modell egy nem mikroszkopikus, effektív elméletnek tekinthető.

A 2d SG modell Coleman-pontja mind perturbatív, mind nem-perturbatív esetben is vizsgált. Érdekes, hogy a fixpont érzéketlen az eddig ismert közelítésekre, az UV és IR tartomány viselkedése azonban változik.

Steven Weinbergnek támadt az az ötlete, hogy a gravitáció renormálhatósága helyreállhat, ha az elméletben létezik egy újabb fixpont, amely nagy energián teszi relevánssá a Newton állandót. Feltette, hogy az UV skálán egy nem-gaussi fixpont létezik, ahol a csatolások értéke véges. A fixpont végessé teszi az elméletet,

biztonságossá teszi azt a divergenciáktól, innen ered az aszimptotikusan biztonságos elnevezés. A név nyilván utal az aszimptotikus szabadság fogalomra, ahol UV-ben a csatolások nullához tartanak. Aszimptotikus szabadság esetén a fixpont a gaussi, aszimptotikus biztonság esetén nem-gaussi, a fixponti UV elmélet kölcsönható. Emiatt nevezik a fixpontot kölcsönhatónak is. Manapság a fixpontot felfedezőjéről Reuter-fixpontnak nevezik. A Reuter-fixpont 1996-os felfedezése óta gyökeresen átalakult a RG szakirodalom. A skaláris elméletek vizsgálata háttérbe szorult, és a QCD és Standard Modell (és természetesen a kondenzált anyagok modelljeinek) vizsgálatánál is több szerepet kapott. Mondhatjuk, hogy a 21. század RG vizsgálatai a gravitációról szólnak. A Reuter-fixpont felfedezése az AB gravitációban az RG módszer reneszánszát hozta el az ezredfordulón, manapság ez a módszer legnépszerűbb kutatási területe [6]. Ezekben a munkákban egyrészt a fixpont kiterjesztését vizsgálták a görbület magasabb hatványai és az anyagi terek figyelembevételével. Olyan kutatások is nagy számban folynak, ahol az eredetileg használt RG módszer hiányosságait próbálják kiküszöbölni. Ehhez kapcsolódóan megemlítem a Lorentz szignatúrában számolt evolúciót, amelyre számos kísérlet született. Legegyszerűbb esetben az euklideszi téridőt egy Wick forgatással Lorentz szignatúrájára alakították. Emellett megjelent a kauzális halmaz kvantumgravitáció, amely a lorentzi kvantumgravitáció egy diszkrét modellje, amelyben a téridő kauzális hálózatként épül fel [7, 8]. Az Arnowitt-Deser-Misner (ADM) dekompozíció esetén pedig az időirányt külön kezelve sikerült Lorentz szignatúrával eredményeket elérni [9].

A 2. fejezetben először az evolúciós egyenleteket mutatom be, illetve azok kapcsolatát, előnyeit és hátrányait. Ezt követően a 3. fejezetben az RG módszerben kapott első eredményeimet ismertetem, ahol skaláris elméletekkel foglalkoztam. Kutatásom egyik központi eleme a spontán szimmetriasértett fázisok tulajdonságainak feltérképezése volt, annak IR fizikájának leírása. A 4. fejezetben újragondolva az IR tartomány viselkedését azt vizsgáltam, hogy lehetséges-e, hogy a szingularitás egy új, IR fixpontot rejt. Ezt alkalmaztam az AB gravitációban is. A téma annyira felkeltette az érdeklődésemet, hogy számos további eredményt értem el a területen, amelyeket az 5. fejezetben foglaltam össze. Végül az RG módszer valós idejű formalizmusában kapott eredményeimet ismertetem a 6. fejezetben. Bemutatom, hogy az RG módszer nyílt dinamikát ír le, emiatt úgy is fogalmazhatunk, hogy ebben a fejezetben a nyílt rendszerek renormálásával foglalkozom. Minden fejezet végén dőlt betűvel szedve beírtam az adott fejezetben kifejtett tézispontot.

2. fejezet

Evolúciós egyenletek

A wilsoni renormálás több mint 50 éves múltra tekint vissza. Széles körben alkalmazzák a kvantummos sokrészecske rendszerekben, a részecskefizikában, a gravitációban. Az RG módszer alkalmas skaláris, fermionikus és mértékelméletek fázisszerkeztének feltérképezésére. A wilsoni renormálás a blokkosított hatás evolúcióját írja le, a skálafüggést megadó differenciálegyenlet a WH-egyenlet. Később megjelent a szakirodalomban az effektív hatásra vonatkozó Wetterich-egyenlet, ami átvette a vezető szerepet, és tartja a népszerűségét a mai napig.

2.1. A Wegner-Houghton egyenlet

A következő átmeneti amplitúdóból indulunk ki:

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle \equiv Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar} S}. \quad (2.1)$$

A $|0, -\infty\rangle$ vákuumállapotból indulunk ki a $t = -\infty$ időpillanatban, és időben fejlődik a fizikai rendszer a $\langle 0, \infty|$ végállapotba. Az exponensben a fizikai rendszert jellemző S hatás van. A pályaintegrál kontinuum sok integrált tartalmaz. Az integrál kiértékeléséhez keresni kell egy kis paramétert, amely segítségével valamilyen közelítésben számolni tudunk. Ennek érdekében a ϕ térváltozót két részre bontjuk, $\phi \rightarrow \phi + \varphi$, ahol a ϕ a $k \in [0, k - \Delta k]$ közötti impulzussal jellemezhető, a φ -t pedig olyan impulzussal, melyekre $k \in [k - \Delta k, k]$. Az ϕ az IR tér, φ az UV tér. Utóbbira kiintegrálunk, így megkapjuk az S_k hatásból az alacsonyabb impulzushoz tartozó $S_{k-\Delta k}$ hatást. Az elvégzendő integrál alakja:

$$e^{-\frac{1}{\hbar} S_{k-\Delta k}(\phi)} \approx \int D[\varphi] e^{-\frac{1}{\hbar} S_k[\phi+\varphi_0] - \frac{1}{2\hbar} \varphi \frac{\delta^2 S_k[\phi+\varphi_0]}{\delta\varphi\delta\varphi} \varphi}, \quad (2.2)$$

ahol φ_0 egy nyeregponthi módus, melyet általában nullának veszünk. A hatást φ -ben Taylor sorfejtettük. A keresett kis paraméter a $\Delta k/k$ hányados, az egy renormálási

lépésben kiintegrált módusok száma osztva az összes módus számával, amely egy infintezimális mennyiség. Gondoskodnunk kell arról, hogy ez a mennyiség legyen a legkisebb az RG eljárás során, ellenkező esetben a WH-egyenlet nem áll fenn. Ez messze nem triviális elvárás, például maga után vonja, hogy a $k \rightarrow 0$ limesz nem érhető el. Azt kapjuk, hogy:

$$e^{-\frac{1}{\hbar}S_{k-\Delta k}(\phi)} = e^{-\frac{1}{\hbar}S_k[\phi+\varphi_0]-\frac{1}{2}\ln\det S_k''[\phi]}, \quad (2.3)$$

ahol a vessző az IR térre vonatkozó deriváltat jelöli. A determináns $k \in [k - \Delta k, k]$ impulzussal jellemzett módusokra vonatkozik. Ebből, felhasználva, hogy $\ln \det A = \text{Tr} \ln A$, az exponensekre a következő kifejezést kapjuk:

$$\dot{S}_k[\phi] = -\frac{\hbar k}{2\Delta k} \text{Tr} \ln S_k''[\phi], \quad (2.4)$$

ahol a $\dot{x} = k\partial_k x$. Az egyenlet jobb oldala formális, Δk -val osztunk, azonban a Tr képzés szintén tartalmaz egy Δk -t. A Tr egy Δk szélességű gömbhéjra vett integrál, ahol a k impulzus hossza a gömbhéj sugara:

$$\dot{S}_k[\phi] = -\frac{\hbar k}{2\Delta k} \Delta k \int_p \delta(q - k) \ln S_q''[\phi], \quad (2.5)$$

ahol q egy d -dimenziós impulzus, a S_q'' a hatás térváltozó szerinti második deriváltja, továbbá a felöltöztetett inverz propagátorral azonosítható

$$S_q'' = D_q^{-1} = q^2 + U'', \quad (2.6)$$

A Δk impulzushéjra vett integrált blokkosítási lépésnek, blokkosításnak nevezzük. Az impulzus integrál analitikusan elvégezhető, ezzel megkapjuk a potenciálra vonatkozó evolúciós egyenletet, a WH-egyenletet [10]:

$$\dot{U} = -\frac{1}{2}\hbar\alpha_d k^d \ln(k^2 + U''), \quad (2.7)$$

bevezettük a

$$\alpha_d = \frac{\Omega_d}{(2\pi)^d}, \quad \Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (2.8)$$

konstanst. A blokkosított hatásra vonatkozó funkcionális renormálási csoport egyenleteknek a wilsoni mellett [11] Polchinski [12] változatát is ismerjük. A wilsoni renormálás a hurok kifejtés szisztematikus felösszegzésekként fogható fel, ezzel a rövidtávú kölcsönhatásokat integráljuk ki, és így az alacsony energiás, hosszútávú effektív elméletet kapjuk. A Polchinski módszer a csatolásban vett perturbatív felösszegzést valósítja meg [2].

2.2. A Wetterich-egyenlet

A Wetterich-egyenlet egy funkcionális integro-differenciál egyenlet az effektív hatásra [13, 5, 14]. Elvégezzük a pályaintegrált úgy, hogy hozzáadunk egy regulátor tagot a hatáshoz. A bevezetett $\mathcal{R}_k[\phi]$ regulátor az UV és IR divergens impulzusintegrálokat végessé teszi. A generáló funkcionál alakja:

$$Z = e^{-\frac{1}{\hbar}W_k[J]} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S_\Lambda + \mathcal{R}_k[\phi] - J \cdot \phi)}. \quad (2.9)$$

Itt $J = J(x)$ a kvantumtérhez csatolt külső forrást jelöli, az S_Λ pedig a csupasz hatás. Használjuk az $f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} d^d x f(x)g(x)$ jelölést. Egy $1/k$ térfogatban átlagoljuk a térváltozót azzal, hogy kiintegráljuk a k skálánál nagyobb energiájú módusokat. A regulátor térfüggésére nincs kitétel, az általában a térváltozóban kvadratikus, tömeg alakú tag

$$\mathcal{R}_k[\phi] = \frac{1}{2}\phi \cdot \mathcal{R}_k \cdot \phi, \quad (2.10)$$

amely IR levágásként hat. A pont itt is integrált jelöl. Az IR regulátort úgy választjuk meg, hogy a k -nál nagyobb energiájú módusokat változatlanul hagyjuk, de a k -nál kisebb energiájúakat elnyomjuk. A következő feltételeknek kell teljesülniük:

1. $\lim_{p^2/k^2 \rightarrow 0} \mathcal{R}_k > 0$, azaz IR regulátorként működik, mert eltünteti az IR divergenciákat,
2. $\lim_{k^2/p^2 \rightarrow 0} \mathcal{R}_k \rightarrow 0$, amely azt fejezi ki, hogy ha a regulátort eltávolítjuk, akkor vissza kell kapnunk az átmeneti amplitúdó alakját a $k \rightarrow 0$ határesetben,
3. $\lim_{k^2 \rightarrow \infty} \mathcal{R}_k \rightarrow \infty$, amely szerint a $S = \lim_{k \rightarrow \Lambda} \Gamma_k$ határesetben visszkapjuk a mikroszkopikus hatást. A regulátor UV levágásként is működik.

A Wetterich-egyenlet levezetéséhez differenciáljuk a $t \equiv \ln k$ renormálási idő szerint a (2.9) egyenletet:

$$\dot{Z} = -\frac{1}{\hbar}\dot{W}_k[J]e^{-\frac{1}{\hbar}W_k[J]} = \int \mathcal{D}[\phi] \left(-\frac{1}{\hbar}\dot{\mathcal{R}}_k[\phi] \right) e^{-\frac{1}{\hbar}(S_\Lambda + \mathcal{R}_k[\phi] - J \cdot \phi)}. \quad (2.11)$$

Itt a $\dot{} = \partial/\partial t$ az RG idő szerinti derivált. Ebből

$$\dot{W}_k[J] = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{\hbar}W_k[J]} \int \dot{\mathcal{R}}_k \left(-\hbar \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J^2} + \frac{\delta W_k[J]}{\delta J} \frac{\delta W_k[J]}{\delta J} \right) e^{\frac{1}{\hbar}W_k[J]}. \quad (2.12)$$

A $\Gamma_k[\phi]$ effektív hatás a $W_k[J]$ összefüggő Green-függvények generáló funkcionálja, azaz

$$\Gamma_k[\phi] = W_k[J] - J \cdot \phi, \quad (2.13)$$

ahol bevezettük a klasszikus térváltozót

$$\phi = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J}. \quad (2.14)$$

Könnyen belátható, hogy $\dot{\Gamma}_k[\phi] = \dot{W}_k[J]$, ahol $\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi} = -J$. A 2. deriváltra vonatkozó azonosság pedig

$$\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} \frac{\delta^2 W_k[J]}{\delta J \delta J} = -1 \quad (2.15)$$

Visszahelyettesítve (2.12)-ba és átdefiniálva az effektív hatást $\Gamma_k[\phi] + \mathcal{R}_k[\phi] \rightarrow \Gamma_k$ szerint kapjuk a Wetterich-egyenletet:

$$\dot{\Gamma}_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\dot{\mathcal{R}}_k}{\mathcal{R}_k + \Gamma_k''} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\text{circle with a black square on top} \right), \quad (2.16)$$

A Tr jelöli a hurokintegrált, és a belső indexekre törtenő összegzést. A grafikus alakban a dupla vonal jelöli a 'felöltöztetett' propagátort, a fekete négyzet pedig a regulátornak megfelelő operátor betétrész. Az ábra egy 1-hurok diagram. Hasonló módon, a skaláris elméleteken túl (pl. fermionikus vagy mértékelméletekben) az 1-hurok diagramokból a Feynman-szabályok segítségével felépíthető az evolúciós egyenlet. Feltesszük, hogy a blokkosított hatás és az effektív hatás funkcionális alakja megegyezik:

$$\begin{aligned} \Gamma_k &\sim S_k \\ &= \sum_i g_i \mathcal{F}_i(\phi), \end{aligned} \quad (2.17)$$

ezért a nagy energiákon ismertnek tekintett blokkosított hatás alakot használhatjuk a Wetterich-egyenletben. Maga az egyenlet egy parciális integro-differenciálegyenlet, de ha a (2.17) szerint a ϕ térváltozóban sorba fejtjük a hatást, akkor a skálafüggő g_i csatolásokra egy közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk, ugyanúgy, mint a WH-egyenletben. Általában Taylor sorfejtést használunk, de a periodikus modelleknél Fourier sorfejtést alkalmazunk.

Az effektív hatás skaláris elméletekben általában

$$\Gamma_k = \int d^d x \left[\frac{1}{2} Z_k(\phi_x) (\partial_\mu \phi_x)^2 + V_k(\phi_x) \right] \quad (2.18)$$

alakú, ahol $Z_k \equiv Z_k(\phi_x) = Z_k(\phi, p)$ a hullámfüggvény renormálás. Ez a lokális potenciál közelítés (local potential approximation, LPA) utáni következő rend a gradiens kifejtésben. Ha $Z_k = 1$, akkor LPA-ban dolgozunk. A gradiens kifejtés további tagjai lehetnek:

$$\Gamma_k = \int d^d x \left[V_k(\phi_x) + \frac{1}{2} Z_k(\phi_x) (\partial_\mu \phi_x)^2 + H_1(\phi_x) (\partial_\mu \phi_x)^4 + H_2(\phi_x) (\square \phi_x)^2 + \dots \right]. \quad (2.19)$$

Ha a 2.18 effektív hatást betesszük a (2.16) Wetterich-egyenletbe, akkor a következőt kapjuk:

$$\dot{V}_k = \frac{1}{2} \int_p \frac{\dot{\mathcal{R}}_k}{Z_k p^2 + \mathcal{R}_k + \tilde{V}_k''}, \quad (2.20)$$

ahol megjelenik egy d-dimenziós impulzusintegrál. Feltéve, hogy a hullámfüggvény renormálás impulzusfüggetlen, azaz $Z_k(\phi, p) = Z_k(\phi) \equiv Z_k$, akkor a rá vonatkozó evolúciós egyenlet alakja:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_k = & \frac{1}{2} \int_p \dot{\mathcal{R}}_k \left[-\frac{Z_k''}{[p^2 Z_k + \mathcal{R}_k + V_k''']^2} + \frac{\frac{2}{d} Z_k'^2 p^2 + 4 Z_k' (Z_k' p^2 + V_k''')}{(p^2 Z_k + \mathcal{R}_k + V_k''')^3} \right. \\ & + \frac{\frac{8}{d} p^2 (Z_k' p^2 + V_k''')^2 + (Z_k + \partial_{p^2} \mathcal{R}_k)^2}{(p^2 Z_k + \mathcal{R}_k + V_k''')^5} \\ & - 2 \frac{(Z_k' p^2 + V_k''')^2 (Z_k + \partial_{p^2} \mathcal{R}_k + \frac{2}{d} p^2 \partial_{p^2}^2 \mathcal{R}_k)}{(p^2 Z_k + \mathcal{R}_k + V_k''')^4} \\ & \left. - \frac{\frac{2}{d} Z_k' p^2 (Z_k' p^2 + V_k''') (Z_k + \partial_{p^2} \mathcal{R}_k)}{(p^2 Z_k + \mathcal{R}_k + V_k''')^4} \right]. \quad (2.21) \end{aligned}$$

2.3. Az evolúciós egyenletek összehasonlítása

Nagyon fontos különbséget tennünk a WH és a Wetterich-egyenletek által szolgáltatott evolúció között. A kutatásaim során, amennyiben lehetett, a WH-egyenletet használtam, mert azt gondolom, hogy ez feleltethető meg jobban a renormálás eredeti filozófiájának, továbbá fizikailag könnyebben interpretálható, mert a blokkosított hatást ismerjük.

A Wetterich-egyenletnél az evolúciós egyenletet úgy kapjuk meg, hogy a regulátorfüggő tagot a renormálási skála szerint deriváljuk. Csak a regulátor skálafüggő, a hatás a levágásnál adott, a regulátor nélkül az egyenlet trivialis lenne. A WH-egyenletben maga a wilsoni hatás skálafüggő, nincs szükség a regulátorra.

A Wetterich-egyenlet az effektív hatás szerepel, amelyben a térváltozó az eredeti tér várható értéke. A generáló funkcionálban elvégezzük az impulzusintegrált UV-tól IR-ig úgy, hogy abban a regulátor egy adott k -val szerepel. Ezek után a k skálát csökkentjük, ezáltal különböző k -hoz tartozó effektív hatásokat kapunk eredményül. Szigorúan véve, a Wetterich-egyenlet nem RG egyenlet, mert nem egy elmélet evolúcióját kapjuk meg a skála függvényében, hanem elméletek láncolatát, amelyek a csökkenő k skálára vannak felfűzve. Ezzel szemben a WH-egyenlet az S_k blokkosított hatás evolúcióját követi UV-ből IR felé. A wilsoni RG formalizmusban az elemi gerjesztéseket, a hatás által leírt dinamikával vesszük figyelembe. Azonban a Wetterich-egyenletnél a regulátor módosítja a hatást, ami megváltoztatja a módusok diszperziós relációját, emiatt azok nem a hatásban szereplő dinamikával

szerepelnek az egyenletben. A Wetterich-egyenletben az elemi gerjesztések helyett új, kvázirészecske gerjesztéseket vezetünk be egy olyan új elméletben, amit az eredeti hatás és a regulátor együtt definiál.

A Wetterich-egyenlet eredményei regulátorfüggők. Ugyan a szakirodalomban gyakran szerepel, hogy a Wetterich-egyenlet egzakt megoldása nem függ a regulátortól, de erre vonatkozóan nincs matematikai bizonyíték, és meglehetősen furcsa feltételeznünk, hogy a Wetterich-egyenlet, amelyben szerepel a regulátor, attól független eredményt ad. Az IR-ben kapott effektív potenciál regulátorfüggetlensége sem garantálható, ráadásul a renormálásnál nemcsak az IR fizika, hanem a futás maga is rendelkezik fizikai tartalommal. Gondoljunk csak az SG modellre, ahol a mindkét fázisban triviális az effektív potenciál, a futás segít azokat megkülönböztetni. A Wetterich-egyenlet eredményeinek regulátorfüggését vizsgálni kell.

A WH-egyenlet hátrányának azt szokták említeni, hogy csak LPA-ban használható, a gradiens kifejtés magasabb rendjét nem képes kezelni. Ennek okát az éles levágásban látják. Ha alaposan megvizsgáljuk ezt az állítást, akkor észrevehetjük, hogy az éles levágás nem befolyásolja a gradiens kifejtést. Példaképpen említem, hogy ha a blokkosítást nem gömbhéjjal, hanem kockákkal képzelem el, akkor a hullámfüggvény renormálás számolható. Miért fontos számolnunk az LPA-n túl? A bevezetésben mutatott Landau-Ginsburg elmélet alapján látszik, hogy a hullámfüggvény renormálás nulla közeli impulzusnál, végtelen közeli korrelációknál számít. Azonban a WH-egyenlet k skálája, ami a blokkosításnál a legnagyobb impulzus, a lehető legmesszebb van a zérustól. Ez egy komoly probléma a gradiens kifejtés használatánál. Azért kaphatunk mindezek ellenére nem-triviális eredményt, mert a k skálán kapott effektusok az impulzusban vett éles, Dirac-delta szerint megadott levágás a koordinátatérben (a Fourier transzformáltban) minden méretskálán érezteti a hatását. A gradiens kifejtés problémáját úgy lehet orvosolni, hogyha nem-lokális kölcsönhatásokat vezetünk be [15]. A nem-lokalitás a gradiens kifejtés általánosításaként tekinthető, amelyből a kifejtés eredményei származtathatóak [16].

3. fejezet

Skaláris modellek effektív potenciálja

A skaláris elméletek fázisszerkezete jól ismert. Wilson úttörő munkája óta ismert, hogy a ϕ^4 modellnek 4-nél alacsonyabb dimenzióban a gaussi fixpont (GFP) mellett egy további nem-triviális fixpontja is van, a WF fixpont [17, 18]. Az RG módszerrel történő vizsgálat ugyanezt a fázisszerkezetet adja. Hasonlóan, a 2d SG modell analízisét Coleman kimerítően elvégezte [19]. Megmutatta, hogy a modellnek két fázisa van, és van egy kritikus hullámszám érték, amely szeparálja azokat, ez a Coleman-pont. Az RG módszer ennél a modellenél is ugyanezt az eredményt mutatta.

Joggal vethető fel a kérdés: miért vizsgáljuk azóta is ezeket a modelleket? Az egyik lehetséges ok a modellek kiterjesztése. A potenciál Taylor sorfejtésének további tagjait, a gradiens kifejtés magasabb rendjeit vizsgáljunk kell, hasonlóan ahhoz, ahogy a Landau elméletből a Landau-Ginsburg elméletre továbbléptünk. Mindezek ellenére az a tapasztalat, hogy kvalitatív változást nem látunk a fázisszerkezetben. A másik ok lehet, hogy a skaláris modellek egyszerűségük miatt alkalmasak arra, hogy új ötleteket, fejlesztéseket kipróbáljunk rajtuk. A 3d ϕ^4 modell RG vizsgálatát szokás minden új vizsgálatnál először elvégezni, és ellenőrizni, hogy mi a helyzet a WF fixponttal és a hozzá tartozó exponensekkel, azok összhangban vannak-e a korábbi eredményekkel. A kutatásaimban én is ezt az utat követtem, ezeknek a modelleknek újszerű kiterjesztését kerestem és vizsgáltam. Az IR tartományra koncentráltam.

3.1. A sine-Gordon modell

Először a 2d SG modellel foglalkoztam. A hatás alakja

$$S = \int_x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_x)^2 + u \cos(\beta \phi) \right], \quad (3.1)$$

ahol u a csatolás, a β pedig a hullámszám, amely LPA-ban nem fejlődik.

A 2d SG modell az euklideszi téridőben az egyik legfontosabb alacsony dimenziós skalárelméleti modell, hiszen a modern fizika szinte minden területén széles körben használják [19, 20, 21, 22, 23, 24]. Továbbá a modell nagyban hasonlít a nem-ábéli mértékelméletekre, ami lehetőséget adhat a bezárási mechanizmust egyszerűbb keretek között is megérteni [21, 22, 23]. Az SG modell másik érdekes tulajdonsága, hogy egy Kosterlitz-Thouless (KT) típusú, végtelen rendű fázisátmenetet mutat [25, 26]. Érdekes módon az RG módszer jelentős különbséget mutat, ha összehasonlítjuk az LPA-val és a gradiens kifejtés legalacsonyabb rendjével (a konstans hullámfüggvény renormálás figyelembevételével) kapott eredményeket. LPA-ban az SG modellnek két fázisa van, amelyeket a $\beta^2 = 8\pi$ hullámszám paraméter választ el, ez a Coleman-pont [19]. A fázistérben egyenes függőleges vonalakat találunk. Ha $\beta^2 > 8\pi$, akkor a szimmetrikus (más néven ionizált, tömeg nélküli, erős csatolású, nem-renormálható) fázisban vagyunk, ha $\beta^2 < 8\pi$, akkor pedig a szimmetriasértett (molekuláris, tömeges, gyenge csatolású, renormálható) fázisban. Ha $\beta^2 = 4\pi$, akkor az SG modell a Thirring modell bozonizált változata [19, 27, 28, 29, 30]. Az SG modell ugyanabban az univerzalitási osztályban van, mint a semleges Coulomb gáz [31] vagy a 2d XY modell. Ha a hullámfüggvény renormálás fejlődik, akkor az egyenes vonalakat hiperbolák váltják fel a fázistérben. Továbbá a korrelációs hossz ξ skálázása a KT fázisátalakulás szerint alakul, amit az LPA-ban nem kaphatunk meg.

Az SG modell alapvető sajátysága, hogy a belső térben egy diszkrét eltolási szimmetriával rendelkezik:

$$\phi_x \rightarrow \phi_x + \Delta, \quad (3.2)$$

ahol $\Delta = 2\pi/\beta$. Ez a szimmetria sérül le a molekuláris fázisban. Mivel az effektív potenciál konvex, ezért az csak konstans (nulla) lehet. Ez a tény joggal veti fel azt a kérdést, hogy akkor hogyan tudjuk megkülönböztetni a fázisokat?

A WH-egyenlet keretében vizsgáltam az SG modell olyan kiterjesztését, ahol a Fourier sorfejtés magasabb rendű tagjait is figyelembe vettem a

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos(n\beta\phi) \quad (3.3)$$

potenciálban [22]. A szimmetrikus fázisban az u_n csatolások az UV-ben divergálnak, az IR-ben nullába tartanak. A szimmetriasértett fázisban egy kritikus skálánál a propagátor szingulárisává válik, megjelenik a spinodális instabilitás. A spinodális görbét termodinamikában a Gibbs-féle szabadenergia második deriváltjának zérus értéke definiálja. Ezek a pontok a stabilitás határát jelölik ki. A propagátor inverze, mint energia az euklideszi téridőben, a tér szerinti második deriváltként áll elő. A propagátor szinguláris viselkedése spinodális instabilitást jelöl, mert a propagátor kicsiny értéke azt mutatja, hogy az annak megfelelő elemi gerjesztések jelentős fluktuációkat okoznak a rendszerben, instabillá téve azt. A spinodális instabilitásnak

fizikai tartalmat tulajdonítunk, annak közelében az eredeti térváltozókkal leírt elmélet már nem kezelhető, mert a fluktuációk kezelhetetlenül nagyok, ezért érdemes új térváltozót bevezetni. A spinodális instabilitás megmutatja, hogy egy adott elmélet mekkora energiaskáláig tárgyalható az RG módszerrel.

A szimmetriasértett fázisban véges $k_c = k_{SI}$ skálán leáll az evolúció, ott ahol a propagátor szingulárisává válik, ezért nincs lehetőségünk az IR tartomány feltérképezésére. Az instabilitás miatt az instabil módusok dominálják a k_{SI} skálán az evolúciót, amelyeket úgy képzelünk el, makroszkopikus kondenzátummá állnak össze [32]. Emiatt érdemes inkább a kondenzátum evolúcióját követni a tradicionális WH-egyenlet által leírt hurokfejlődés helyett. A kondenzátumot egy helyfüggő síkhullámnak vesszük fel: $\phi'_x = \rho_k \cos(kn_k \cdot x + \theta_k)$, ahol a ρ_k amplitúdóban minden blokkosítási lépésben minimumot keresünk [2, 21]:

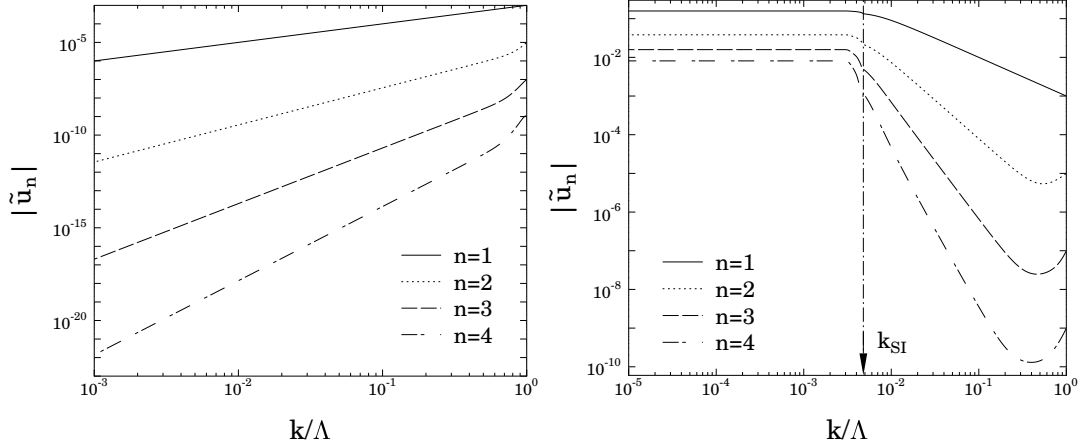
$$\tilde{U}_{k-\Delta k}(\phi) = \min_{\rho} \left[\rho^2 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \tilde{U}_k(\phi + 2\rho \cos(\pi u)) \right], \quad (3.4)$$

Ezzel sikerül stabilizálni az evolúciót. Az instabilitás onnan ered, hogy a

$$k^2 + U'' = 0 \quad (3.5)$$

egyenlet, ami a WH-egyenlet logaritmusának argumentumából ered, nullává, majd negatívvá válhat, tehát $U'' < 0$, ami arra utal, hogy egy helyi maximum körül fejtjük ki a potenciált. A 3.5 egyenlet lényegében a korábban emlegetett propagátor inverze, ha az nullához tart, akkor a propagátor a végtelenhez. A ϕ^4 modellben megtehetjük azt, hogy mindig a potenciál abszolút minimumát vesszük, és akkor sohasem futunk bele a spinodális instabilitásba. Azonban ez a periodikus modellek esetén nem lehetséges, mert egyrészt a periodicitás miatt végtelen sok minimum van, másrészt a Fourier sorfejtés nem egyetlen pontot, például a lokális minimumot jellemzi, hanem a periodikus jelleget. Az SG modellhez hasonlóan szintén szingulárisává válhat az AB gravitáció, ott szintén spinodális instabilitásba futhatunk. Maga a név nem honosodott meg a szakirodalomban, ezért a későbbiekben a 3.5 kifejezés zérussá válásának lehetőségét szingularitásnak hívom. Megjegyzem, hogy a spinodális instabilitás elnevezés sokkal szemléletesebb, és bár inkább a kémiában, esetleg az anyagtudományban elterjedt fogalom, sokkal világosabb képet ad a szinguláris viselkedés kialakulásának fizikai okáról és tulajdonságairól.

A csatolások futását a 3.1 ábrán mutatom be. Meghatároztam az IR skálázást a további Fourier módusok figyelembevételével. A szimmetrikus fázisban az \tilde{u}_n dimenziótlán Fourier módusok nullához tartanak, az IR skálázás $\tilde{u}_n \sim k^{n(\beta^2 - 4\pi)}$ szerinti, amely eltér az UV skálázástól. Az IR effektív potenciál egyetlen számmal, az \tilde{u}_1 kezdeti értékével parametrizálható. Az IR-ben egy fixpont van. A szimmetrikus fázisban minden β -ra látjuk a fixpontot, ez egy fixpontokból álló vonalat alkot, ami a szimmetriasértett fázisban is megtalálható, de ott UV taszító, lényegében a GFP-nak felel meg.



3.1. ábra. A dimenziótlan csatolások IR skálázása a $\beta^2 = 12\pi$ paraméternél (bal), és $\beta^2 = 4\pi$ -nél (jobb).

A szimmetriasértett fázisbeli Fourier módusok egy k_{SI} skáláig követhetők a hagyományos WH-egyenlettel, k_{SI} alatt pedig a kondenzátum fa-szintű evolúciójából következtethetünk a további evolúcióra. A dimenziótlan csatolások konstansba futnak, a konstansok pedig olyan értékeket vesznek fel, hogy az IR-ben az U Fourier sorfejtett potenciál egy perióduson belül a $U = -k^2\phi^2/2$ fordított parabola alakot öltse, ami a 3.5 egyenlet megoldása [22]. Megállapítottam, hogy ugyan az effektív potenciál mindkét fázisban nulla, azonban a $k \rightarrow 0$ határesetben kapott skálázások alapján különbséget tudok tenni a fázisok között.

A WH-egyenletből a fa-szintű egyenletekbe történő váltás véges Δk -nál valósítható meg. Részletesebb numerikus analízist végeztem a WH-egyenlet érvényességi határánál, a k_{SI} kritikus skála értékénél, a Δk finomításával. Minél közelebb vagyok a kritikus skála értékhez, annál kisebb Δk -t kell vennem. A blokkosítási lépést úgy kell megválasztanom, hogy az legyen a legkisebb paraméter az elméletben, emellett minden más paraméter változása kicsiny legyen. A csatolások nagyon gyorsan kezdenek változni a lágy módusok miatt, ezért a megbízható numerikus számolás megköveteli a Δk gyors nullához tartását. Felvetődik a kérdés, hogy egyáltalán elérhetjük-e a k_{SI} skálát? Amennyiben nem, akkor az instabilitáson túli fizika rejtve marad a számunkra. Hasonló jelenséget írtak le a kozmikus cenzúra kapcsán a relativitáselméletben: a szinguláris eseményeket az eseményhorizont elrejt előlünk. Az analógia miatt az eredményt kvantum cenzúrának neveztem el. A kvantum szó arra utal, hogy a WH-egyenlet a hurok (kvantum) effektusokat veszi szisztematikusan figyelembe, míg a fa-szintű evolúció értelemszerűen a fa-szintű effektusok evolúcióját követi, amely közelebb áll a (kvázi-) klasszikus effektusokhoz. A kvantum cenzúra szerint a kvantumeffektusok elrejtik előlünk az alacsony energián megjelenő klasszikusnak megfelelő effektusokat [33].

Az LPA számolás a szimmetriasértett fázisban homogén fázisszerkezetet mutat, semmilyen szempontból nincs kitüntetve a $\beta^2 = 4\pi$ érték. Ez komoly hiányossága ennek vizsgálatnak. Mivel a 2d SG modell, a Thirring modell bozonizált változata ennél a hullámszámnál, ezért azt gondoljuk, hogy a $\beta^2 = 4\pi$ szintén kritikus érték, amit meg is erősítenek más RG számolások [34]. Nemcsak a Thirring modell, de a többszínű 2d kvantum-szindinamika (QCD_2) bozonizált alakja is a 2d SG modellel, illetve annak réteges változatával ekvivalens. A rétegszámtól függően más-más β_c^2 -nél kapunk ekvivalenciát, azonban mindig igaz, hogy $\beta_c^2 < 8\pi$, azaz a szimmetriasértett fázisban vagyunk. Az SG modell ebben az esetben csak egyetlen módot tartalmaz, ennek ellenére az IR viselkedés nem változik: egy adott k_{SI} -nél megjelenik a spinodális instabilitás. A többszínű QCD_2 -nek egyetlen fázisa van [35].

Meghatároztam az SG modell IR viselkedését mindkét fázisban. Követve a felharmonikusok evolúcióját is, megmutattam, hogy az ionizált (szimmetrikus) fázisban az effektív potenciál triviális, és a felharmonikusokhoz tartozó csatolások egyetlen releváns paraméterrel jellemezhetők. A felharmonikusok figyelembevételével megkaptam a fordított parabola alakú effektív potenciált a molekuláris (szimmetriasértett) fázisban [22]. Megoldottam a WH-egyenletet a periodikus potenciál Fourier sorfejtése nélkül és azt kaptam, hogy a szimmetriasértett fázisban véges k skálán az evolúció leáll, mert a térváltozó már nem megfelelő változó a probléma leírására. Ezt kvantumcenzúrának neveztem el [23]. Rámutattam, hogy az SG modell szimmetriasértett fázisa egy speciális hullámszámnál a 2-dimenziós többszínű kvantum-szindinamikával ekvivalens, és az utóbbi modell emiatt egyetlen fázissal rendelkezik [35].

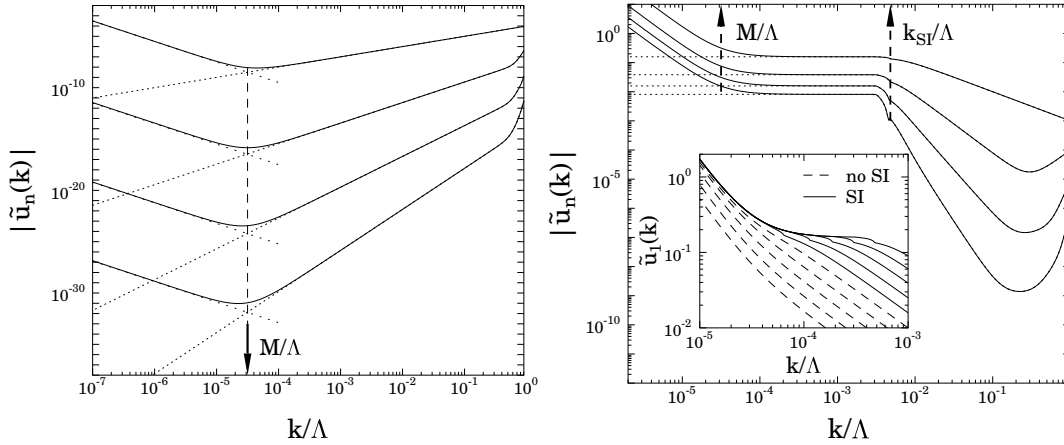
3.2. A tömeges sine-Gordon modell

Az előző pontban az IR skálázás alapján különböztettem meg az SG modell két fázisát. Felvetődik a kérdés, mi történik akkor, ha az SG modellt kiegészítjük egy tömegtaggal? Ez a tömeges sine-Gordon (massive sine-Gordon, MSG) modellre vezet. A tömegtag minden esetben releváns módon skálázik az IR-ben, továbbá általában igaz, hogy a tömegskála alatt "befagy" az evolúció, azaz minden dimenziós csatolás konstanssá válik. Tudjuk, hogy az MSG modell a 2d kvantum-elektrodinamika (QED_2) bozonizált modellje, a QED_2 modellnek pedig két fázisa van. Az SG modellben használt eljárás most nem működik, mert az IR skálázás az explicit tömegtag miatt mindkét fázisban ugyanaz. Akkor hogyan tudjuk megkülönböztetni a fázisokat?

Kezdetben a fermionikus QED_2 modellt vizsgáltam véges külső homogén barionsűrűség esetén. Megkerestem a modell alapállapotát és azt kaptam, hogy az minden töltéssűrűsége periodikus szerkezetű [36]. Ez azt jelenti, hogy az RG módszerben használt LPA közelítés, amely a nulla tér körüli fluktuációkat veszi figyelembe, nem

megbízható. A fa-szintű analízist folytatva a QED_2 két ízt tartalmazó változatát vizsgáltam véges külső barionsűrűség esetén. Alacsony barionszámnál olyan lineáris alapállapot jön létre, amely teljesen leárnyékolja a külső barionsűrűség által indukált teret. Növelve a barionsűrűséget egy kritikus érték fölé, azt kapom, hogy a teljes leárnyékolás megszűnik, részlegessé válik, és újból periodikussá válik az alapállapot [37]. A fa-szintű renormálás alkalmazható a modellre, mert az alkalmas arra, hogy a nem-triviális IR tereket figyelembe vegye. Az RG futás eredményei megerősítették a két fázis létét, továbbá azt mutatták, hogy a QED_2 modell tömegparamétere nullához tart IR-ben, azaz a modell alacsony energián tömegtelenné válik.

Funkcionális RG módszerrel konstans IR tér esetén végeztem el a blokkosítást az MSG modellre. Amíg nem érem el a tömeg skáláját, addig a modell ugyanúgy viselkedik, mint az SG modell. A tömegskála után a skálázás triviális, minden dimenziós csatolás konstans. A szimmetriasértett fázisban spinodális instabilitás mindig megjelenik, ha $M < k_{SI}$, ahol az M az MSG modell tömeg paramétere. A két futást a 3.2 ábrán mutatom be. Fizikailag nem releváns a $M > k_{SI}$ eset, ekkor



3.2. ábra. A $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_4$ csatolások futását ábrázoltam, ahol $\beta^2 = 12\pi$ és $M^2 = 10^{-9}\Lambda^2$ (folytonos vonal) vagy $M^2 = 0$ (sűrű pontozott vonal). Az ábrán feltüntettem a $\sim k^{-2}$ -nek megfelelő aszimptotikus IR skálázást is (ritka pontozott vonal). A tömeges és tömegtelen skálázások az M skálánál válnak szét, ezt függőleges szaggatott vonallal jelöltem. Ezek a pontozott vonalak metszetébe esnek.

azonban elkerülhető az instabilitás [38].

Mivel az effektív potenciál mindkét fázisban hasonlóan viselkedik, ezért az SG modellnél használt módszer, miszerint az IR skálázás alapján különböztessük meg a fázisokat, nem működik. A fázisokat az érzékenységi mátrix segítségével sikerült azonosítanom. Az érzékenységi mátrix definíciója:

$$S_{n,m} = \frac{\partial \tilde{u}_n(k)}{\partial \tilde{u}_m(\Lambda)}, \quad (3.6)$$

ahol a futó csatolások kezdeti csatolásokra való érzékenységét tudom vizsgálni. A mátrix fázisátalakulást jelez, ha a kezdeti csatolásokban vett infinitezimális különbség szinguláris eltérést mutat az IR értékekben. Ez azt fejezi ki, hogy a kezdeti értékek finom változtatása ugrásszerű változást okoz az alacsony energiás rendszeren a makroszkopikus méreteken. Például a kritikus hőmérséklet alatt és felett infinitezimálisan kicsiny távolságra vett hőmérsékletek tartozhatnak a víz és a vízgőz fázishoz, amelyek szemmel láthatóan különböznek.

Az RG módszerben egyetlen blokkosítási lépést mindig úgy kell elvégezni, hogy a csatolások változása is kicsi maradjon. Véges sok blokkosítás szintén véges eredményt ad. Ahhoz, hogy szinguláris eltérést találjunk, az szükséges, hogy az UV skálát a végtelenbe, az IR skálát közel nullába kell kitolnunk, ezzel elérhető az, hogy végtelen sok blokkosítási lépést hajtsunk végre, ami lehetővé teszi az UV-ban szomszédos trajektóriák közötti ugrásszerű IR-beli eltérést. Ha $\beta^2 > 8\pi$, akkor az effektív potenciál a $\tilde{u}_1(\Lambda)$ kezdeti csatolási értéktől függ, azaz a $S_{1,1}$ mátrixelem véges, a többi nulla. A Fourier sorfejtés felharmonikusai nem játszanak szerepet, ezért is hagyjuk el a későbbiekben azokat. Ha pedig $\beta^2 < 8\pi$, akkor az effektív potenciál szuperuniverzális, azaz nem függ egyetlen csatolástól sem, tehát $S_{1,1} = 0$. Az érzékenységi mátrix segítségével tehát azt látom, hogy az $S_{1,1}$ mátrixelem szignifikánsan különbözik a két fázisban, azaz sikerült az MSG modell két fázisát az IR-ben megkülönböztetnem.

A globális renormálás szempontjából az MSG modell egy nagyon érdekes aspektusra mutat rá. A 3.2 jobb ábrán a csatolások az UV-ben irreleváns módon skáláznak, csökkennek, aztán egy átmeneti tartományban stabilak, majd az IR-ben releváns módon felnőnek. A modell konkrét példát ad arra, hogy a skálázási tulajdonságok tartományokhoz (vagy fixpontokhoz) kötöttek, ezért ha több fixpont van, akkor mindig figyelniük kell a skálázás esetleges változására, ezt tanítja nekünk a globális renormálás képe is. Az UV viselkedés alapján az MSG modellt nem tudjuk megkülönböztetni az SG modelltől, ezért ugyanabba az univerzalitási osztályba esnek. Azonban az irreleváns UV skálázás az IR relevánssá válik, az univerzalitás sérül. Ha úgy indítunk el két evolúciót, hogy az UV irreleváns csatolások közötti különbség nagy, az az MSG modell tranziens skálatartományában infinitezimálissá válik, ezért mondjuk, hogy az irreleváns csatolások nem befolyásolják, hogy az elmélet melyik univerzalitási osztályban van. Azonban a tömegskála alatt a relevánssá vált csatolás kezdeti értékre való érzékenysége újra megjelenik. Ezt a mechanizmust RG mikroszkópnak hívjuk, mert a kis távolságokon (UV-n) vett különbségeket, amelyeket szabad szemmel nem látunk (azaz a tranziens skálán nem érzékelünk), fel tudjuk nagyítani az IR-ben [39, 2].

Az MSG modell két fázisa miatt a QED_2 modellnek is két fázisa van. Fa-szinten egyetlen fázist találtam, még véges bariontöltés esetén is. Az elektrontömeg a bozonizáció alapján arányos az u_1 alapmódussal, a töltés pedig az MSG modell tömegével, ami nem fejlődik. Rácsszámolások alapján ha $e \gg m$, akkor a modellnek

triviális az alapállapota, azonban ha $e \ll m$, akkor megjelenik egy nem-triviális alapállapot. A rácson a két fázist elválasztó kritikus érték $m/e = 1/3$. Az MSG modell RG futása alapján $m/e = e^{-\gamma}/\sqrt{\pi} \approx 0.317$ (γ az Euler-konstans), ami kiváló egyezést mutat. Az MSG és QED_2 modellek inkább játékmódnak tekinthetők, azonban mégis nagyon sok olyan aspektusára világítottak rá az RG módszerek, amelyek később hasznosnak bizonyultak. Mindemellet nagyon jó tesztmodellül szolgálnak a fázisok megtalálásában, és alkalmasak a regulátorok optimalizációjának tesztelésére is [40, 41].

Meghatároztam az MSG modell alacsony energiás viselkedését. A modell a QED_2 bozonizált változata $\beta^2 = 4\pi$ esetén. Megmutattam, hogy egy külső homogén bariontér periodikus töltéssűrűséget indukál [36], valamint hogy a két ízt tartalmazó modellnek két fázisa van a külső bariontöltés nagyságától függően: a gyenge külső teret teljesen leárnyékolja az indukált töltés, míg erős külső tér esetén a leárnyékolás részleges [37]. Az MSG modell IR viselkedése alapján arra következtettem, hogy a modellnek két fázisa van, és a szimmetriasértett fázis elkerülhetetlenül szinguláris viselkedést mutat [42]. Megmutattam, hogy a QED_2 modellnek két fázisa van, ahol a fázishatár $m/e = 0.31$ -nek adódott, ahol m az elektron tömege, e a töltése [38]. Az eredmény pontos egyezést mutat rácsszimulációkkal.

3.3. A ϕ^4 modell

A ϕ^4 modell nagyon népszerű a renormálás körében. A modell 3-dimenziós változatában van egy WF fixpont, amely perturbatív módon nem tárgyalható, mert annak távolsága az origótól véges, és a fixponti csatolások sem kicsik. Többnyire a WF fixpont korrelációs hosszának ν kritikus exponensét számolják [43]. Ennek leggyakoribb módja az, hogy megkeressük a csatolások terében a fixpontot, majd a fixpont körül linearizáljuk a béta függvényeket. A fixpont közelében a csatolások evolúciója analitikusan leolvasható a linearizált egyenletekből, ezek $g \sim k^\alpha$ alakúak. Az α paramétereket skálázó exponenseknek nevezem. A WF fixpontonál minden exponens pozitív, kivéve egyet, ennek reciprokával azonosítjuk a ν kritikus exponenst.

Kutatásaimban az IR viselkedésre koncentráltam. Az SG modellben megmutattam, hogy a szimmetriasértett fázisban a propagátor szingulárisává válik, spinodális instabilitásba futnak a trajektóriák. Ugyan a ϕ^4 modellben, ha a potenciál minimumában fejtünk ki, akkor az U'' mindig pozitív, tehát nem lehet szinguláris a propagátor. Ennek ellenére érdemes a hagyományos módon tárgyalt ϕ^4 modellt analizálni, mert vannak a szakirodalomban olyan modellek, ahol nincs lehetőség a minimumban kifejteni a potenciált.

A 3d ϕ^4 modell részletes numerikus analízisét végeztem el, ahol a WH-egyenletet, mint hiperbolikus differenciálegyenletet oldottam meg. A potenciált emiatt extrém

magas fokszámú függvénnyel közelítettem. Az eredmények azt mutatják, hogy a modellnek két fázisa van. A szimmetrikus fázisban az IR skálázás a szokásos, a tömegskála alatt konstansok a csatolások. A szimmetriasértett fázisban ismét megjelenik a szingularitás egy véges k_c skálán. Ennek közelében olyan mértékben le kell csökkenteni Δk értékét, hogy az evolúció lényegében befagy, megint megjelenik a kvantum cenzúra, azaz a hurokeffektusok megakadályozzák a kondenzátum megjelenését [33]. A számolás keretében ellenőriztem a WF fixpont tulajdonságait, azok összhangban vannak a szakirodalomban kapottakkal.

A ϕ^4 modell 1-dimenzióban a kvantált anharmonikus oszcillátornak felel meg, ami alapjában véve egy játékmódel, azonban számos realiztikus modell alapja. Többek között használható a modell nano-eszközök kvantum viselkedésének megértéséhez [44]. Szintén alkalmas a modell szilárdtestfizikai folyamatok leírására is, emellett az 1d oszcillátorok összekötve ultravékony ferroelektromos filmek modellezésére szolgál. Ezt inhomogén külső térbe helyezve a molekuláris elektronika számára hasznos eszközt kapunk [45]. Egy másik terület, ahol az anharmonikus oszcillátor modellje használatos a kaotikusan viselkedő rendszerek vizsgálata [46, 47, 48, 49], ennek egyik konkrét példája a kvantált Duffing-oszcillátor problémája [50, 51, 52].

Az 1d ϕ^4 modell is széles körben vizsgált. Hamar kiderült, hogy a Rayleigh-Schrödinger perturbációs számítás a kvantált anharmonikus oszcillátornál divergáló alapállapot energiát ad [53, 54, 55, 56, 57]. Azóta sok munka született a sajátértékek és a sajátvektorok meghatározására. Különböző módszerekkel próbálkoztak, ezek közül megemlítem az erős csatolású kiterjesztést [58], az operátor differenciálegyenletek integrálásának módszerét [59, 60], a több skálájú perturbációs számítást [61, 62, 63], a variációs módszert [64, 65, 66], az iteratív Bogoliubov-transzformációt [67], a sajátérték-momentum módszert [68], a továbbfejlesztett Hill-determináns módszert [69, 70], az optimalizált perturbációs kifejtést [71], egy a Bloch-egyenleten alapuló módszert [72], a hurokkifejtéssel kiegészített segédtér módszert [73], valamint a kvantumszámítási módszert [74]. A nem-perturbatív számítások egy része különböző RG-módszereken alapul [75, 76, 77, 78, 79, 80], beleértve a funkcionális RG módszereket is [81, 82, 83, 84], amelyek a kvantummechanikai problémát úgy kezelik, mint egy $0 + 1$ dimenziós kvantumtérelméletet.

Az 1d ϕ^4 modellnek a vizsgálatok szerint továbbra is két fázisa van, a szimmetrikus fázis és a szimmetriasértett fázis (ahol a szokásos Z_2 , azaz $\phi \rightarrow -\phi$ szimmetria sérül), amelyben van spinodális instabilitás. Jellemzően az alapállapot és az első energiaszint közötti ΔE energiakülönbséget számolják mindkét fázisban, amit a renormált tömeggel azonosíthatunk [85]. Az alacsony dimenziós modelleknél a hullámfüggvény renormálás nem hanyagolható el, sőt annak a térfüggésére is szükség van, ezért célszerű a Wetterich-egyenletet használni. A csupasz hatásnak

egy hagyományos negyedrendű hatást választottam valós időben:

$$S_B[\phi] = \int_t \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\omega_0^2 - i\mu^2) \phi^2 - \frac{g_B}{24} (\phi^2)^2 \right). \quad (3.7)$$

A vizsgálatomban először a Wetterich-egyenlet olyan formáját használtam, ahol a μ^2 tömegtag reprezentálja a regulátort (Callan-Symanzik, CS séma), A számolásban bevezetem a Z hullámfüggvény renormálást is, ennek kezdeti értéke 1. A negyedrendű potenciál generál magasabb rendű vertexet, az L index jelöli a potenciál Taylor sorfejtésének rendjét. A Z -nél szintén sorfejtést használok, annak a rendje M . Az $\omega_0^2 = 1$ eset a szimmetrikus fázisból indított trajektóriáknak felel meg, a $\omega_0^2 = -1$ eset pedig a szimmetriasértett fázisból indítottak. A kezdeti g_B csatolást nagynak és kicsinek is választottam. A 3.1 táblázatban foglaltam össze az eredményeimet. A szakirodalomban megtaláljuk a ΔE egzakt(nak tekinthető)

g_B	egzakt	LPA(2)	Z(2,1)	LPA(10)	LPA [85]	LPA _L (10)	Z(10,1)	Z(10,4)	Z [85]
$\omega_0^2 = 1$									
24.0	1.9341	1.9075	1.9111	1.9386	1.9464	1.9357	1.9387	1.9343	1.9380
9.6	1.5482	1.5353	1.5374	1.5507	1.5556	1.5489	1.5509	1.5484	1.5498
2.4	1.2104	1.2079	1.2086	1.2110	1.2127	1.2105	1.2112	1.2106	1.2109
1.2	1.1208	1.1200	1.1204	1.1211	1.1218	1.1208	1.1211	1.1209	1.1210
0.72	1.0779	1.0776	1.0778	1.0780	1.0784	1.0779	1.0780	1.0780	1.0780
0.48	1.0540	1.0540	1.0541	1.0542	1.0544	1.0541	1.0542	1.0542	1.0542
$\omega_0^2 = -1$									
9.6	0.9667	0.8663	0.8735	0.9782	0.9897	0.9740	0.9718	0.9642	0.9730
7.2	0.8166	0.6975	0.7062	0.8292	0.8404	0.8251	0.8209	0.8128	0.8233
4.8	0.6159	0.4384	0.4544	0.6312	0.6416	0.6275	0.6178	0.6074	0.6227
2.4	0.2969	-	-	0.3240	0.3280	0.3231	0.2825	-	0.3027
1.68	0.1539	-	-	0.1961	0.1848	0.2044	0.1157	-	0.1562
1.44	0.1031	-	-	0.1476	0.1311	0.1606	0.0324	-	0.1028
1.20	0.0562	-	-	0.0873	0.0806	-	-	-	0.0532

3.1. táblázat. A ΔE energiakülönbségre kapott numerikus eredmények összefoglaló táblázata. A fejlécben feltüntettem a közelítéseket, valamint az LPA-ban és a Z hullámfüggvény renormálásban használt L és M rendeket. Az LPA_L a Litim-regulátorral számolt eredményeket mutatja.

értékét is, ahol numerikusan oldották meg nagy pontossággal az 1d ϕ^4 modell sajátérték-egyenletét. Nagyon precíz eredményeket lehet kapni valódi idő (proper time) RG módszert használva is [85], ezeket szintén feltüntettem a táblázatban. Azt tapasztaltam, hogy az LPA eredmények nagyon jó közelítést adnak már egészen kevés csatolásszámmal is, és az egyes sémák között alig van különbség. Gyenge csatolás esetén elhanyagolható az eltérés, ami erős csatolás esetén kissé felnő, de abban a tartományban is pár százalék a differencia az egzakt értékhez képest. Nagy eltérések mutatkoznak a szimmetriasértett fázisban. Először is vannak sémák, ahol

csak erős csatolás esetén lehet számolni. A Z feljavítása nem segít ezen, sőt az LPA számolás kisebb csatolás esetén is használható marad. Legjobb eredményeket akkor kaptam, amikor a Z -ben mindössze egyetlen csatolást vettem figyelembe. Ez arra utal, hogy a Z Taylor sorfejtése nem konvergál.

A CS regulátorral az egyrészesecske irreducibilis (one-particle irreducible, 1PI) effektív hatás evolúcióját követem. A modell egyszerűsége lehetővé teszi, hogy a kétrészesecske irreducibilis (two-particle irreducible, 2PI) effektív hatásra vonatkozó evolúciós egyenletet is analizáljam. Ebben az esetben a negyedrendű tag játssza a regulátor szerepét [86], azaz az RG skálát magával a g csatolással azonosítom. A számolás 2PI jellege abban mutatkozik meg, hogy nem a teret, hanem a propagátort tekintem változónak. Ezt az RG módszert ritkán használják a szakirodalomban, pedig óriási előnye, hogy nincs szükség új regulátor tag bevezetésére a hatásban, emiatt a módusok diszperziója nem változik, továbbá, hogy az UV-ben felvett hatásnál azt feltételezzük, hogy azt a kinetikus tag dominálja, a kölcsönhatás gyenge. A g mint RG skála kezdetben alacsony értékről indulva pontosan ennek felel meg. Az evolúció lehetőséget ad a trajektóriák követésére a gyenge csatolású limeszből az erős csatolású limeszbe.

A 2PI analízist perturbatív módon végeztem el, és más perturbatív eredményekkel vettem össze, ezeket a 3.2 táblázatban foglaltam össze. A kifejtési paraméter a csatolásból származó dimenziótlan mennyiség: $\xi = g_B \hbar / (16\omega_0^3)$. Az alapállapotot

Mennyiség	2PI IMA	2PI	CS RG	WH RG	R-S
$E_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega_0 - \xi$	$-\frac{55}{9}\xi^2$	$-\frac{16}{3}\xi^2$	$-\frac{71}{30}\xi^2$	$-18\xi^2$	$-\frac{7}{3}\xi^2$
$\frac{\Delta E - \hbar^2\omega_0^2}{\hbar^2\omega_0^2} - 4\xi$	$-\frac{55}{6}\xi^2$	$-\frac{71}{8}\xi^2$	$-11\xi^2$	$-32\xi^2$	$-12\xi^2$
$\frac{g_0 - g_B}{g_B}$	$-\frac{4}{3}\xi$	-4ξ	-6ξ	-6ξ	0
$Z_0 - 1$	$\frac{1}{3}\xi^2$	$\frac{1}{8}\xi^2$	$\frac{2}{3}\xi^2$	0	0

3.2. táblázat. A különböző RG-sémák keretében kapott mennyiségek összehasonlítása, $\xi = \frac{g_B \hbar}{16\omega_0^3}$ kifejtési paraméterben másodrendig számolva.

(1. sor), a ΔE -t (2. sor), a csatolást (3. sor) és a Z_0 konstans hullámfüggvény renormálást (4. sor) számoltam. A 2PI formalizmusban a független módus közelítéssel (independent mode approximation, IMA) és a másodrendben számolt RG egyenletekkel dolgoztam. Számítást végeztem a CS sémában, a WH-egyenlettel LPA-ban, végül a Rayleigh-Schrödinger perturbációs kifejtésben másodrendig. A megoldások konzisztensek, ami abban nyilvánul meg, hogy az előjelek megegyeznek, továbbá az eltérések nem számottevőek. A vizsgálat erőssége a 2PI RG evolúció meghatározása és alkalmazása ebben a fizikailag releváns modellben.

A standard 1PI Wetterich-egyenlet alkalmas a regulátor optimalizálására az 1d ϕ^4 modell keretében [87]. A szakirodalomban megjelent kompakt tartójú (compactly supported smooth, css) regulátort használtam [88, 89]. Észrevettem, hogy az eredeti regulátor 4 paramétere helyett 3 paraméter is elegendő a teljes regulátor spektrum lefedéséhez [89]. A dimenziótlan regulátor általános alakjára a következő javaslatot tettem:

$$r_{css} = \frac{s_1}{\exp[s_1 y^b / (1 - s_2 y^b)] - 1} \theta(1 - s_2 y^b), \quad (3.8)$$

ahol $y = p^2/k^2$, $b \geq 1$ és s_1, s_2 pozitív paraméterek. A css regulátor nem analitikus formában adja meg az evolúciós egyenleteket, de a regulátorok széles körét biztosítja. A css regulátor határesetei a következő általánosan használt regulátorfüggvényeket adják:

$$\begin{aligned} \lim_{s_1 \rightarrow 0} r_{css} &= \left(\frac{1}{y^b} - s_2 \right) \theta(1 - s_2 y^b), \\ \lim_{s_1 \rightarrow 0, s_2 \rightarrow 0} r_{css} &= \frac{1}{y^b}, \\ \lim_{s_2 \rightarrow 0} r_{css} &= \frac{s_1}{\exp[s_1 y^b] - 1}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

ahol az első határérték a Litim-féle optimalizált regulátort adja meg [90, 4], a második a hatványfüggvény regulátort, a harmadik pedig az exponenciális regulátort adja. Lehetőségem van egy olyan egyidejű optimalizálásra, ahol két paraméter folytonos változtatásával az alapvető regulátorok egymásba alakíthatók.

A ΔE energiakülönbséget számoltam az s_1, s_2 paraméterek függvényében. A számolást LPA-ban végeztem, $L = 6$ tagot figyelembe véve a potenciálban. Kiszámoltam a nevezetes regulátorokhoz tartozó ΔE értékeket pozitív és negatív kezdeti tömegre, az eredmények közel azonosak voltak. Minimumot találtam az s_1, s_2 síkon, azonban az nem a Litim-regulátornál volt, hanem annak módosított alakjában. Az eredmény azért meglepő, mert az LPA-ban analitikusan megmutatható, hogy a Litim-regulátor az optimális [87]. Nincs ellentmondás, mert a Litim-regulátort az evolúció konvergenciájának gyorsasága alapján kapjuk, míg én a regulátorparaméterek terében kerestem olyan tartományt, ahol a paraméterekre való érzékenység minimális.

Érdeklődésem a nyílt rendszerek, a rendszer-környezet kölcsönhatás vizsgálatának irányába fordult. Egyik lehetséges naiv módszer a környezet modellezésére egy hőfürdő, amely harmonikus oszcillátorok rendszere. A Caldeira-Leggett modellben egy anharmonikus oszcillátort lineárisan csatolunk egy hőfürdőhöz, ezáltal a rendszert reprezentáló oszcillátort úgy tudjuk vizsgálni, hogy a környezetet reprezentáló hőfürdő hatását kiintegráljuk. Elvégeztem a modell RG analízisét [91]. A hőfürdő módusainak kiintegrálása divergens járulékot ad, ezért be kell vezetni egy Λ levágást. Ezek után meg kell győződni arról, hogy a kapott fizikai eredmények nem függenek a levágástól. Emellett két különböző levágást vezettem be, az egyik egy lépcsőfüggvény-szerű levágás volt, a másik pedig egy Lorentz görbének megfelelő. A WH-egyenletet és a Wetterich-egyenletet is használtam, utóbbit a Litim-regulátorral. A szuszceptibilitás γ kritikus exponense mindig 1-nek adódott, a levágástól függetlenül. A korrelációs hossz exponensét a WH-egyenlet esetén számoltam, az is 1-nek adódott, ismét függetlenül a levágás típusától. A skálázási tulajdonságok a kvantum-klasszikus határátmenetben figyelhetőek meg, ahol a hőfürdő disszipálni tudja a kvantum-effektusokat. Ennek az átmenetnek a vizsgálata későbbi kutatásaimban központi szerepet kapott, ezt a 6. fejezetben fogom bemutatni.

Igazoltam, hogy a 3-dimenziós ϕ^4 modellben szintén jelen van a kvantum cenzúra, azaz a szimmetriasértett fázisban az evolúció leáll véges skálán [33]. Az 1-dimenziós ϕ^4 modellben, ami egy kvantum anharmonikus oszcillátornak felel meg, kiszámítottam az alap és az első gerjesztett állapot energiáját egy-, illetve kétrészecske irreducibilis formalizmusban a negyedrendű csatolás, mint skálaparaméter függvényében, és pontos egyezést kaptam a más módszerrel meghatározott irodalmi értékekkel [92]. Rámutattam, hogy az alapállapot energiájának számolása alkalmas az optimális regulátor megválasztására, ami meglepő módon lokális potenciál közelítésben nem a Litim-regulátornak adódott [87]. Egy hőfürdőhöz csatolva az anharmonikus oszcillátort, meghatároztam a szuszceptibilitás és a korrelációs hossz kritikus exponensét [91], megmutattam, hogy azok levágásfüggetlenek.

4. fejezet

Infravörös fixpont a skalárelméletekben

A kutatásaimban továbbra is a szimmetriasértett fázis IR viselkedését vizsgáltam. Tudjuk, hogy ugyan a kvantumtérelméletben a blokkosított hatás jól jellemzi egy adott k renormálási skálán a kölcsönhatásokat, de valódi fizikai tartalommal csak a (kvázi) nulla skálán vett effektív potenciál rendelkezik. Emiatt elengedhetetlenül fontos megismerni a $k \rightarrow 0$ limeszt. A szimmetrikus fázisban ez működik, azonban az előző fejezetben azt mutattam meg, hogy bizonyos skaláris elméletek a szimmetriasértett fázisban szingularitásba futnak, emiatt nem tudjuk, hogy milyen a valódi IR viselkedés. Ennek fizikai jelentést is tulajdonítottam: a szinguláris viselkedés amiatt jelenik meg, mert a modell eredeti szabadsági fokai egyre kevésbé alkalmazhatók a modell leírására, a fluktuációk szerepe pedig egyre nagyobb. Megjelenik a spinodális instabilitás, amely elválasztja az adott modell stabil és instabil tartományát. A fa-szintű blokkosítás ugyan fizikailag jól értelmezhető, de ez a leírás sem ad megnyugtató választ: a kvantum cenzúra szerint nem tudunk belépni az instabil tartományba, mert a konzisztens RG blokkosítás csak egyre csökkenő Δk -val használható.

Tudjuk, hogy általában egy kritikus pont is megjelenik a spinodális görbe mentén ott, ahol a binodális fázis eltűnik. A skaláris modellekben a spinodális instabilitás egy pontnak felel meg a fázistérben. Azt gondoltam, hogy az instabilitásnak megfelelő pont egy fixpontot rejt, amely szintén skálázási tulajdonságot mutat. Amennyiben feltételezem, hogy az instabilitási pont egy fixpontnak felel meg, akkor az instabilitás közelében kapott skálázási tulajdonságok miatt jelenik meg a kvantum cenzúra. Az új fixpontot IR fixpontnak neveztem el. Ebben a fejezetben azt mutatom be, hogy kvantumtérelméleti modellekben hogyan jelenik meg az IR fixpont.

4.1. A sine-Gordon modell infravörös viselkedése

A 2d SG modellt vizsgáltam úgy, hogy a β hullámszámot beleolvasztottam a térváltozóba: $\phi \rightarrow \beta\phi$. Ennek következtében a kinetikus tag előtt megjelenik a konstans hullámfüggvény renormálás $z = 1/\beta^2$. A módosítás után a hatás alakja:

$$S = \int_x \left[\frac{z}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi) \right], \quad (4.1)$$

ahol $V(\phi) = \sum u_n \cos(n\phi)$ egy periodikus potenciál, amely Fourier sor formájában adott. Az SG modell IR fizikáját továbbra is az RG módszerrel kerestem. A vizsgálatnál a korrelációs hossz exponensének helyes skálázásához szükség van a hullámfüggvény renormálásra. Ez ugyan a WH-egyenlet keretében is számolható (ezt bemutatom a bilokális SG modell vizsgálatánál), ennek ellenére ebben a munkában a Wetterich-egyenletet használtam [93]. Az $R_k = p^2(k^2/p^2)^b$ alakú hatványfüggvény regulátort használtam. Az evolúciós egyenletek alakja

$$\partial_k V_k = \frac{1}{2} \int_p \mathcal{D}_k k \partial_k R_k, \quad (4.2)$$

$$k \partial_k z = \mathcal{P}_0 V_k^{m_2} \int_p \mathcal{D}_k^2 k \partial_k R_k \left(\frac{\partial^2 \mathcal{D}_k}{\partial p^2 \partial p^2} p^2 + \frac{\partial \mathcal{D}_k}{\partial p^2} \right), \quad (4.3)$$

ahol bevezettem a $\mathcal{D}_k = 1/(zp^2 + R_k + V_k'')$ és $\mathcal{P}_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\phi$ jelöléseket, utóbbi a Fourier sor konstans tagjának járulékát szolgáltatja.

Az evolúciós egyenletek linearizált közelítése a

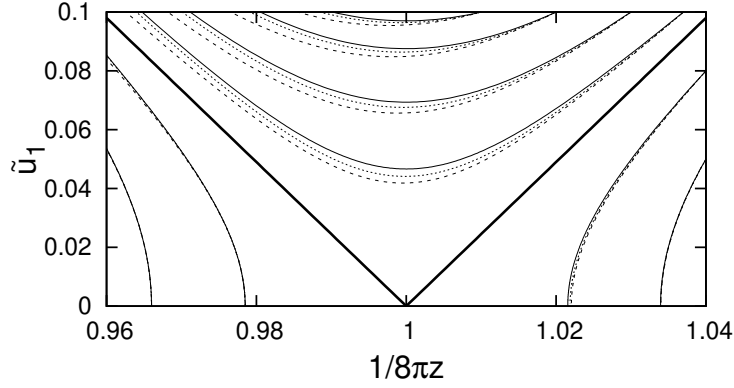
$$(2 + k \partial_k) \tilde{u}_1 = \frac{1}{4\pi z} \tilde{u}_1, \quad (4.4)$$

$$k \partial_k z = -\frac{\tilde{u}_1^2}{z^{2-2/b}} c_b, \quad (4.5)$$

egyenleteket adja, ahol $c_b = b\Gamma(3 - 2/b)\Gamma(1 + 1/b)/(48\pi)$. A $z = 1/(8\pi)$ Coleman-pont helye független a b paramétertől. Megjegyzem, hogy a szakirodalomban ismert SG modellre vonatkozó megoldások nem változtatják meg a Coleman-pont helyét. Ennek az az oka, hogy az \tilde{u} csatolás skálázása fa-szintűnek tekinthető, amit a hurok-effektusok nem tudnak felülírni. Az egyenlet megoldható az \tilde{u}, z síkon, a megoldások

$$\tilde{u}_1^2(z) = \frac{2}{(8\pi)^{1-2/b} c_b} (z - z^*)^2 + \tilde{u}_1^{*2}, \quad (4.6)$$

alakú hiperbolák, amely a KT típusú fázisátalakulás jelenlétére utal. A Coleman-pont körüli skálázást a 4.1 ábrán szemléltetem. Hasonló eredményt lehet kapni perturbatív RG analízissel [20], az RG módszer egy ritkábban használt "folyási egyenlet megközelítés" (flow equation approach) nevű változatával [34, 94] vagy a



4.1. ábra. Az SG modell fázisszerkezete a Coleman-pont közelében. A folytonos vonal a linearizált evolúciót, a szaggatott vonal az \tilde{u}_1 -ben egzaktnek tekinthető evolúciót (ami a 4.8 egyenletek megoldása), a pontozott vonal pedig a teljes (azaz a Fourier sorfejtés további tagjait is tartalmazva kapott) evolúciót mutatja. A vastag vonal a szeparátrixot jelöli.

2d Coulomb gázra alkalmazott koordináta-térbeli RG módszerrel [25, 26]. A KT fázisátalakulásban a ξ korrelációs hossz t redukált hőmérséklet-függésére a $\xi \sim e^{1/\sqrt{t}}$ adódik. A redukált hőmérsékletet a z hullámfüggvény renormálás szeparátrixtól való eltéréseivel arányos, amelyről numerikusan beláttam, hogy teljesül rá az $\tilde{u}_1^2 = qt + \mathcal{O}(t^2)$ összefüggés, ezt mutatom be a 4.2 ábrán. A korrelációs hosszt a $\xi \sim 1/k^*$ összefüggés alapján értelmeztem, ahol k^* a 4.1 ábrán kapott hiperbolák minimumainak megfelelő RG skála érték, az ennek megfelelő csatolás \tilde{u}_1^* . Emellett a 4.6 egyenlet és a 4.4 linearizált evolúciós egyenletek alapján a

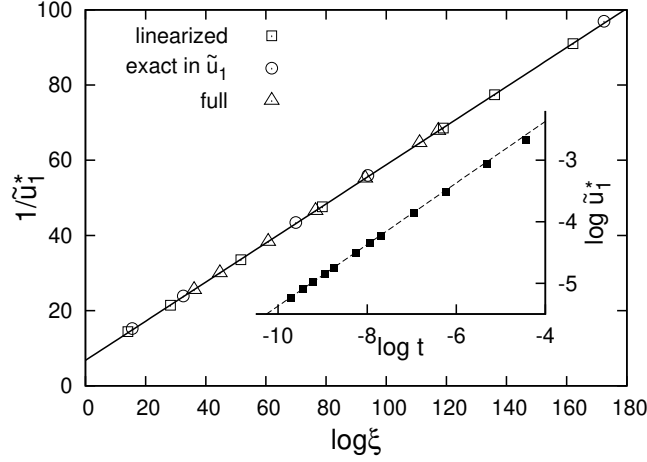
$$\log \xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\tilde{u}_1^* 8\sqrt{c_b}} + \mathcal{O}(\tilde{u}_1) \quad (4.7)$$

összefüggés vezethető le a korrelációs hosszra. Felhasználva, hogy $\tilde{u}_1 \sim \sqrt{t}$, a KT skálázás jellegzetes alakját kaptam. A skálázás regulátorfüggést mutat, de kvalitatív módon nem változtatja meg azt. Az eredmények szerint a linearizált egyenletek alapján sikerült megkapni az SG modell KT fázisátalakulásának minden részletét.

Az IR tartományban a linearizált egyenletek nem használhatók. A CS sémában azonban az \tilde{u}_1 csatolásban analitikusan megkaphatók a beta függvények:

$$\begin{aligned} (2 + k\partial_k)\tilde{u}_1 &= \frac{1}{2\pi\tilde{u}_1 z} \left[1 - \sqrt{1 - \tilde{u}_1^2} \right], \\ k\partial_k z &= -\frac{1}{24\pi} \frac{\tilde{u}_1^2}{(1 - \tilde{u}_1^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Az egyenletrendszer megoldását a 4.3 ábrán mutatom be. A trajektóriák a nem-renormálható fázisban a GFP-ben végződnek, minden $1/z > 8\pi$ -re, amely egy

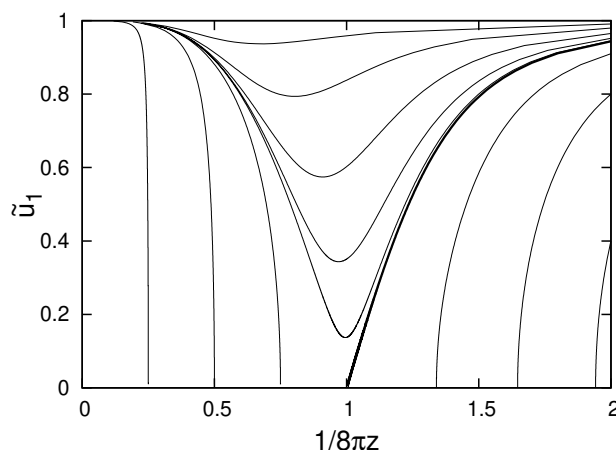


4.2. ábra. A \tilde{u}_1^* paraméter korrelációs hossz logaritmusától való függése a linearizált, \tilde{u}_1 -ben egzakt és a teljes evolúcióval kapott esetekben. A pontokra illesztett egyenes meredeksége $\sqrt{8/3\pi^2} \approx 0.52$. A betétábrán a \tilde{u}_1^* paramétert ábrázoltam a t redukált hőmérséklet függvényében. A pontokra illesztett szaggatott vonal meredeksége jó közelítéssel 0.5.

fixponti vonallá áll össze. Az \tilde{u}_1 csatolás irreleváns, a z evolúciója nagyon gyenge, tehát az LPA jól használható. Az is jól látszik az ábrán, hogy a Coleman-pont, mint fixpont, szintén megtalálható, ez a pont szeparálja a két fázist. A szimmetriasértett fázisban az $\tilde{u}_1 = 0$ szintén fixpont, azonban UV taszító, hasonlóan viselkedik, mint a GFP a 3d ϕ^4 modellben. Szintén a szimmetriasértett fázisban, de már az IR tartományban azt látjuk az ábrán, hogy az \tilde{u}_1 1-hez tart, ami szingularitást ad, a z béta függvénye divergál, újra megjelenik a spinodális instabilitás. Azonban az ábráról az is leolvasható, hogy az IR tartományban a trajektóriák egyetlen ponthoz, az $\tilde{u}_1 = 0$ és $1/z = 0$ ponthoz tartanak. Ez a pont egy IR vonzó fixpontként viselkedik. Matematikai értelemben ez nem egy fixpont, mert nem elégíti ki a fixponti egyenleteket, azonban a szingularitás úgy tűnik, hogy mégis egy reguláris viselkedést rejt. Az evolúciót kénytelenek vagyunk leállítani egy véges $k_{SI} = k_c$ skálán, azonban átskálázhatjuk a k RG skálát úgy, hogy az új skálával a nulláig tudunk blokkosítani. Átdefiniálom a csatolásokat is, mégpedig a $\omega = \sqrt{1 - \tilde{u}^2}$ és a $\chi = 1/z\omega$ változók bevezetésével. Az új ω változó már nem lesz szinguláris az $\tilde{u}_1 = 0$ pontban. Ennek segítségével az új RG skálát a $k\partial_k \rightarrow \omega^2 k\partial_k$ alakítom át. Az új változókra vonatkozó evolúciós egyenlet alakja a következő:

$$\begin{aligned} \partial_t \omega &= 2\omega(1 - \omega^2) - \frac{\omega^2 \chi}{2\pi}(1 - \omega), \\ \partial_t \chi &= \chi^2 \frac{1 - \omega^2}{24\pi} - 2\chi(1 - \omega^2) + \frac{\omega \chi^2}{2\pi}(1 - \omega). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Az egyenletrendszer fixponti analízise visszaadja a szimmetrikus fázis szokásos



4.3. ábra. Az SG modell fáziszerkezete a 4.8 egyenletek numerikus megoldása alapján. A vastag vonal a szeparátrixot jelöli.

fixponti vonalát, beleértve a Coleman-pontot is. Megjelenik egy új fixpont is, az IR fixpont, ami a fázistér $(0, 1)$ pontjában található. Megmutatható, hogy a pont gyengén releváns skálázást ad az IR felé haladva.

4.2. Az infravörös fixpont

Eddig a korrelációs hosszt a Coleman-pont körüli viselkedés alapján definiáltam. A szimmetriasértett fázis IR tartományában megjelenő k_c , mint kritikus skála, az instabilitást jellemzi, ami egy méretskálát definiál. A Coleman-ponthoz közel, de már a szimmetriasértett fázisból indított trajektóriánál a k_c nagyobb, mintha a ponttól távolabb indítottam volna. A fixpontnál a k_c nullához tart. Ez arra utal, hogy a k_c skálát kapcsolatba hozhatjuk a korrelációs hosszal. Ha $\xi = 1/k_c$, akkor egy olyan mennyiséget kapok, amely végtelen a szimmetrikus fázisban és véges a szimmetriasértettben. Ez lényegében ötvözi a spinodális instabilitással kapcsolatos fizikai képet a kvantum cenzúra eredményeivel: a spinodális instabilitásnál megjelenő kondenzátum mérete korrelációs hosszként értelmezhető, azonban a megjelenése egy fixpontban van. A kvantum cenzúra azért jelenik meg, mert az IR skálázás egy fixpont felé tart, amely skálázó tulajdonságú. Igaz, hogy nem a k függvényében kapunk skálázó tulajdonságot, hanem a $k - k_c$ függvényében.

A 2d SG modell mellett érdemes visszatérni a 3d ϕ^4 modellre. A két modell merőben eltér, az előbbiben egy végtelen rendű KT fázisátalakulás van, ahol a korrelációs hossz redukált hőmérséklet-függése

$$\log \xi \sim t^{-\nu} \quad (4.10)$$

szerinti, míg utóbbiban egy másodrendű fázisátalakulást látunk, ahol a korrelációs hossza

$$\xi \sim t^{-\nu} \quad (4.11)$$

skalázó tulajdonság adódik, a ν az exponens. Az eltérő skalázások ellenére a két modell fázisszerkezete nagyfokú hasonlóságot mutat. Mindkét modellnek két fázisa van, a WF és a KT fixpontok pedig a szeparátrix végpontjai, azaz ezek a pontok felelősek a fázisdiagram kettéosztásáért. A lehető legegyszerűbb esetben a 3d ϕ^4 modell evolúciós egyenlete

$$\begin{aligned} \dot{\bar{g}}_2 &= -2\bar{g}_2 - \frac{\bar{g}_4}{8\pi(1 + \bar{g}_2)^{1/2}}, \\ \dot{\bar{g}}_4 &= -\bar{g}_4 + \frac{3\bar{g}_4^2}{16\pi(1 + \bar{g}_2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

két csatolást követve, ha Wetterich-egyenlettel számolok CS regulátort alkalmazva. A dimenziótlantáshoz bevezettem a $\bar{k} = \min(zp^2 + R)$ skálát. Az RG evolúció szingulárisává válik $k = k_c$ -nél, amikor

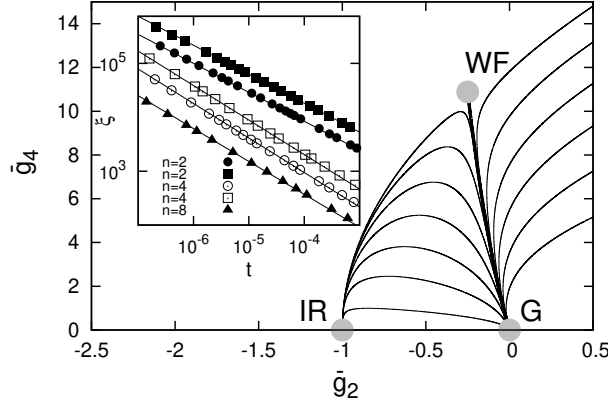
$$\bar{k}^2 - V_k''(\phi = 0)|_{k=k_c} = 0, \quad (4.13)$$

ahol $\bar{k}^2 = bk^2[z/(b-1)]^{1-1/b}$, ha $b = 1$, akkor $\bar{k} = k$. A numerikus vizsgálatnál maximum 8 csatolással dolgoztam, és a Z hullámfüggvény renormálást is figyelembe vettem. Szintén vizsgáltam sémafüggést is, a hatványfüggvény regulátort $b = 2$ és $b = 5$ paraméterek esetén is alkalmaztam [95].

A fázisszerkezetet a 4.4 ábrán szemléltetem. Van egy fázisátmenet a modellben, és a fázistér két fixpontot tartalmaz, ezek a 4.12 egyenletekből megkaphatók. Van egy triviális UV GFP az origóban két negatív exponenssel: $s_1 = -1$ és $s_2 = -2$. Ez azt mutatja, hogy az UV fixpont taszító. Az evolúcióban az IR felé haladva találok a WF fixpontot a $\bar{g}_2^{*WF} = -1/4$ és $\bar{g}_4^{*WF} = \sqrt{12}\pi$ pontban az $s_1 = 4/3$ és $s_2 = -2$ exponensekkel, továbbá $\nu = -1/s_2 = 1/2$. Az LPA-ban számolt két csatolás evolúciójából kapott eredmények az átlagtér közelítésnek felelnek meg.

A fázisdiagram azt mutatja, hogy a szimmetriasértett fázisban az IR-ben a $\bar{g}_2^{*IR} = -1$ és $\bar{g}_4^{*IR} = 0$ pontba tartanak a trajektóriák. Ez megfelel a $\tilde{V}_0 = -\phi^2/2$ formájú univerzális effektív potenciálnak. Úgy tűnik, hogy ez a pont a modell egy további fixpontja, bár ez a pont a 4.12 egyenletekben szereplő RG egyenleteket szingulárisává teszi. Az SG modellhez hasonlóan a csatolások átdefiniálom a $\omega = 1 + \bar{g}_2$, $\chi = \bar{g}_4/\omega$ és $\partial_\tau = \omega\partial_t$ szerint, ahol $\partial_t = k\partial_k$. Az új RG egyenletek alakja:

$$\begin{aligned} \partial_\tau\omega &= 2\omega(1 - \omega) - \frac{\chi\omega}{8\pi}, \\ \partial_\tau\chi &= -\chi + \frac{\chi^2}{4\pi}. \end{aligned} \quad (4.14)$$



4.4. ábra. A 3d ϕ^4 modell fázisszerkezete. A vastag görbe a szeparátrixot mutatja. A jobbra (balra) forduló trajektóriák a szimmetrikus (szimmetriasértett) fázishoz tartoznak. A fixpontokat szürke pontokkal jelöltem. A korrelációs hossz skálázása a redukált hőmérséklet függvényében a betétábrán látható. A pontokat az IR fixpont körüli skálázásból kaptam, míg a folytonos vonalakat a WF fixpont körüli skálázás alapján számoltam, azok értéke: $\nu = 0.53$ (LPA, 2 csatolás), $\nu = 0.64$ (Z, 4 csatolás) és $\nu = 0.62$ (Z, 8 csatolás). A görbéket a jobb láthatóság érdekében eltoltam. A háromszög a $b = 1$, a kör a $b = 2$, a négyzet a $b = 5$ értékeknek felelnek meg.

Az új egyenleteknek már 3 fixpontjuk van. A GFP-t a $(\omega^{*G} = 1, \chi^{*G} = 0)$ pontban találom, a WF fixpont a $(\omega^{*WF} = 3/4, \chi^{*WF} = 4\pi)$ pontban van, emellett a 4.12 egyenletekhez képest megjelenik egy új fixpont a $\omega^{*IR} = 0$ és $\chi^{*IR} = 4\pi$ pontban. Ez utóbbi azonosítható azzal az IR fixponttal a 4.4 ábrán, ahol a szimmetriasértett fázis trajektóriái egybefutnak. A fixpontban az exponensek $s_1 = 1$ és $s_2 = 3/2$ -nek adódnak, amelyek szerint az IR fixpont vonzó.

A \bar{k} skálán a szimmetriasértett fázisban a beta függvények divergálnak, megjelenik a spinodális instabilitás. Ennek reciprokával definiálom a korrelációs hosszt: $\xi = 1/\bar{k}_c$. A 4.4 ábra betétábráján a ξ -t ábrázoltam a redukált hőmérséklet függvényében, amit a $t \sim \bar{g}_{4\Lambda} - \bar{g}_{4\Lambda}^*$ UV paraméterek segítségével definiálhatunk. Logaritmikus skálán a $\log \xi \sim -\nu \log t$ szerint egyenest kapunk $-\nu$ meredekséggel. A szabad paramétere a $\bar{g}_{4\Lambda}^*$ tetszőleges értékére nem kapunk egyenest, ezt úgy tudjuk rögzíteni, hogy finomhangoljuk a paraméter értékét addig, amíg a $\xi(t)$ függvény a kétszer logaritmikus skálán egyenessé nem válik. A numerikusan kapott ν értékek nagyon jó egyezést mutatnak a hagyományos, a WF fixpont körüli linearizálással kapott exponens eredményekkel. Az IR-ben leolvasott exponensnél a ξ -t könnyű meghatározni numerikusan, és a fixpont helyét sem kell pontosan ismernünk, egyedüli nehézség a $\bar{g}_{4\Lambda}^*$ szabad paraméter illesztése, de ez sem okoz különösebb gondot. A hagyományos számolásnál a fixpont meghatározása a valódi numerikus probléma, mert egyre nehezebb megtalálni a fixpontot, ahogy nő a csatolások száma.

Az IR fixpont megörökli a WF fixpont körüli skálázás tulajdonságait. A WF fixpontot jól megközelítő trajektóriák a fixpontnál lelassulnak, az IR felé haladva pedig felgyorsulnak. A k^* , a WF fixpontnál vett fordulópont, és a k_c skála korrelál egymással. Azonban az IR fixpontnál az utóbbi mutat skálázó tulajdonságot, emiatt mindenképpen IR skálázásról kell beszélnünk. Megjegyzem, hogy a 2d $O(2)$ modellben nem lesz az átmeneti tartományban fixpont, azaz nincs k^* skála, mégis megkapom az IR fixpontot és annak skálázó tulajdonságait.

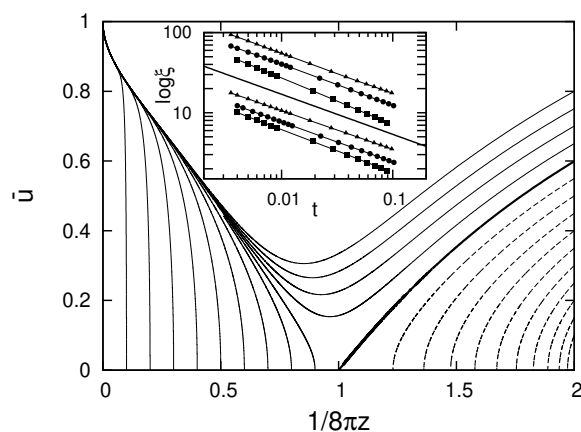
Az IR fixpont olyan, hogy csak $\bar{k} > \bar{k}_c$ skálaértékek felől közelíthetjük meg, mintha csak az egyik fázis felől tudnánk megközelíteni a fixpontot. A fizikában más területen is előfordul ilyen, például szilárdtestfizikában szálas anyagok törésénél [96]. Szálköteg modellek terhelésénél a szálakon a terhelés egyenlően oszlik el, azonban a teherbíró képességük eltérhet. Egy elszakadó szál a szomszédainak adja át a terhelést. A teljes szálköteg fokozatos terhelésekor először a leggyengébb szálak szakadnak el. Tovább növelve a terhelést egyre több szál szakad el. A terhelés egy kritikus értékét elérve a szálkötegben lavinaszerűen eltörik az összes szál. Ez is egy olyan kritikus jelenség, ahol nincs lehetőség a törött fázis oldaláról vizsgálnunk a fázisátalakulást. A terhelés azonosítható az RG skálával, egészen $\bar{k} = \bar{k}_c$ -ig tudjuk azt csökkenteni, azonban utána (az anyag töréséhez hasonlóan) nincs információnk a modell viselkedéséről. A törésnél is azt tapasztaljuk, hogy a terhelés és annak kritikus értékétől vett különbség függvényében a fizikai mennyiségek hatványfüggvény szerint divergálnak. Hasonlóan, $(\bar{k} - \bar{k}_c)^{-\alpha}$ alakú skálázási viselkedéseket tapasztalunk az RG módszerben.

A \bar{k}_c körüli skálázó viselkedés magyarázatot ad a kvantum cenzúra jelenségére is. Közeledve a \bar{k}_c skálához hatványfüggvény viselkedést kaphatunk $\bar{k} - \bar{k}_c$ függvényében, azonban ez a különbség pontosan a Δk -val azonosítható. A kvantum cenzúra szerinti finomítás a Δk finomításának felel meg, azaz a skálázó tulajdonság, és ezzel együtt a divergens viselkedés, egyre pontosabb feltérképezésének felel meg.

Azt mondhatjuk, hogy az IR fixpont magyarázatot ad a spinodális instabilitás és a kvantum cenzúra megjelenésére is. A fa-szintű renormálás, amely egy véges Δk lépéssel a $\bar{k} < \bar{k}_c$ tartományba teszi az evolúciót, szintén nem mond ellent az IR fixpontnak, azonban a fa-szintű vizsgálatnál óvatosan kell eljárunk. Meg kell győződni arról, hogy a fixponton való átlépéskor a véges Δk finomítására mennyire érzékeny a módszer. Mivel a célunk a fázisok feltérképezése, ezzel együtt a fixpont pontos jellemzése, ezért minden bizonnyal nem tudjuk elkerülni azt, hogy az eredmények $\Delta k \rightarrow 0$ esetben instabilak legyenek, mert divergenssek a fizikai mennyiségeink. Ez alól kivételt képezhetnek olyan alacsony dimenziós szuperrenormálható elméletek, ahol a divergencia meg sem jelenik vagy könnyen kezelhető. Ilyen lehet az SG vagy MSG modell, és emiatt kaphattunk az előző fejezetben konzisztens eredményt ezen modellek IR viselkedésére a fa-szintű skálázással.

4.3. Infravörös fixpont periodikus modellekben

A 4.1 fejezetben megmutattam, hogy az SG modell RG egyenletei a csatolások átdefiniálásával olyan alakba hozhatók, amely IR fixpont jelenlétére utal. Az előző fejezetben a 3d ϕ^4 modellben a k_c szingularitási skála reciprokát azonosítva a ξ korrelációs hosszal meghatároztam annak skálázó tulajdonságait az IR-ben. Ezt a gondolatmenetet elismétlem az SG modellre is, de most figyelve a regulátorfüggésre, illetve arra, hogy az IR-ben határozom meg a ξ -t. A hatványfüggvény regulátort használva újra bevezettem a \bar{k} skálát, és az egyszerűség kedvéért csak az alpmódust evolúcióját követtem. Szerencsére az eredmények azt mutatják, hogy a felharmonikusok csak kvantitatív módon változtatják meg a modell viselkedését, ezért nem fontos a felharmonikusok követése [93]. Az egyetlen csatolást \bar{u} -val jelöltem. A $b = 5$ esetben meghatároztam a fázisszerkezetet, az eredményeket a 4.5 ábrán szemléltetem. A fázisszerkezet a szokásos struktúrát mutatja, két fázis van, amit

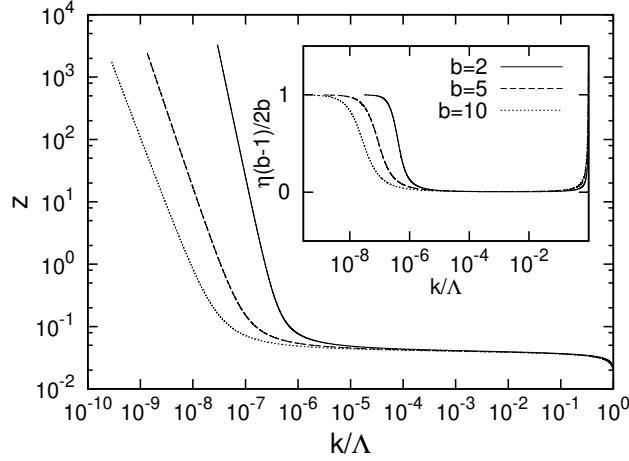


4.5. ábra. Az SG modell fázisdiagramja $b = 5$ esetén. A szaggatott trajektóriák a szimmetrikus, a folytonosak a szimmetriasértett fázishoz tartoznak. A vastag vonal a szeparátrixot jelöli. A betétábrán a ξ korrelációs hossz skálázását mutatom be a t redukált hőmérséklet függvényében. A görbéket a jobb láthatóság érdekében eltoltam. Az alsó vonalakat az IR fixpont, a felsőket a Coleman-pont közelében vett skálázásból kaptam. A háromszög, a kör és a négyzet $b = 2, 5, 10$ értékeknek felel meg. Középen egy $-1/2$ meredekségű egyenest rajzoltam viszonyítási alapul.

a Coleman-pont választ ketté, amelynek a közelében a trajektóriák hiperbolák. Az IR tartományban az \bar{u} csatolás a b minden értékére 1-hez tart, ami a \bar{k} skála függvényében egyfajta regulátorfüggetlenséget mutat a modellben. Az eredmény azt is mutatja, hogy az LPA közelítés nem alkalmazható a Coleman-pont és az IR fixpont közelében, azonban az UV-ben használható. A korrelációnak két számolási módja van, az egyik a Coleman-pont körüli szokásos eljárás, ahol a \bar{u} csatolás Coleman-pont fordulópontja körüli viselkedésen alapul. A másik az IR fixpont

közelében történő skálázás, ahol a $\xi = 1/\bar{k}_c$. A 4.5 ábra betétábráján látható, hogy a ξ skálázása végtelen rendű fázisátalakulást mutat, ahol az exponens $\nu \approx 0.5$ mindkét számolási mód esetén.

Az IR tartományban z divergál a $z = k^\eta$ szerint, ahol $\eta = 2b/(b-1)$, azaz sémafüggő eredményt kapok. A skálázást a 4.6 ábrán mutatom be. Az IR fixpont környékén szépen látható a skálázó tulajdonság. A \bar{k} skála függvényében ábrázolva



4.6. ábra. A z evolúciója eltérő b értékeknél. A betétábrán az anomális dimenzióhoz tartozó univerzális $\eta(b-1)/2b$ mennyiséget ábrázoltam.

a z -t függőleges vonalakat kapnánk, és nem volna b -függés sem.

Az SG modell egyik általánosítása a tömegtag figyelembevétele, akkor kapjuk az MSG modellt. Hasonlóan a 3d ϕ^4 modellhez, és az SG modellhez, az IR fixpontot keresem az MSG modellben is. Az általánosított periodikus potenciál alakja:

$$V = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \sum_{n=1}^{N_u} u_n \cos(n\phi), \quad (4.15)$$

ahol $m = m_k$ a tömegtag, annak skálázása triviális. Figyelembe veszem a hullámfüggvény renormálást is:

$$Z = z + \sum_{n=1}^{N_z} z_n \cos(n\phi). \quad (4.16)$$

Az MSG modell érdekes ötvözete az SG és a ϕ^4 modellnek. A modell nem periodikus a tömegtag miatt, azonban az UV skálán SG modellként viselkedik. A $z = z_0$ konstans (azaz térfüggetlen) hullámfüggvény renormálás is fejlődik, az SG modellhez hasonlóan, aminek a ϕ^4 modellben nincs evolúciója, ha nincs mellette ϕ függő további tag. Ellenben a modell másodrendű fázisátalakulást mutat, ahogy a ϕ^4

modell is. Lényegében az mondható, hogy az MSG modellben az UV-ben inkább az SG modellre, az IR-ben viszont inkább a ϕ^4 modellre hasonlít.

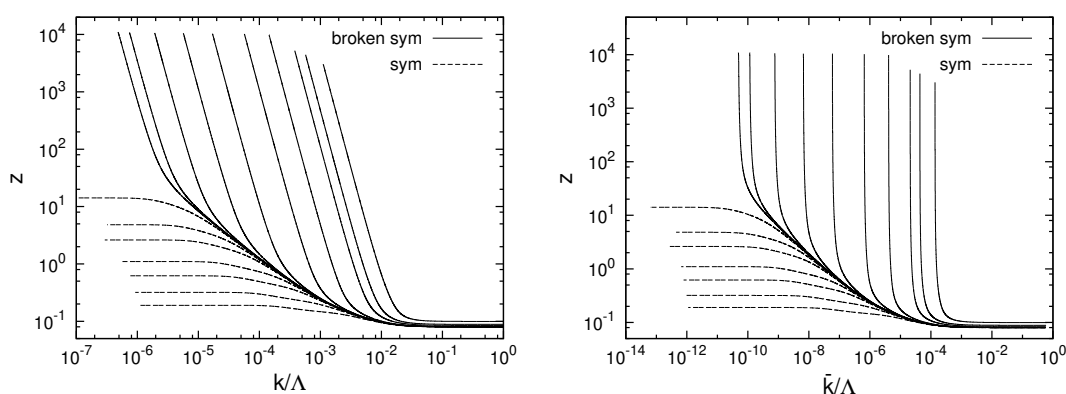
Ismét hatványfüggvény regulátort használok, ennek következtében a szingularitási feltétel a

$$\bar{k}^2 - \sum_{n=1}^{N_u} n^2 u_n = 0 \quad (4.17)$$

alakot ölti, ahol

$$\bar{k}^2 = bk^2 \left(\frac{\sum_{n=0}^{N_z} z_n}{b-1} \right)^{1-1/b}. \quad (4.18)$$

Az MSG modellben a z evolúcióját a 4.7 ábrán követem. A szaggatott vonalak



4.7. ábra. A z hullámfüggvény renormálás skálázása a k (bal) és \bar{k} (jobb) RG skálákra $b = 2$ regulátor paraméternél.

felelnek meg a szimmetrikus fázisnak, a folytonos vonalak a szimmetriasértettnek. A kezdeti z értéket finomítva közelednek a trajektóriák a szeparátrixhoz, amely a 4.7 bal ábráján egy k^{-1} szerint divergáló görbe. Ha a trajektóriákat tekintjük, azokon háromféle skálázó viselkedést különböztethetünk meg. UV-ben a z konstans, ez megfelel az LPA közelítésnek, lényegében az SG modellel egyező evolúciót kapok. A középső, átmeneti tartományban található szakasz az MSG modellben fellelhető másodrendű fázisátalakulást jellemzi, ebben a régióban $z \sim k^{-1}$. Ennek a fázisátmenetnek nincs fixpontja, mert a tömegtag triviálisan skálázik, $\tilde{m} \sim k$. A szeparátrixről leváló szaggatott vonalaknak megfelelő trajektóriák konstanshoz tartanak, az evolúció folyamán a z véges marad, ez jellemzi a szimmetrikus fázist. A szimmetriasértett fázishoz tartozó folytonos vonallal ábrázolt trajektóriák tovább divergálnak egy új skálatörvény szerint, ami k^{-2} -nak felel meg. Ezek a skálázások felelnek meg az IR fixpont körüli viselkedésnek. Ezen az ábrán világosan elkülönül az UV, az átmeneti és az IR skálázás. Az MSG modellben már nem mondhatjuk, hogy az átmeneti tartomány öröklődik az IR-ben, mert eltérő skálázást tapasztalunk.

A 4.7 jobb ábráján ugyanazt a struktúrát látjuk, csak most a \bar{k} függvényében. Az egyetlen különbség az IR skálázásban mutatkozik, ahol a z szingulárisan viselkedik. A \bar{k} skála lényegében a $b = 1$ -nek megfelelő evolúciót tükrözi. Hasonló éles felfutásokat kapunk, ha a Litim-regulátort használjuk. Kiszámoltam a ν kritikus exponens értékét is az átmeneti és az IR skálázás alapján. A számolást LPA-ban és a z futásával együtt is analizáltam, a legpontosabb számolásoknál $N_u = 5$ és $N_z = 1$ számú módussal dolgoztam. Az MSG modellben

$$\xi \sim t^{-\nu} \quad (4.19)$$

másodrendű skálázást kapok, az exponense numerikusan nagy pontossággal $\nu \approx 0.5$ lett. Más számolásoknál a $\nu = 1$ érték adódik [97]. Az ellentmondás oka az lehet, hogy az MSG modell az IR viselkedés alapján nem a 2d Ising modellnek megfelelő univerzalitási osztályban van. Csak az MSG modell UV viselkedése szerint vagyunk ebben az univerzalitási osztályban, az átmeneti és az IR viselkedés, ahol az exponenst számoltam, már másodrendű fázisátalakulásra utal.

Az SG modell másik általánosításában több teret vezetünk be, és azok között lineáris kölcsönhatást feltételezünk, ekkor a réteges SG (layered SG, LSG) modellt kapjuk. Az MSG modellel ellentétben itt megmarad a diszkrét eltolási szimmetria. Alkalmazható a LSG modell mágneses csatolt réteges szerkezetű anyagok vortex dinamikájának leírására [98, 99, 100]. A LSG modell is két fázissal rendelkezik, részletes UV elemzést végeztek a modellen a WH-egyenlet keretein belül [101, 102]. A fázisokat elválasztó β_c paraméter függ az N rétegszámtól. Azt feltételezzük, hogy KT típusú fázisátalakulás jelenik meg a modellben [103, 104], azonban az eddigi LPA eredmények nem tudnak erről számot adni.

A LSG modellnek megfelelő effektív hatás alakja [105]:

$$\Gamma_k = \int_x \left[\frac{z}{2} \sum_{n=1}^N (\partial_\mu \phi_n)^2 + V \right], \quad (4.20)$$

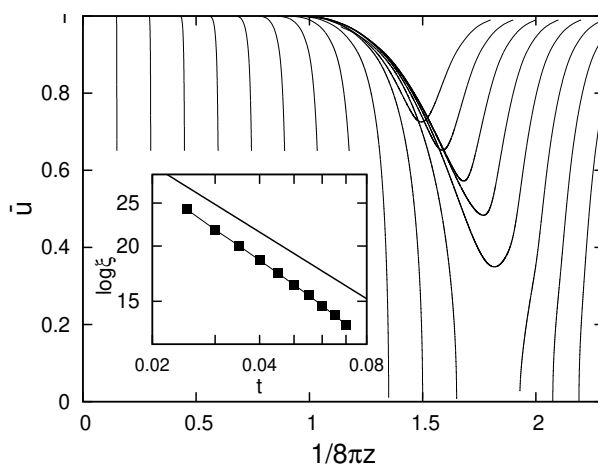
ahol az n -edik réteget a ϕ_n térrel jellemezzük, $n = 1 \dots N$, bevezetjük a szokásos z hullámfüggvény renormálást és egy V potenciált is

$$V = \frac{1}{2} J \left(\sum_{n=1}^N \phi_n \right)^2 + u \sum_{n=1}^N \cos \phi_n \quad (4.21)$$

alakban, ahol a J a rétegek közötti csatolás erősségét adja meg, és van egy további periodikus tag is. A modellt két réteg esetén vizsgáltam a z futásának figyelembevételével. Az UV skálázás megint az SG modell viselkedését tükrözi. Azt kapjuk analitikusan [101], hogy

$$u = u_\Lambda \left(\frac{k}{\Lambda} \right)^{1/8\pi z} \left(\frac{k^2 + 2J}{\Lambda^2 + 2J} \right)^{1/16\pi z}. \quad (4.22)$$

Nagyon fontos megjegyezni, hogy a $\beta_c^2 = 1/z_c = 16\pi$, kétszerese a hagyományos SG modell Coleman-pontjában kapottnak. A LSG modell az u skálázása alapján két fázist ad, mint az SG modell. Az LSG és SG modellek közötti hasonlóság abból adódik, hogy mindkét modell őrzi a periodikus szimmetriát, ellenben az MSG modell nem. Szükség van az IR tartomány feltérképezésére is, mert nem tudjuk, hogy a J csatolás, amely tömeg dimenziójú, hogyan befolyásolja a modell viselkedését. Egzakt beta függvénnyel követtem az u evolúcióját, a J dimenziós mennyiség nem fejlődik, $J = J_\Lambda$. a hullámfüggvény renormálásnak pedig a térfüggetlen konstans részét hagytam fejlődni. A fázisok a 4.8 ábrán mutatom be. A fázisdiagram 3-dimenziós, azonban a \bar{J} futása triviális, emiatt a szokásos $1/8\pi z$, \bar{u} síkra vetítve mutatom be a trajektóriák futását. Most a trajektóriák metszhetik egymást a J jelenléte miatt. A LSG modell fázisszerkezete az SG modell fázisszerkezetét örökli. Megtalálható a



4.8. ábra. A kétrétegű LSG modell fázisszerkezete, $b = 2$. A betétábrán korrelációs hossz exponense látható, a kapott exponens $\nu \approx 0.57$. Berajzoltam egy egyenest $-1/2$ meredekséggel az összehasonlítás kedvéért.

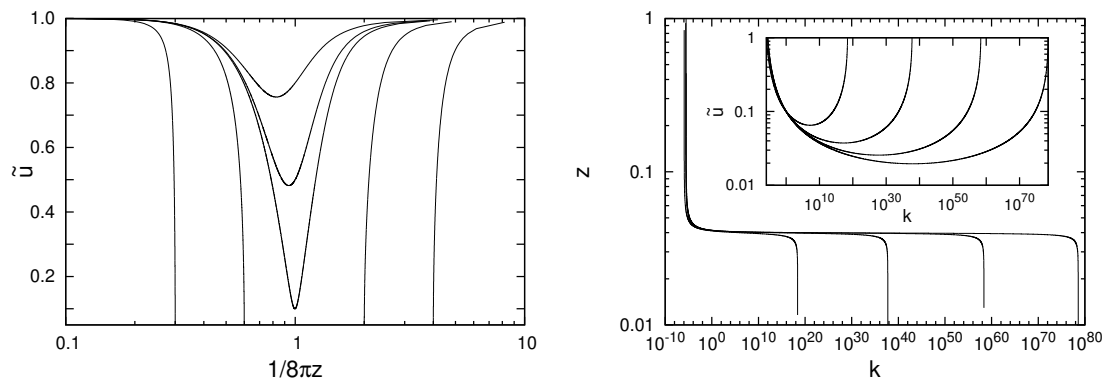
Coleman-pont, ami a szimmetrikus és szimmetriasértett fázisokat választja ketté. Ugyanúgy látható, hogy a szimmetriasértett fázis IR tartományában a trajektóriák egyetlen pontba futnak, ez az IR fixpont. Meghatároztam korrelációs hossz skálázási viselkedését, ami most

$$\log \xi \sim t^{-\nu} \quad (4.23)$$

szerint változik a t redukált hőmérséklet függvényében. A betétábrán a KT típusú fázisátalakulásra jellemző 4.23 egyenletnek megfelelő skálaviselkedést ábrázoltam, az exponensre $\nu \approx 0.57$ adódott.

A LSG modell UV viselkedése azt sejteti, hogy a modell az UV-ben is fixponttal rendelkezik. Visszatérve az SG modellre, a fázisdiagram egy olyan ábráját készítettem el, ahol a vízszintes tengelyen a $1/8\pi z$ logaritmusát vettem. A 4.9 bal ábrán a

csaknem szokásos struktúrát kapjuk, azonban szembetűnő, hogy mennyire hasonlít az UV és az IR viselkedés. Az UV viselkedés meglepő, mert az \tilde{u} irreleváns módon



4.9. ábra. Az SG modell fázisszerkezetének képe látható a bal ábrán. Az $\tilde{u} = 0$ -nál a szokásos fixpontokból álló vonalat látjuk, az $\tilde{u} = 1$ és $z \rightarrow 0$ az IR fixpont, az $\tilde{u} = 1$ és $z \rightarrow \infty$ egy nem-gaussi UV fixpont. A jobb oldali ábrán az \tilde{u} és a z evolúciója látható. Mind az IR, mind az UV tartományban szingularitásba fut az evolúció, azonos k skálán divergál mindkét változó.

skalázik, ezért végtelenbe kellene tartania. Ezzel szemben azt látjuk, hogy $\tilde{u} \rightarrow 1$, ha $k \rightarrow \infty$. Az UV-ben hasonló struktúra alakul ki, mint amilyen az IR-ben az ott talált fixpont következtében kialakult. A 4.9 egyenletek alapján a változók átdefiniálásával az IR-ben sikerült az RG egyenleteket olyan alakúra hozni, hogy láthatóvá váljon az IR fixpont. Ehhez hasonló átalakítást találtam az UV-ben. Ha $\omega = \sqrt{1 - \tilde{u}^2}$, $\zeta = z\omega$ és $\partial_\tau = z\omega^2 k \partial_k$ akkor az evolúciós egyenletek alakja:

$$\begin{aligned} \partial_\tau \omega &= 2\zeta\omega(1 - \omega^2) - \frac{\omega^2}{2\pi}(1 - \omega), \\ \partial_\tau \zeta &= \left(2\zeta^2 - \frac{\zeta}{24\pi}\right)(1 - \omega^2) - \frac{\omega\zeta}{2\pi}(1 - \omega). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Az egyenleteknek a szokásos fixpontokból álló vonal (beleértve a Coleman-pontot is) és az IR fixpont mellett egy új nem-gaussi UV fixpont is megjelenik a $\omega^* = 0$ és $\zeta^* = 0$ pontban. A $z \rightarrow 0$, azaz a kinetikus tag zérushoz tart, a potenciál dominálja a hatást. Ez a bezárás egyik jellemző tulajdonsága. Az SG modell UV viselkedése az aszimptotikusan biztonságos, azaz az UV fixpont következtében nincsenek UV divergenciák. Ennek részletes ismertetése a következő fejezetben található. Az SG modell érdekessége, hogy egyszerre mutat aszimptotikusan szabad és aszimptotikusan biztonságos jelleget.

Meghatároztam az egykomponensű SG modell alacsony és nagyenergiás viselkedését a hullámfüggvény renormálás figyelembevételével. Megmutattam, hogy a modell sértett fázisának IR viselkedése skálázási tulajdonságokat mutat, ezért bevezettem a

IR fixpontot. Meghatároztam a hozzá tartozó korrelációs hossz kritikus exponensét [93]. Megmutattam, hogy az eredmény független a regulátortól [95]. Ráműtattam, hogy az UV és az IR skálázás egyfajta dualitást mutat, azaz az UV-ben is találunk egy nem-triviális fixpontot, ezért az SG modell aszimptotikusan biztonságos [106]. Hasonló analízist végeztem az SG általánosított modelljein is [105]. Megmutattam, hogy az IR skálázás alapján az SG és a réteges SG modell végtelen rendű, az MSG modell pedig másodrendű fázisátalakulást mutat.

4.4. Az $O(N)$ modell infravörös fixpontja

A 3d ϕ^4 modellben már megmutattam, hogy van IR fixpont, de fontosnak tartottam megmutatni, hogy az eredmény sem a modell komponenseinek a számától, sem a dimenziótól nem függ. Célszerű volt a $\rho = \phi^a \phi_a / 2$ változót bevezetni, és a potenciált a

$$\tilde{V} = \sum_{n=2}^N \frac{\lambda_n}{n!} (\rho - \kappa)^n \quad (4.25)$$

alakban parametrizálni. A potenciál minimuma a $\rho = \kappa$ -ban van, ami szintén egy csatolás, annak evolúcióját is követjük. A Wetterich-egyenletet használva, abban Litim-regulátor segítségével kapott RG egyenlet alakja:

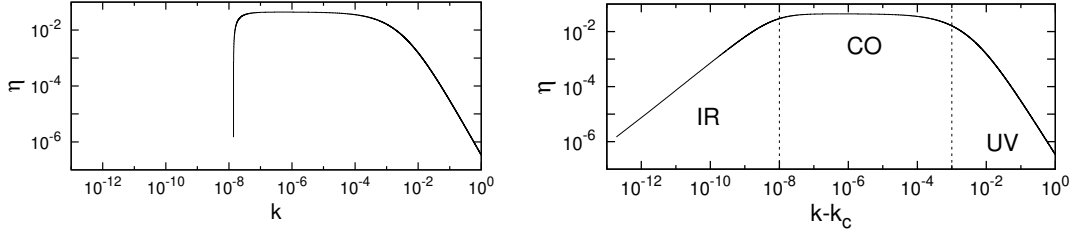
$$k\partial_k \tilde{V} = -d\tilde{V} + (d-2+\eta)\tilde{\rho}\tilde{V}' + \frac{4v_d}{d} \left(1 - \frac{\eta}{d+2}\right) \left(\frac{1}{1+\tilde{V}'} + \frac{N-1}{1+\tilde{V}''}\right), \quad (4.26)$$

ahol $v_d = 1/\Gamma(d/2)2^{d+1}\pi^{d/2}$, $V' = \delta V/\delta\rho$, η pedig az anomális dimenzió. Ebből az első két csatolásra a

$$\begin{aligned} k\partial_k \kappa &= -\kappa + \frac{1}{2\pi^2(1+2\kappa\lambda)^2} \\ k\partial_k \lambda &= -\lambda + \frac{3\lambda^2}{\pi^2(1+2\kappa\lambda)^3} \end{aligned} \quad (4.27)$$

RG egyenletet adódik LPA-ban. Megjegyzem, hogy a vizsgálatom nem konzisztens a szakirodalomban használttal, mert nem feltételezem, hogy $\kappa > 0$. Emiatt a negatív κ már nem követi a potenciál minimumát, azonban a 4.25 egyenletbeli potenciál valós marad, és továbbra is tekinthető a hagyományos ($\kappa = 0$ körüli) alak általánosításának. Természetesen ha a $\kappa > 0$, az garantálja, hogy mindig a minimum körül fejtsük sorba a potenciált. Azzal, hogy megengedem, hogy $\kappa < 0$ is legyen, ismét megjelenhet a spinodális instabilitás.

Ismét átdefiniálom a változókat a $\omega = 1 + 2\kappa\lambda$, $\ell = \lambda/\omega^3$ és $\partial_\tau = k\partial_k/\omega$



4.10. ábra. Az η anomális dimenzió evolúcióját szemléltetem. A bal oldali ábrán a η futása szinguláris k skála függvényében, a jobb oldali ábrán a szingularitás skálázó viselkedésbe megy át, ha a $k - k_c$ skála függvényében ábrázoljuk a futást.

összefüggések szerint. Az új egyenletek alakja:

$$\begin{aligned}\partial_\tau \omega &= 2\omega(1 - \omega) - \frac{\ell\omega}{\pi^2}(3 - 4\omega), \\ \partial_\tau \ell &= \ell(5\omega - 6) + \frac{9\ell^2}{\pi^2}(1 - \omega).\end{aligned}\tag{4.28}$$

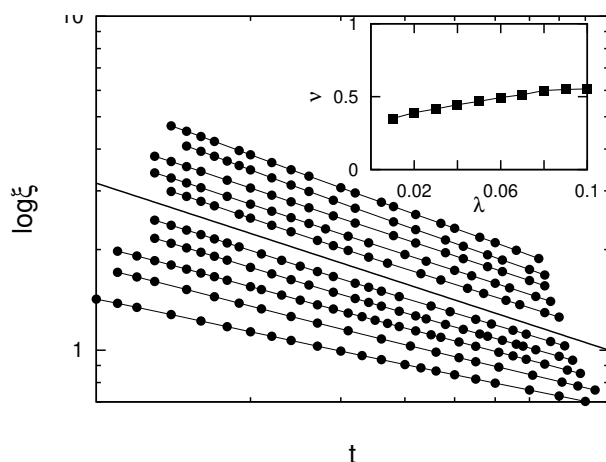
A fixponti egyenletek megadják a GFP-t a ($\ell_G^* = 0, \omega_G^* = 1$) helyen, a WF fixpontot a ($\ell_{WF}^* = \pi^2/3, \omega_{WF}^* = 3/2$) pontban és az IR fixpontot is a ($\ell_{IR}^* = 2\pi^2/3, \omega_{IR}^* = 0$) pontban. A GFP és a WF fixpont ugyanolyan skálázást mutatnak, mint amelyet a közvetlen számításokból kaphatunk. Az új IR fixpont körüli linearizálás egy pozitív és egy nulla skálázó exponenst ad, ami azt mutatja, hogy a fixpont IR vonzó.

Az η anomális dimenzió figyelembevételével (LPA' közelítés) és több csatolással a számolás feljavítható. Az η evolúcióját a 4.10 ábrán mutatom be. Ha a k_c a szingularitás megjelenésének a skálája, és a $k - k_c$ skálán ábrázolom az η futását, azt láthatjuk, hogy három jól elkülönülő skálázási tartomány jelenik meg. Az UV tartományban a GFP irányítja az η fejlődését, hatványfüggvény szerinti skálázást látunk, $\eta_{UV} \sim (k - k_c)^{-2}$. Van egy átmeneti (crossover, CO) skálázási tartomány a $10^{-8} \lesssim k - k_c \lesssim 10^{-4}$ skálatartományban, ahol egy plató jelenik meg, itt az η állandó értéket ad, $\eta_{CO} \approx 0.043$. Ez a WF fixpont közelében megjelenő skálázásnak felel meg. Tovább haladva az evolúcióban az IR tartomány felé, egy harmadik skálázó tartomány is van a $k - k_c \sim 10^{-8}$ skála alatt. A jobb oldali ábrán ez egyszerű szingularitásnak tűnik, de az eltolt $k - k_c$ skála megmutatja, hogy az anomális dimenzió hatványfüggvény szerint változik az IR-ben is a $\eta_{IR} \sim (k - k_c)^1$ szerint. Ezt a skálázási tartományt az IR fixpont indukálja.

Az IR skálázás alapján újra meghatároztam a korrelációs hossz ν exponensét különböző N értékekre, az eredményeket a 4.1 táblázatban foglaltam össze. A WF fixpontonál az RG egyenletek fixpont körüli linearizálásából számolható az exponens, az IR-ben pedig a $\xi = 1/k_c$ azonosítást használva számolhatok. Az eredmények

N	1	2	3	4	10	100
ν_{IR}	0.624	0.666	0.715	0.760	0.883	0.990
ν_{WF}	0.631	0.666	0.704	0.739	0.881	0.990

4.1. táblázat. Az $O(N)$ modell ν kritikus exponensének értékei különböző N -ekre. A táblázatban összevettem a WF és az IR fixpont körül számolt eredményeket.



4.11. ábra. A 2d $O(2)$ modell korrelációs hosszának változása a redukált hőmérséklet függvényében. A skálázás a KT típusú fázisátalakulásnak felel meg. Az ábrán az egyenesek különböző λ kezdeti értékeknek felelnek meg. A betétábrán az egyenesek meredekségét ábrázolom a λ függvényében, ez enyhe változást mutat a $\nu \approx 0.5$ körül.

nagyon jó egyezést mutatnak. Elismételtem a számolást $2 \leq d \leq 4$ dimenziókra is, ott is visszakaptam az irodalmi értékeket.

A 2d $O(2)$ modell esete eltér a tradicionális $O(N)$ modellétől, mert abban végtelen rendű, KT típusú fázisátalakulást találunk [107, 108, 109]. Ebben az esetben is van IR fixponti körüli skálázás annak ellenére, hogy az átmeneti tartományban nincsen fixpont. Az eredményeket a 4.11 ábrán mutatom be. Az IR vizsgálat segítségével visszakapjuk a $\log \xi \sim t^{-\nu}$ skálázást a $\nu \approx 0.5$ körüli exponenssel.

Megtaláltam az IR fixpontot a ϕ^4 elméletben is. Vizsgáltam a d -dimenziós $O(N)$ modellt [110], és megmutattam, hogy nemcsak a 3-dimenziós, másodrendű fázisátalakulást mutató modell tartalmaz IR fixpontot, hanem a 2-dimenziós $O(2)$ modell is, ahol a fázisátalakulás végtelen rendű. Az IR skálázás alapján meghatároztam a korrelációs hosszhoz tartozó kritikus exponenseket, amelyek pontos egyezést mutattak a szakirodalomban ismertekkel.

4.5. Infravörös fixpont további modellekben

Miután megtaláltam az IR fixpontot a periodikus potenciált tartalmazó modellekben és az $O(N)$ modellben is, megnéztem, hogy az RG módszerrel vizsgált modellekben hol található még IR skálázást. Az első a nem-lineáris σ modell (NLSM) volt 3 dimenzióban. A modell egy ϕ leképezés dinamikáját írja le egy \mathcal{M} d -dimenziós sokaságról egy \mathcal{N} N -dimenziós sokaságra. A modell $d = 2$ -ben renormálható és aszimptotikusan szabad [111, 112]. Ha $d > 2$, akkor a modell nem lesz renormálható, a meglévő UV vonzó GFP hiperbolikus fixponttá válik, továbbá egy nem-triviális UV fixpont keletkezik [111], amely aszimptotikusan biztonságossá teszi a modellt. A modell hatása csak derivált kölcsönhatásokat tartalmaz:

$$S = \frac{1}{2}\zeta \int d^d x \partial_\mu \varphi^\alpha \partial^\mu \varphi^\beta h_{\alpha\beta}(\varphi) \quad (4.29)$$

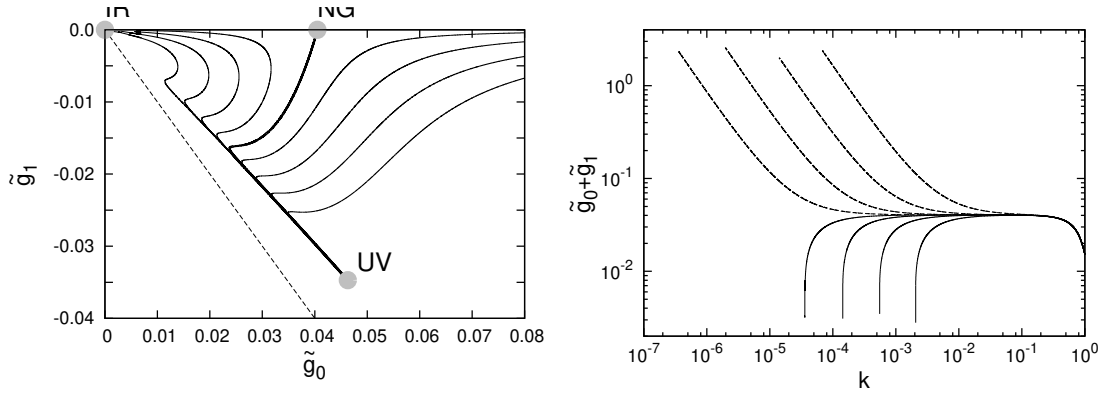
ahol $h_{\alpha\beta}$ dimenziótlan metrika, $\zeta = 1/g_0^2$ amelynek a dimenziója $[g_0] = k^{(2-d)/2}$. Az RG egyenleteket háttértér módszerrel kaphatjuk meg [113]. Ha a 4.29 egyenletben szereplő hatásban több kölcsönhatást veszünk figyelembe, akkor további csatolások jelennek meg a modellben [114]. A β függvények a két csatolás esetén a következő alakot öltik:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{\tilde{g}_0} &= \tilde{g}_0 + \tilde{g}_0(N-2)\tilde{Q}_{d/2,2} + d\tilde{g}_1(N-2)\tilde{Q}_{d/2+1,2}, \\ \tilde{\beta}_{\tilde{g}_1} &= -\tilde{g}_1 + \tilde{g}_1(N-2)\tilde{Q}_{d/2,2}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

ahol

$$\tilde{Q}_{n,l} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(n)} \left(\frac{(2n+2+\partial_t)\tilde{g}_0}{n(n+1)(\tilde{g}_0+\tilde{g}_1)^l} + \frac{2(2n+4+\partial_t)\tilde{g}_1}{n(n+2)(\tilde{g}_0+\tilde{g}_1)^l} \right). \quad (4.31)$$

A NLSM fázisszerkezete a 4.12 ábrán látható. A modellnek két fázisa van, és új fixpontok jelennek meg. A $\tilde{g}_{0NG} = 2/5\pi^2$ és a $\tilde{g}_{1NG} = 0$ értéknél egy hiperbolikus NGFP jelenik meg. A pályákat \tilde{g}_0 irány vonzza az UV felé, a \tilde{g}_1 irány pedig taszítja. A skálázási exponensek: $s_{0NG} = -6/5$ és $s_{1NG} = 2$, amelyből $\nu = 5/6$ -t kapok a kritikus exponensre. Egy további NGFP jelenik meg a $\tilde{g}_{0UV}^* = 16/35\pi^2$ és $\tilde{g}_{1UV}^* = -12/35\pi^2$ helyen, amely UV vonzó az exponensek $s_{0UV} = -0.457$ és $s_{1UV} = -13.11$. Emiatt a 3d NLSM is aszimptotikusan biztonságos elmélet. Egy további hiperbolikus fixpont jelenik meg a 4.12 ábrán látható régiótól távol. A trajektóriák az IR fixpontban a találkoznak a szimmetriasértett fázisban, amely most történetesen a GFP. A 4.12 jobboldali ábráján a csatolások összegének skálázását részletezem. Újra három skálázási tartományt lehet azonosítani. Az UV-ben van egy rövid, releváns skálázás, amelyet az UV NGFP indukál. Ezután a marginálisakká válnak a futások a hiperbolikus NGFP közelében. Az IR tartományban a szimmetrikus fázishoz tartozó trajektóriák k^1 szerint skáláznak. A szimmetriasértett fázisban a



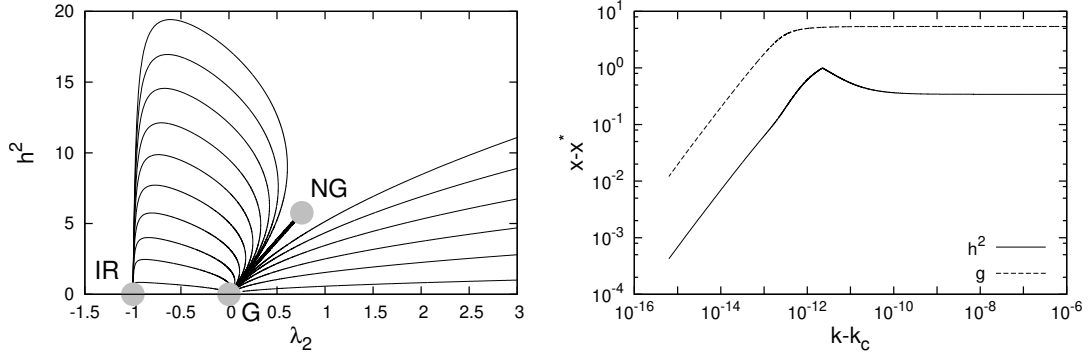
4.12. ábra. A nemlineáris σ modell fázistere látható a bal oldalon. A trajektóriák az UV NGFP közeléből indulnak ki. Azok, amelyek balra tartanak az IR fixpont felé, a szimmetriasértett fázisban vannak, a többi a szimmetrikus fázishoz tartozik. A fixpontokat szürke pontokkal jelölöm, ezek a következők: UV NGFP \rightarrow UV, hiperbolikus NGFP \rightarrow NG, és IR fixpont \rightarrow IR. A szeparátrix az UV és az NG között helyezkedik el, és vastag vonallal jelölöm. Ez utóbbi egy nyeregpont, ami kettéválasztja a fázisokat a modellben. A szaggatott vonal a szingularitás határát mutatja, ahol $\tilde{g}_0 = -\tilde{g}_1$. A jobb oldalon a $\tilde{g}_0 + \tilde{g}_1$ skálázását ábrázoltam, a szaggatott vonalak a szimmetrikus, a folytonosak a szimmetriasértett fázishoz tartoznak.

futások egy k_c skálán élesen nullához tartanak, amit újra a ξ korrelációs hosszal azonosítok. Ebből számolható a ν exponens az IR-ben, ami $\nu = 0.835$ -nek adódik. Ez közel van ahhoz a $\nu = 5/6$ értékhez, amit analitikusan kaphatunk a hiperbolikus NGFP közelében [122].

A Gross-Neveu (GN) modellben is vizsgáltam az IR viselkedést. A modell eredetileg 2-dimenziós, N ízt tartalmaz, és tömegtelen fermionok 4-fermion kölcsönhatását írja le [115]. A 2d modell aszimptotikusan szabad, és többek között alkalmas kristályok alapállapotának meghatározására véges kémiai potenciál esetén [116]. A $d = 3$ esetben a modell már nem aszimptotikusan szabad [117], ettől függetlenül széles körben vizsgált véges hőmérsékleten [118] vagy kémiai potenciálnál [119]. A euklideszi effektív hatás alakja [117]:

$$S[\bar{\psi}, \psi] = \int_x \left[Z_\psi \bar{\psi} i \not{\partial} \psi + \frac{\bar{g}}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2 \right], \quad (4.32)$$

ahol Z_ψ a hullámfüggvény renormálás, $Z_\psi = 1$ LPA-ban. A dimenziótlan g 4-fermion csatolás és a \bar{g} dimenziós csatolás közötti kapcsolat: $g = Z_\psi^{-2} k^{d-2} \bar{g}$. A GN modell részben bozonizált változatában [120, 118, 117] egy hiperbolikus fixpont, és egy UV vonzó GFP jelenik meg. A bozonizált modellben megjelenő skalárpotenciált sorfejtve a λ_2 csatolást tartjuk meg, ami az első nem-triviális tag, emellett a Yukawa



4.13. ábra. A 3d Gross-Neveu modell fázistere látható a bal oldali ábrán. Az IR fixpont felé tartó trajektóriák a szimmetriasértett fázisban vannak, a többi trajektória a szimmetrikus fázishoz tartozik. A fixpontokat szürke pontok jelölik. A fázisok közötti szeparátrixot a vastag vonal jelöli, ami a GFP-t (G-vel jelölve) és a NGFP-t (NG) köti össze. A jobb oldali ábrán csatolások skálázását ábrázoltam, x jelöli h_2 -t és λ_2 -t, az IR fixponti értékek: $h_2^* = 0$ és $\lambda_2^* = -1$. A csatolások az UV-ben konstansok a hiperbolikus NGFP miatt, az IR-ben megjelenik egy új skálázási tartomány is, amelyet a $k - k_c$ eltolt skála segítségével tehetünk láthatóvá.

csatolás evolúcióját követjük [117]. Az evolúciós egyenletek alakja 3d-ban:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_2 &= -2\lambda_2 + \frac{4}{3\pi^2}h^2 + \frac{5}{3\pi^2}h^2\lambda_2, \\ \dot{h}^2 &= -h^2 + \frac{5}{3\pi^2}h^4 + \frac{2h^4(2 + \lambda_2) - \frac{2}{9\pi^2}h^6}{N_f 3\pi^2(1 + \lambda_2)^2}.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Az evolúciós egyenleteknek van egy UV vonzó GFP-ja az origóban $h_G^{2*} = 0$ -nál. Találhatunk egy hiperbolikus NGFP-t a $h_{NG}^{2*} = 5.764$ és $\lambda_{2NG}^* = 0.758$ pontban $N_f = 12$ esetén. A fázisszerkezet a 4.13 ábrán látható. A trajektóriák, amelyek balra vagy jobbra tartanak a modell különböző fázisaihoz tartoznak. Átdefiniálva a csatolásokat a $\omega = 1 + \lambda_2$, $\chi = h^2/\omega$ és $\partial_\tau = \omega\partial_t$ összefüggések alapján az új RG egyenletek alakja [122]:

$$\begin{aligned}\partial_\tau\omega &= 2\omega(1 - \omega) + \frac{\chi\omega^2}{3\pi^2}(5\omega - 1), \\ \partial_\tau\chi &= 2\chi(\omega - 2) + \frac{\chi^2}{18\pi^2}\left(7\omega + 1 - \frac{\chi\omega}{3\pi^2}\right).\end{aligned}\quad (4.34)$$

Az új RG egyenletek három fixponttal rendelkeznek. Az UV fixpont a GFP a $\omega_G^* = 1$ és $\chi_G^* = 0$ pontban van. A NGFP a $\omega_{NG}^* = 1.758$ és a $\chi_{NG}^* = 3.278$ pontban van, a skálázó exponensük valós, ellentétes előjelű. Van egy harmadik fixpont a $\omega_{IR}^* = 0$ és $\chi_{IR}^* = 355.206$ pontban két pozitív sajátértékkel, tehát IR-vonzó, ezt az IR fixponttal azonosítom. A csatolások skálázását a 4.13 jobb oldali ábráján

N	1	2	6	12	50
ν_{IR}	0.922	0.976	0.990	0.996	1.00

4.2. táblázat. A 3d Gross-Neveu modell ν kritikus exponenseinek értéke az N függvényében.

modell	UV	CO	IR
3d ϕ^4 model	gaussi	Wilson-Fisher	IR
3d nem-lineáris σ model	nem-gaussi	nem-gaussi	Gaussi
3d Gross-Neveu model	gaussi	nem-gaussi	IR
2d sine-Gordon model	Gaussi és nem-Gaussi	Kosterlitz-Thouless	Gaussi and IR
4d AB gravitáció	nem-gaussi	gaussi	IR

4.3. táblázat. Modellek és fixpontjaik.

szemléltetem. A csatolások az evolúció kezdetén konstansok, marginálisan skáláznak a hiperbolikus NGFP következtében, azaz $x - x^* \sim (k - k_c)^0$. Az IR tartományban a csatolások szinguláris módon viselkednek, azaz egy bizonyos k_c skálán hirtelen nullává vagy végtelenné válnak. Ha a csatolásokat az eltolt $k - k_c$ skála függvényében ábrázoljuk, akkor az $x - x^* \sim (k - k_c)^1$ szerinti hatványtörvényszerű viselkedést kapunk, ahol x^* a megfelelő fixpontok. Az eredeti g 4-fermion csatolás az IR-ben nullához tart. A korrelációs hossz ν kritikus exponensét is kiszámítottam az IR-ben, az eredményeket a 4.2 táblázatban foglaltam össze. Ezek jó egyezést mutatnak a szakirodalomban fellelhető adatokkal [121].

A következő modell, amit vizsgáltam, az aszimptotikusan biztonságos (AB) gravitáció volt. Megmutattam, hogy a modellben van egy IR fixpont, annak skálázási tulajdonságait is meghatároztam. Az AB gravitáció vizsgálata egy teljesen új kutatási irányt nyitott meg számomra, ennek részleteit a következő fejezetben mutatom be.

A vizsgált aszimptotikusan biztonságos vagy aszimptotikusan szabad modellek fázisszerkezete nagyfokú hasonlóságot mutat. A modellek három fizikailag releváns skálázási tartományra oszthatók. Az UV skálázás az UV fixponttól távolítja el a trajektóriákat az átmeneti fixpont felé, ami hiperbolikus pont. Az átmeneti fixpont kettéválasztja a trajektóriákat, így jelenik meg a modellekben a két fázis. A szimmetriasértett fázisban egy új, IR fixpontot találunk. Az egyes modelleket és a megfelelő fixpontokat a 4.3 táblázatban gyűjtöttem össze. A modellek közötti hasonlóságban újra felismerhetjük a globális renormálás filozófiáját. A modellek egyes skálázási tartományaiban más-más kölcsönhatások válnak relevánssá. Általában igaz, hogy az IR tartomány bír valódi fizikai tartalommal, ennek ellenére az AB gravitációnál az UV skálázás van a figyelem középpontjában, a ϕ^4 modellnél pedig az átmeneti tartomány. A globális kép abban segít bennünket, hogy tudjuk,

az adott energia-tartomány hogyan viszonyul egy adott modell másik skálázási régiójához, vagy akár egy másik modell régióihoz.

Az IR fixpontra kapott eredményeim alapján azt a következtetést vontam le, hogy a skaláris modellek spontán szimmetriasértett fázisában általában egy vonzó IR fixpont található [122]. Megmutattam, hogy a vizsgált modelleknek általános és az AB gravitációéhoz hasonló a fázisszerkezetük: az UV fixpontból induló trajektóriákat az átmeneti fixpont szeparálja, és az IR fixpontba futnak a szimmetriasértett fázisban.

5. fejezet

Aszimptotikusan biztonságos gravitáció alacsony és nagy energián

A gravitáció az alapvető kölcsönhatások egyike. Az elektromágneses, a gyenge és az erős kölcsönhatást sikerült a Standard Modell keretében egységesíteni. Természetes továbblépésnek tűnik, hogy a gravitációval is egyesítsük az elméleteket, azonban ennek sikere még várat magára. A Standard Modellben szereplő kölcsönhatások kvantáltak, ezzel szemben a gravitációs elmélet kvantálásakor nehézségbe ütközünk. A kvantálás után azt a furcsa eredményt kapjuk, hogy a Newton állandó irreleváns, azaz a k skála növelésével a végtelenhez tart. Ez azt mutatja, hogy a gravitációs elmélet nem-renormálható. Mivel a Newton állandó a gravitációban kulcsszerepet játszik, ezért a kvantálásból származó perturbatív skálázás alapján a gravitációs elmélet kvantálása nem működik.

Az irreleváns csatolások nem okozhatnak problémát a funkcionális RG módszerben. Azonban ha az elmélet jóslatokat kísérleti eredményekkel szeretnénk összevetni, akkor komoly nehézségbe ütközünk. A nem-renormálható elméletek minden rendjében új vertexet kell bevezetnünk. A gravitáció minden további nélkül lehet nem-renormálható elmélet. A renormálhatóság egyfajta kutatói kíváncsi, a fizikai modellek eleganciáját mutatja. Másrészt azt is tudjuk, hogy Standard Modell is csak perturbatív módon renormálható, de funkcionálisan nem renormálható, a gravitáció renormálhatósága nyitott kérdés.

Az UV skálán az erős kölcsönhatás csatolása nullához tart, a QCD aszimptotikusan szabad. Ezzel szemben a gravitációs kölcsönhatásnál az UV viselkedés ismerete nagyon fontos. Ennek az az oka, hogy nagy energiákon azt várjuk, hogy az általános relativitáselmélet érvényét veszti, és egy új, feltehetően *kvantumgravitációs* modell

jelenik meg. Amikor elérjük a Planck-skálát, amely

$$M_{Planck} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 10^{19} \text{ GeV}, \quad (5.1)$$

akkor feltételezéseink szerint egyformán fontosak lesznek a kvantum (a \hbar miatt), a relativisztikus (a c miatt) és a gravitációs (a G miatt) effektusok.

A skaláris, fermionikus vagy mértékelméleteket megadhatjuk pályaintegrál formalizmusban, ugyanígy a kvantumgravitációnál is ezt használjuk. A kvantumgravitációnak sok modellje van. A modellalkotást nagyon megnehezíti, hogy nincsenek mérési eredményeink a Planck skálán, amelyekre támaszkodhatnánk. A sok modell egyike az aszimptotikusan biztonságos gravitáció, amely az RG módszeren alapszik [123]. A kvantumgravitációban az a nehézség, hogy a téridő geometriája határozza meg a dinamikát, a használni kívánt kvantumtérelméletet azonban adott metrikán fogalmazzuk meg. Ezt a problémát az AB gravitáció modellje át tudja hidalni olyan módon, hogy feltételezzük, hogy létezik egy klasszikus háttértér, és ehhez a háttértérhez adjuk hozzá a metrika fluktuációt, ezek lesznek a pályaintegrál változói. Bizonyos elméletekben nem vezetnek be háttérteret, azonban a kvantumtér helyett ezekben új matematikai objektumokat szükséges bevezetni, ezekre példa a háromszögelt tér vagy a spin-hab. A rögzített háttértér jelenlétében számolt eredmények függenek a választott háttér választásától, de ettől a függéstől megszabadulhatunk, ha nem rögzítjük a háttérteret, hanem egy további feltételt vezetünk be, amely szerint a metrika fluktuációjának várható értéke legyen nulla.

A GFP az UV-ben egy tömegetlen szabad elmülethez tartozik, ezért aszimptotikusan szabadnak nevezzük. Ezzel szemben a kvantumgravitáció UV fixpontja nem szabad, hanem egy kölcsönható elmülethez tartozik [124]. A kölcsönható UV fixponttal rendelkező elméleteket aszimptotikusan biztonságosnak (asymptotically safe, AB) nevezzük, mert a fixpont divergenciamentessé teszi az elméletet, mintegy megvédi, biztonságossá teszi azt a divergenciáktól. Az aszimptotikusan biztonságos gravitációt röviden AB gravitációnak hívjuk. A Standard Modellben lévő terek szerepét a téridőt jellemző metrika veszi át az AB gravitációban, a fizikai állandók pedig skálafüggő csatolásokká válnak. Az általános relativitáselmélet két fontos paramétere a Newton-állandó és a kozmológiai állandó is skálafüggő lesz, csatolásokká válnak.

A gravitációs kölcsönhatás a négy alapvető kölcsönhatás egyike, a tömeggel rendelkező testek vagy részecskék között hat. A newtoni általános tömegvonzási törvényt leíró potenciális energia alakja

$$V = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (5.2)$$

ahol m_1 és m_2 a testek tömege, r a távolság, a G pedig a Newton-állandót jelöli, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$. A newtoni elmélet nagyon sikeres a Hold Föld körüli

keringésének vagy a Naprendszer mozgásának megértésében. Ugyanakkor nem tudja megmagyarázni a Merkúr perihélium-vándorlását, ami az elmélet érvényességi határát mutatja. Az általános relativitáselmélet ad szélesebb elméleti keretet arra, hogy a gravitációs kölcsönhatás szélesebb tömeg-, vagy energia-, illetve távolságskálán adjon pontosabb leírást a newtoni elméletnél. A relativitáselmélet Einstein-Hilbert (EH) hatásának alakja:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g}(2\Lambda - R), \quad (5.3)$$

amelyből a származtatott mozgásegyenlet az Einstein egyenlet:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

A $g_{\mu\nu}$ a metrikus tenzor, a $R_{\mu\nu}$ a Ricci tenzor, g a metrika determinánsának abszolút értéke, $T_{\mu\nu}$ pedig az energiaimpulzus-tenzor. Az Einstein egyenlet kifejezi, hogy a tömeges részecskék kölcsönhatását a téridő görbülete okozza, amely ezáltal dinamikai változóvá válik.

A Λ kozmológiai állandóval értéke $\Lambda \approx 10^{-52}\text{m}^{-2}$, ez a hatás görbület független tagja, a másik a görbületben lineáris. A hatás a térváltozót, jelen esetben a metrikát és deriváltjait tartalmazza. Az Einstein-Hilbert hatás diffeomorfizmus invariáns, emiatt, ugyanúgy, mint a mértékelméletek esetén, a hatáshoz hozzávesszük a mértékrögzítést, és a megfelelő Faddeev-Popov szellemtagokat és forrástagokat. Az AB gravitációra többnyire Wetterich-egyenletet alkalmazzák, de van példa WH-egyenletre [125] vagy a valódi idejű (proper time, PT, [126, 127]) egyenletre [128]. Az evolúciós egyenletek alakja 4-dimenzióban a Litim-regulátort használva:

$$\begin{aligned} k\partial_k\lambda &= (-2 + \eta)\lambda + \frac{g}{8\pi} \left(20\ell - 16 - \frac{10}{3}\eta\ell \right), \\ k\partial_k g &= (2 + \eta)g, \end{aligned} \quad (5.5)$$

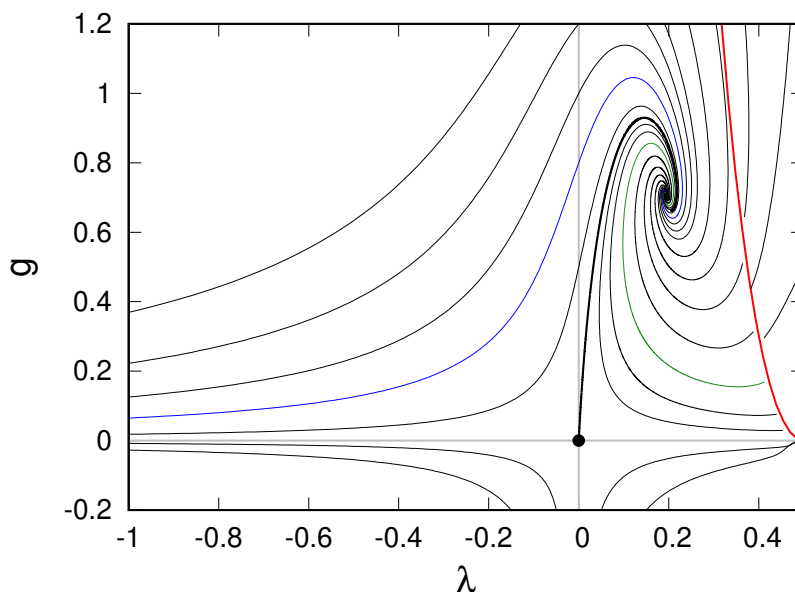
ahol bevezettük a dimenziótlan csatolásokat, $\lambda = \Lambda k^{-2}$, $g = Gk^2$, és az anomális dimenziót,

$$\eta = \frac{g(5\ell - 9\ell - 7)}{3\pi \left(1 + \frac{g}{12\pi} (5\ell - 6\ell^2) \right)}, \quad (5.6)$$

továbbá $\ell = 1/(1 - 2\lambda)$.

5.1. A Reuter-fixpont

Az evolúciós egyenleteket megoldva a csatolások terében ábrázolva a fázisteret, a 5.1. ábrát kapjuk. Az elméletnek két fixpontja van, a GFP mellett van egy nem-gaussi



5.1. ábra. Az aszimptotikusan biztonságos gravitáció fázisterét ábrázoltam [129]. A fekete pontok a gaussi és a Reuter-fixpont helyét jelzik. Vörös vonal jelöli az η szinguláris helyeit. A zöld trajektória egy gyenge, a kék pedig egy erős csatolású fázisbeli trajektóriát jelöl. A vörös vonalon az anomális dimenzió divergál. A vastag fekete vonal a szeparátrixot jelöli. Az ábra [130] alapján készült.

is, amit a felfedezőjéről Reuter-fixpontnak nevezünk [6]. Az RG módszer ezzel óriási sikert aratott a kvantumgravitációs elméletek között, és magának a módszer fejlődésének is nagy lendületet adott. A Reuter-fixpont struktúrája olyan, hogy UV irány felé haladva a spirál mentén halad a trajektória a fixpontba.

A fázistér másik fixpontja a GFP, ami jelen esetben egy nyeregpont. A negatív előjelű Λ -k felé tartó trajektóriák az erős csatolású fázishoz tartoznak, a metrika a Minkowski-metrikához tart. A gyenge csatolású fázisban a futó kozmológiai állandó pozitív, és az evolúció véges k skálán leáll, továbbá a metrika várható értéke nullához tart, degenerált. A gyenge csatolású fázisban találjuk meg a világunknak megfelelő, jelen méréseink által ismert, G és Λ paramétereket, amelyek megfelelnek a klasszikus általános relativitáselméletben szereplő értékeknek. A ma ismert világunk 10^{-70} távolságra van a gaussi fixponttól k^2 egységben mérve. Ez azt is mutatja, hogy a gyenge csatolású fázis releváns fizikailag, mert itt találjuk azt a trajektóriát, amelyeken a mi világunk paraméterei találhatóak. Ezt a trajektóriát a Planck skáláról, a Reuter-fixpont közvetlen közeléből kiindulva a G és Λ kezdeti értékeinek finomhangolásával találhatjuk meg.

Maga a fázisszerkezet rokonítható a $3d \phi^4$ modellének fázisszerkezetével, ezt a 4.3 táblázatban -más modellekkel együtt- foglaltam össze. Az ϕ^4 modellben az

UV GFP, az itteni UV Reuter-fixpontnak felel meg, ebből kiindulva érhetjük el a modell nyeregponjtát, ami az AB gravitációban a GFP, ϕ^4 -ben a WF fixpont. A nyeregponjt két fázisra osztja a fázisteret, ahol az egyikben a szingularitásba fut az evolúció. Az IR tartományban talált szingularitásnak szintén van a ϕ^4 modellben analógiája, hiszen a szimmetriasértett fázisban a trajektóriák ott is a spinodális instabilitásba futnak, és véges skálán leállnak.

Azok a trajektóriák, amelyekre $\Lambda < 0$, az erős csatolású fázishoz tartoznak, itt a metrika a Minkowski-metrikához tart. Eltér az AB gravitáció az ϕ^4 modelltől abból a szempontból, hogy a gyenge csatolású fázisban a metrika várható értéke nulla, míg az ϕ^4 modellben az ennek megfelelő spontán szimmetriasértett fázisban a tér várható értéke véges, az erős csatolású fázisban pedig véges a metrika várható értéke, ellentétben az ϕ^4 modell szimmetrikus fáziséval, ahol a tér várható értéke nulla.

A 2-dimenziós modellben a Reuter és a gaussi fixpont egybeesik, ezek $2 + \epsilon$ dimenzióban szétváltnak. Az $O(N)$ modellben $d = 4 - \epsilon$ -ban láthatunk hasonlót, ott a GFP és a WF fixpont válik szét. A $2 + \epsilon$ -dimenziós AB gravitációs modell perturbatív módon vizsgálható, ez az eredmény adta Weinbergnek az ötletet, hogy feltegye, van $d = 4$ dimenzióban is egy vonzó fixpont.

A fázistérnek vannak olyan tartományai is, amelyek a jelenlegi tudásunk szerint fizikailag nem relevánsak. Ilyen a negatív Newton-állandóra vonatkozó evolúció, vagy ilyenek az η szingularitását elérő trajektóriák, amelyek nagy λ értékek felől érkeznek.

Az AB gravitáció sokféle kiterjesztését vizsgálják az RG módszerrel. Az EH hatást további tagok egészítik ki, és vizsgálják, hogy az elmélet aszimptotikusan biztonságos marad-e, azaz megmarad-e a Reuter-fixpont. A bővítés egyik lehetséges iránya a metrikus tenzor magasabb hatványát tartalmazó diffeomorfizmus-invariáns tagok figyelembevétele a vizsgálatokban. Ezek jellemzően a görbület vagy a Ricci tenzor hatványait tartalmazó tagok, vagy ezeknek egzotikus kombinációja. Az EH hatás bővítésének másik iránya az anyagi terek hozzáadása. Ez azért fontos, mert az általános relativitáselmélet megtanított bennünket arra, hogy a gravitáció és az anyag egymástól függetlenül nem létezik. A kiterjesztés Standard Modell részecskéit veszi figyelembe. Az eddigi eredmények azt mutatják, hogy a kiterjesztett modellek is aszimptotikusan biztonságosak, tartalmazzák a Reuter-fixpontot.

Az AB gravitáció, a Reuter-fixpont megtalálása, az RG módszer egyik legfontosabb eredménye. Sajnos a kísérleti igazolás szinte lehetetlen, ezért nem tudjuk eldönteni, hogy a számos elmélet közül, amely a gravitáció és a kvantumelmélet egyesítését tűzte ki célul, vajon melyik lesz helyes.

5.1.1. Az aszimptotikusan biztonságos gravitáció infravörös viselkedése

Az AB gravitáció a gyenge csatolású fázisban az IR-ben szingularitásba fut. A skaláris modellben kapott eredményeim alapján azt gondoltam, hogy a fázis szintén egy IR fixpontot rejt. Az EH hatás nem fejthető ki a potenciál minimumában, emiatt nem kerülhető el szingularitás. Az IR viselkedés ismerete pedig közelebb vihet bennünket az alacsony energiás, klasszikushoz közeli modellhez. Megjegyzem, hogy az általános relativitáselméletnek megfelelő klasszikus elmélet a GFP-hoz van közel.

A g -re és λ -ra vonatkozó evolúciós egyenletek egyik alakja d dimenzióban [131]:

$$\begin{aligned}\partial_t \lambda &= -2\lambda + \frac{g}{2}d(d+2)(d+5) - d(d+2)\frac{g}{2}\frac{(d-1)g + \frac{1-4\lambda(1-1/d)}{d-2}}{g-g_b}, \\ \partial_t g &= (d-2)g + \frac{(d+2)g^2}{g-g_b}\end{aligned}\quad (5.7)$$

ahol $g_b = (1-2\lambda)^2/2(d-2)$. Szintén bevezetjük az $\eta = (d+2)g/(g-g_b)$ gravitációs anomális dimenziót. Ha $d = 4$, akkor a (5.7) egyenleteknek két fixpontja van. A Reuter-féle fixpontot a $g^* = 1/64$ és $\lambda^* = 1/4$ koordinátánál találjuk meg. A másik fixpont a GFP. A skálázó exponensek: $s_1 = -2$ és $s_2 = 2$. A negatív exponens reciprokából a korrelációs hossz exponense $\nu = 1/2$. A GFP átmeneti fixpont az UV és IR tartományok között. A Reuter-fixpontot és a GFP-t a szeparátrix köti össze. A gyenge csatolású fázisban a trajektóriák szingularitásba futnak. Skaláris elméletekhez hasonlóan feltételeztem, hogy a szingularitás mögött egy IR fixpont található. Ezt a fázisdiagram is előjelzi. A ϕ^4 modellel ellentétben a szingularitás nem egy pontra korlátozódik, hanem egy vonalra, az 5.1 ábrán az η szingularitását jelölő vonalra. Az IR fixpont skálázását azonban csak egyetlen pontban számoltam, mert az átskálázás egy fixpontot ad a modellben. Megjegyzem, hogy az 5.7 egyenlet nem egyezik meg az 5.5 egyenletekkel, a háttértér módszer alkalmazási módja, a fluktuációkra vonatkozó előírás, stb., más-más egyenleteket ad, azonban a fixpont struktúra nem változik.

Bevezetve a $\chi = 1 - 2\lambda$, $\omega = 4g - (1 - 2\lambda)^2$ új változókat és az új $\partial_\tau = \omega\partial_t$ renormálási időt, az evolúciós egyenletek alakja a következő lesz:

$$\begin{aligned}\partial_\tau \chi &= -4\omega + 2\chi\omega(8 + 21\chi) + 24\omega^2 + 6\chi^2(3\chi(\chi + 1) - 1), \\ \partial_\tau \omega &= 8\omega^2(1 - 6\chi) - 2\chi(42\chi^2 + 9\chi - 4) - 6\chi^3(\chi(6\chi + 5) - 2).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Ennek az egyenletrendszernek már három fixpontja van. A GFP a $\omega_G^* = -1$, $\chi_G^* = 1$ pontban található, és nyeregpontnak adódik. A Reuter-fixpont a $\omega_{UV}^* = -3/16$ és $\chi_{UV}^* = 1/2$ pontban van. Az újdonság, hogy megjelenik egy IR fixpont is a $\omega_{IR}^* = 0$ and $\chi_{IR}^* = 0$ pontban. Visszatranszformálva az eredeti változókbba a $g_{IR}^* = 0$ és

$\lambda_{IR}^* = 1/2$ fixpontot kapjuk. Az IR fixpont marginálisan gyenge vonzó jellegű. Hasonló tulajdonságú IR fixpontot találtam egyéb térelméleti modellekben, ezt az előző fejezetben részletesen elemeztem.

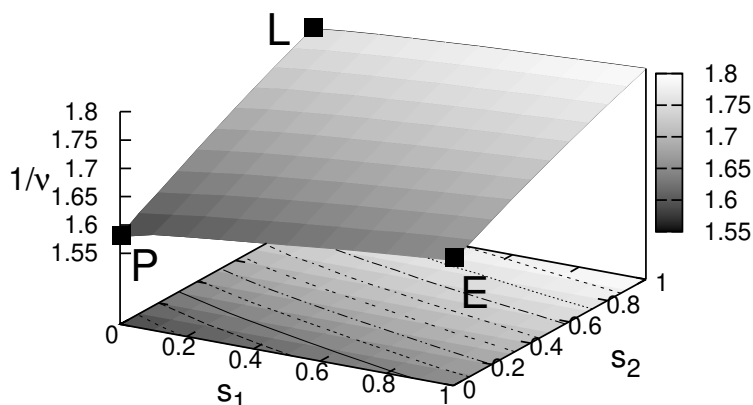
Vizsgáltam a korrelációs hossz ν exponensét az IR tartományban. Különböző kiterjesztések a modellben úgy jelennek meg, mint a V potenciálhoz adott más-más tagok, mindezekre számoltam a ν exponensét. Azt tapasztaltam, hogy a V^2 vagy $V \ln V$ kiegészítéssel számolt exponens $\nu = 1/2$, és folytonos a fázisátalakulás. Ezzel szemben, ha a hozzáadott tag $V^{1/2}$ alakú, akkor a modellben eltűnik a GFP fixpont és egy határozott k_c skálán leáll az evolúció, amely elsőrendű fázisátalakulásra utal. Hasonló elsőrendű fázisátalakulást látunk a Coleman-Weinberg modellben is. Az eredmények azt mutatják, hogy az AB gravitáció az IR skálázás alapján is másodrendű fázisátalakulást mutat. Az IR skálázás alapján véve az átmeneti GFP skálázását örökli. Az egyetlen kiterjesztés, amely elsőrendű átalakulásra utal, nem tartalmaz átmeneti fixpontot.

Elsőként a szakirodalomban megmutattam, hogy az AB gravitáció szimmetriasértett fázisában megjelenő szinguláris viselkedés egy újabb fixpontot rejt [132], ez az IR fixpont. A fixpont IR vonzó, jellemzően egyik irányban vonzó, másik irányban marginális. Megmutattam, hogy az IR fixpont alapján az AB gravitációban másodrendű fázisátalakulás van, azonban bizonyos kiterjesztések elsőrendű fázisátalakulást adnak.

5.2. Kritikus exponensek az aszimptotikusan biztonságos gravitációban

A Reuter-fixpont az AB gravitáció legfontosabb eredménye. A fixpont UV vonzó (IR taszító), vagyis IR irányban a csatolások távolodnak a fixponti értéktől. Ahogy az 5.1 ábrából is látszik, a távolodás spirális alakban történik. A fixpont környezetében linearizálva az evolúciós egyenleteket, a kapott stabilitásmátrix sajátértékei a $\theta_{1,2}^{UV} = -\theta' \pm i\theta''$ alakban írhatók. A valós rész negatív előjele jelzi, hogy a fixpont IR taszító, a sajátérték komplex formája pedig a fázisszerkezetet spirális jellegét tükrözi. A korrelációs hossz kritikus exponensét szokásos módon a sajátérték (negatív) reciprokaként azonosítom, $\nu = 1/\theta'$. Azt a kérdést tettem fel, hogy az exponens hogyan függ a választott regulátortól?

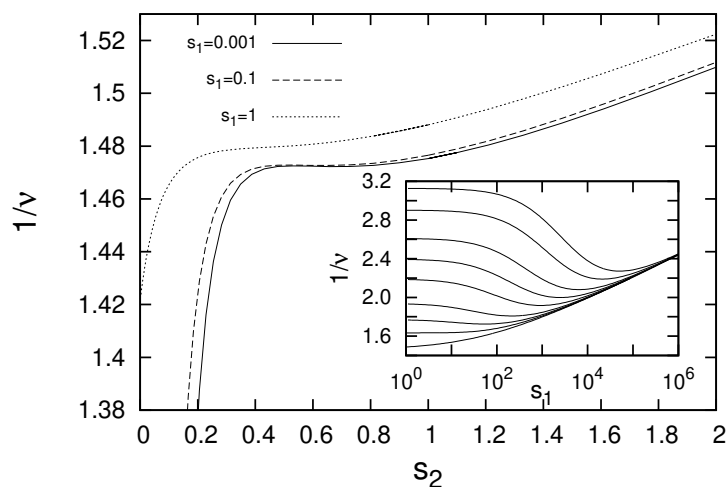
Ismét a 3.8 egyenletbeli css regulátort használtam. Kiszámoltam a fixpont helyét és az exponensek értékét a QEG-ben $d = 4$ esetén. Az 5.2 ábrán ábrázoltam, hogy a ν reciproka hogyan függ a css paramétereiktől. Az ábrán a nevezetes regulátoroknak megfelelő határeseteket is feltüntettem. Az optimalizáláshoz keresem az $1/\nu$ szélsőértékét az s_1 , s_2 és b függvényében. A s_1 és s_2 paraméterekben monoton növekvő az $1/\nu$. Az $1/\nu$ minimuma az $s_1 = s_2 = 0$ határértéknél van, ha $b = 3$. Az exponens a b növelésével nő, ezért egy lokális szélsőértéket kapok $b = 1$ -nél. Az



5.2. ábra. Az ν exponens reciprokát számoltam a css paraméterekre, $b = 3$ értéket választva. Az $1/\nu$ értéke az $s_1 = s_2 = 0$ saroknál a **P**ower law, hatványfüggvény regulátorral, az $s_1 = 0, s_2 = 1$ saroknál a **L**itim regulátorral, az $s_1 = 1, s_2 = 0$ saroknál pedig az **E**xponenciális regulátorral számolt értékeknek felel meg.

$1/\nu$ értéket a Litim-határértéknél ($s_1 \rightarrow 0$ -ra) számoltam ki s_2 különböző értékeire ezt az 5.3 ábrán mutatom be $b = 1$ esetén. A Wetterich-egyenlet a regulátor skálafüggésén alapszik, ezért a fizikai eredmények regulátorfüggését elengedhetetlen vizsgálni. Különböző regularizációs módszerek ismertek a szakirodalomban. Az optimalizált regulátornak azt nevezzük, amellyel az evolúció a leggyorsabb, azaz a legnagyobb k értékre érjük el az IR csatolási értékeket. Analitikusan megmutatható, hogy ez a fajta optimalizálási eljárás LPA-ban a Litim-regulátorra vezet [4, 133]. Ugyanakkor az eljárást nem sikerült még a hullámfüggvény renormálás esetére sem általánosítani. Egy másik lehetséges megfontolás lehet megvizsgálni, hogy a kapott fizikai eredmények mennyire függenek a regulátor paramétereitől. Amennyiben a számolt mennyiségnek szélső értéke van a paraméterterben, akkor azt a regulátort fogadjuk el optimálisnak. Ezt az eljárást nevezzük a minimális érzékenység elvének (principle of minimal sensitivity, PMS) [134]. Az elv előnye, hogy bármilyen modellben jól használható eljárást ad. Hátránya, hogy nincs garancia arra, hogy találunk optimális regulátort. Úgy tűnik, hogy sajnálatos módon az optimalizálás csak az $O(N)$ modellekben működik elfogadható módon.

A ν exponens optimalizálását elvégezték az $O(N)$ modellre [135, 136, 137, 43], és elfogadható konvergenciát kaptak a gradiens kifejtés magasabb hatványait véve. Ezzel szemben az AB gravitációnál nem tudunk olyan regulátort választani, amely bármilyen szempontból optimális lenne. A 5.3 ábra alapján azt láthatjuk, hogy még lokális minimumot sem találunk a paraméterterben. Sőt, ennél rosszabb a helyzet:



5.3. ábra. Az $1/\nu$ exponens értéke css regulátor paramétereinek függvényében. A betétábrán a görbék az $s_2 = 1, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000$ értékeknek felel meg alulról felfelé. Itt a $b = 1$ értéket választottam.

a regulátor megfelelő választásával akármilyen kritikus exponens kapható. Bizonyos regulátorok esetén az exponens előjele is megváltozhat. Mivel a vizsgált regulátorok megfelelnek a regulátortól elvárt minden feltételnek, nincs okunk kizárni egyik paraméterhez tartozó regulátort sem a vizsgálatból.

Az eredmény ugyan csak az EH hatás két csatolását teszi figyelembe, illetve a regulátorok ugyan nagyon széles, de semmiképpen sem teljes halmazát tartalmazza, de amit kaptam, az aggasztó. Az eddigi optimalizálási módszerek semmilyen megszorítást nem adnak a regulátorra, azonban az lényegében nem ad jóslatot az exponens értékére. Egy inflexiós pontot találhatunk a

$$r_{opt} = \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2} \right) \theta \left(1 - \frac{y}{2} \right) \quad (5.9)$$

regulátornál, ami egy módosított Litim-regulátor. Ez azt sugallja, hogy a tradicionális értelemben vett optimális regulátort kapom meg. Ez sajnos azonban nem felel meg a minimális érzékenység kritériumának, másrészt a rácsszimulációkból ismert $1/\nu = 3$ irodalmi érték felét kapjuk: $1/\nu \approx 1.472$ [138, 139]. A css paraméterek $b = 1$, $s_1 = 251$ és $s_2 = 1000$ választásával ez az exponens is megkapható. Ezek szerint az optimális regulátort úgy is lehet keresni, hogy azt a regulátort választjuk, amelyiknél a keresett fizikai mennyiség (máshonnan ismert) értékét visszkapjuk. Ez az eljárás akkor lenne használható, ha mindig ugyanazt a regulátort kapnánk vissza, de már az AB gravitációban sem kapjuk vissza a Litim-regulátort. Mondhatjuk azt, hogy az AB gravitáció a nagy hullámfüggvény renormálási érték miatt

($Z = 2$) nem tekinthető LPA közelítésnek, de valójában itt a Z nem a gradiens kifejtés első nem-triviális rendjét adja, hanem a háttértér módszerből adódik.

Ha a görbület magasabb hatványát vesszük figyelembe [140], akkor sem javul a helyzet, az exponens értékére nagyon széles tartományt kapunk. Ez azt mutatja, hogy nem a görbület magasabb hatványain múlik az eredmény.

Azt gondolom, hogy amit kaptam, az egyrészt az optimalizációs eljárások korlátait mutatja meg, azaz nincs semmilyen garanciánk arra, hogy regulátorfüggetlen eredményt kapjunk. Másrészt pedig, az eredmény a Wetterich-egyenlet használatának korlátait feszegeti. Az a naiv kép, miszerint az IR-ben kapott effektív potenciál regulátorfüggetlen, nem lehet helyes. Ennek oka, hogy az állítás a Wetterich-egyenlet egzakt megoldására vonatkozik (és ott sem bizonyították), itt pedig a görbületben kifejtettünk, továbbá a Reuter-fixpont az UV-ben van, ezért ott regulátorfüggetlenség nem is várható. Megjegyzem, hogy amennyiben a WH-egyenlettel számoljuk az exponenst, akkor $1/\nu \approx 2.7$ -t kapunk, ami az irodalmi értékhez közeli becslést ad.

A WH-egyenlet használata visszaszorult a Wetterich-egyenlet térnyerésével, azonban azt gondolom, hogy ez eredményem rámutat a Wetterich-egyenlet néhány hiányosságára. A legfontosabb, hogy a Wetterich-egyenletben a regulátor bevezetése miatt a módusokat nem a fizikai diszperziós relációikkal vesszük figyelembe, hanem attól eltérővel:

$$k^2 + U''' \rightarrow k^2 + U'' + R. \quad (5.10)$$

Ezzel pont az eliminált módusok diszperzióját változtatjuk meg a legnagyobb mértékben. A WH-egyenletben minden módus a helyes diszperzióval szerepel. Ez akár az oka is lehet a Wetterich-egyenlettel kapott bizonytalan eredményeknek. További problémát okozhat az RG egyenlet UV irányba vett használata, mert a Wetterich-egyenletben az impulzusintegrált szokásos módon UV-tól IR-ig kell elvégezni, a Reuter-fixpont keresésekor viszont két UV skála között kell integrálnunk, ahol mindkét skála messze van az IR skálától. A WH-egyenletben a módusok jól definiált eliminációjánál a két UV skála közötti blokkosítás minden további nélkül megtehető.

Ezek az eredmények azt mutatták számomra, hogy a Wetterich-egyenlet ugyan alkalmas a gradiens kifejtés magasabb rendjeinek kezelésére, mégis a WH-egyenlet ad fizikailag megbízhatóbb eredményeket. Emiatt a későbbi kutatásaimban fokozatosan áttértem a WH-egyenlet használatára.

Az AB gravitáció modelljében meghatároztam a Reuter-fixponthoz tartozó korrelációs hossz kritikus exponensét a regulátorok egy széles halmazán [89]. Megmutattam, hogy a ϕ^4 modellel ellentétben nincs optimális regulátor. A regulátorok megengedik, hogy akár a fixpont jellege is megváltozzon, amelyből azt a következtetést vontam le, hogy az AB gravitáció modellje lényegében tetszőleges jóslatot adhat.

5.3. Konform redukált aszimptotikusan biztonságos gravitáció

Az AB gravitáció pályaintegrálja a metrikára vonatkozik, a hatás pedig a görbület hatványait, illetve deriváltjainak hatványait tartalmazza. A számolás nagyon hosszadalmas, nehéz, ezért ha lehetőségünk van egyszerűsíteni a tárgyalást, azt érdemes megtennünk. A gravitáció konform redukált modelljében a metrikát egy konform faktor és egy rögzített metrika szorzataként írjuk fel:

$$g_{\mu\nu} = \phi^{4/(d-2)} \hat{g}_{\mu\nu}. \quad (5.11)$$

Kiindulva az 5.3 egyenletbeli d -dimenziós euklideszi EH hatásból, amely még a metrikát tartalmazza, mint változót az

$$S_{EH}[\phi] = -\frac{3}{4\pi G} \int_x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{12} \hat{R} \phi^2 - \frac{\Lambda}{6} \phi^4 \right\} \quad (5.12)$$

ϕ -függő hatást kapjuk 4d-ban, ahol \hat{R} a görbület a referenciametrikán. Azt kapjuk, hogy az AB gravitáció konform redukált formája egy skalármodellt ad, emiatt a modell sokkal egyszerűbb. A kinetikus tag előjele ellentétes a szokásos előjelhez képest, emiatt a hatás alulról nem korlátos, mert egy gyorsan változó tér deriváltja tetszőlegesen nagy lehet. Ezt nevezik konform faktor instabilitásnak. Megmutatható, hogy a konform redukált AB gravitáció (KRG) aszimptotikusan biztonságos, és az eredeti változókkal megfogalmazott modellel ekvivalens fázisteret mutat [141, 142, 143, 144, 145, 146]. A skalárteret felbontjuk a

$$\phi = \chi_B + f \quad (5.13)$$

összegre. A $\chi_B =$ a háttértér, konstansnak tételezzük fel, az f pedig a háttértér körüli fluktuációkat gyűjti össze. Az új változóiban a hatás alakja:

$$S_k[f; \chi_B] = -Z \int_x \sqrt{\hat{g}} \left\{ -\frac{1}{2} f \hat{\square} f + \frac{1}{12} \hat{R} (\chi_B + f)^2 - \frac{\Lambda}{6} (\chi_B + f)^4 \right\}. \quad (5.14)$$

Bevezettük a $Z = \frac{3}{4\pi G}$ hullámfüggvény renormálást, és a $-\hat{\square}$ Beltrami-Laplace operátort, amelynek az alakja függ a szignatúrától. Különválaszthatjuk az idő szerinti deriválást a tér szerinti deriválástól:

$$-\hat{\square} = -\partial_0^2 - \hat{\Delta}. \quad (5.15)$$

Euklideszi téridőben mindkét tagnak azonos az előjele. A szétválasztás segít abban, ha az idő- (vagy frekvencia) változót külön kezeljük, ez alkalmas hengersizmetrikus

geometria tárgyalására is. Amennyiben Lorentz szignatúrát szeretnénk használni, a Beltrami operátort a

$$-\hat{\square} = \partial_0^2 - \hat{\Delta} \quad (5.16)$$

alakban írjuk. A regulátort a Beltrami operátor eltolásával vesszük figyelembe:

$$-\bar{\square} \Rightarrow -\bar{\square} + k^2 R^{(0)} \left(\frac{-\hat{\square}}{k^2 \chi_B^2} \right), \quad (5.17)$$

ahol $\hat{\square} = \chi_B^2 \bar{\square}$ [13, 147]. Azt feltételezzük, hogy a referenciametrika hengersizmetrikus geometria esetén

$$(\hat{g}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{h} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

szerkezetű, ahol \hat{h}_{ij} nem függ az x^0 koordinátától. A referenciametrika alakja azt mutatja, hogy a téridőt hiperfelületekkel fóliázzuk a Σ_t ($t = x^0$) szerint a $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ normálvektorral. A külső görbületet nullán tartjuk, ezért a 4- és 3-dimenziós görbület, ami a referenciametrikához tartozik, megegyezik [148].

5.3.1. A konform redukált gravitáció bilokális hatással

A KRG modellt a WH-egyenlet keretében vizsgáltam először, mert arra voltam kíváncsi, hogy a blokkosított hatás segítségével is megkapom-e az AB gravitáció szokásos fázisstruktúráját. A nehézséget a hullámfüggvény renormálás bevezetése okozza. A WH-egyenletet eredetileg gömbszimmetrikus rendszerekre fogalmazták meg. Kiderült azonban, hogy a gradiens kifejtés jól használható, ha hengersizmetrikus rendszeren végezzük el a blokkosítást. Egy RG lépés egy henger felületén szereplő módusokat érinti. A frekvencia irányba eső módusokat kiintegrálom, csak a térbeli impulzus irányban végzem a blokkosítást. A hengersizmetria a későbbiekben lehetőséget ad majd arra is, hogy Lorentz-szignatúrában is vizsgáljam a problémát.

A KRG modellben kiszámolom η anomális dimenziót, amelyet a potenciálból és a kinetikus tagból származtatok. Egy RG blokkosítási lépés az eliminált módusoknál egy nem-triviális nyeregpontra indukál, amely a potenciál nem-lokális tagjaihoz ad járulékot [15, 16], emiatt a számolásban bevezettem egy bilokális potenciált. Meghatároztam a Reuter-fixpont helyét és skálázó exponenseit. A számítást gömb(s) és hengersizmetrikus (c) esetekre számoltam ki, az anomális dimenziót pedig a kinetikus (k), illetve a potenciál (p) evolúciójából származtattam. A legegyszerűbb

(s,p) esetre az evolúciós egyenletek alakja:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= -(2 - \eta)\lambda - g4\pi\alpha_d \ln(1 - 2\lambda) + \zeta_d \\ \dot{g} &= (d - 2 + \eta)g \\ \eta &= -g \frac{4\pi\alpha_d}{3} \frac{1}{1 - 2\lambda},\end{aligned}\tag{5.19}$$

a ζ_d egy dimenziótól függő konstans. Az 5.19 egyenletek a WH-egyenletnek megfelelő evolúciót szolgáltatják d dimenzióban. Ezek összhangban vannak a Wetterich-egyenletben, éles levágással kapott egyenletekkel [149]. Itt η az $\eta_p^{(s)}$ anomális dimenzióknak felel meg, általános definíciója:

$$\eta = \frac{\dot{G}}{G}.\tag{5.20}$$

Az eredményeket az 5.1 táblázatban foglaltam össze. A számítást úgy is lehet

séma	g^*	λ^*	$\Re(s)$	$\Im(s)$
$\eta_p^{(s)}$	5.62	0.43	-2.71	4.73
$\eta_p^{(c)}$	7.77	0.43	-0.65	3.58
$\eta_k^{(s)}$	9.04	0.25	-7.15	1.28
$\eta_k^{(c)}$	4.67	0.11	-5.09; -0.19	-

5.1. táblázat. A Reuter-fixpont helyének és a skálázó exponensének értékei különböző anomális dimenziók esetén. Az exponensek komplexek, kivéve a (c,k) esetet.

tekinteni, mint a sémafüggést a WH-egyenletre. A térgeometria megválasztása tükrözi a fizikai rendszer szimmetriáját, ennek ellenére sem a fixpont helye, sem az exponensek nem mutat erős sémafüggést.

A konform redukált AB gravitációban meghatároztam a modell fázisszerkezetét úgy, hogy figyelembe vettem a WH-egyenlet által generált nem-lokális tagokat [125]. Kiszámoltam az anomális dimenziót különböző sémákban. Meghatároztam a Reuter-fixpont helyét és az exponenseket. Megmutattam, hogy a nem-lokális tag releváns, ugyanúgy helyesen adja vissza a Reuter-fixpontot és exponenseit. Az eredmény azt mutatja, hogy a lokális hatás gradiens kifejtéséből származó anomális dimenzió, és a nem-lokális tagból származó összeegyeztethető.

5.3.2. A konform redukált gravitáció Lorentz szignatúrával

A KRG modell egyszerűsége segítségre lehet további új eljárások kidolgozásában. A modell alkalmas arra, hogy a gravitációt Lorentz szignatúrával tárgyaljuk.

A kvantumtérelmélet euklideszi formalizmusát az motiválta, hogy a generáló funkcionál pályaintegrálja és a statisztikus fizika partíciós függvénye nagyfokú hasonlóságot mutat, ez utóbbi viszont természetesen euklideszi téridőben van megfogalmazva. Az euklideszi formalizmus matematikailag könnyebben kezelhetővé teszi a pályaintegrálokat, azonban a fizikai folyamatok, főleg a gravitáció vizsgálata elengedhetetlenné teszi a Lorentz szignatúra használatát. A Wick-rotáció elvileg kapcsolatot teremt az euklideszi és a Lorentz szignatúra között, azonban amikor zárjuk a kontúrt a forgatáskor, egy olyan járulék jelenik meg az integrálban, ami sérti a Lorentz invarianciát, igaz csak infinitezimális mértékben.

A lorentzi esetben egy egyszerű propagátornak tömeghég szingularitása van, azaz egy bizonyos véges négyes-momentumnál szingulárisává válik, ami alapvető fontosságúvá válhat. A Wick-rotáció után a propagátor tömeghéja eltűnik, emiatt ezek a járulékok elveszni látszanak. Ugyanez a probléma felmerülhet az RG-módszerben is, ahol a felöltöztetett propagátorok megjelennek az evolúciós egyenletek funkcionális alakjában. Ez azt jelenti, hogy az RG egyenleteknek a Lorentz szignatúrában egy tömeghég (on-shell) és egy tömeghéjon kívüli (off-shell) részt kell tartalmaznia. Fontos hangsúlyozni, hogy a tömeghég szingularitás nem csak valamilyen matematikai melléktermék, amelyet el kell távolítani, mert az a valódi részecskék miatt jelenik meg. Az euklideszi tárgyalásban csak a virtuális részecskékhez tartozó off-shell gerjesztések járulnak hozzá az evolúcióhoz, az on-shell járulékok hiányoznak. Az on-shell járulékok egy további problémát vet fel. A valódi részecskék lokálisak az impulzusban, ami azt jelenti, hogy nem lokálisak a koordinátában. Emiatt nem-lokális tagot vagyunk kénytelenek bevezetni a hatásba [150, 151, 15, 152]. Az euklideszi formalizmusban a lokális hatás használható. Mindenképpen fontos azonban leszögeznünk, hogy az euklideszi formalizmus nem teljes, a lorentzi szignatúrát kell használnunk.

Az AB gravitáció euklideszi formalizmusban kapott eredményei nagy előrelépést jelentettek a gravitáció kvantálásában, és nagy lendületet adtak az RG módszernek is. A kezdeti sikerek után egyre nagyobb érdeklődés mutatkozott a gravitációs kölcsönhatás és a megfelelő RG-egyenletek a Lorentz-féle szignatúrával történő megfogalmazása iránt. Különböző megközelítéseket vizsgáltak, pl. az oksági halmazok módszere [153, 7], az Arnowitt-Deser-Misner (ADM)-féle dekompozíció [9, 154, 155, 156, 157, 158, 159], ahol az időirányt integráljuk ki, vagy a téridő fóliázás használata, amely megőrzi a háttér diffeomorfizmus szimmetriáját [160].

A Lorentz szignatúra használatának egyik lehetséges módja az RG módszerben, hogy a blokkosítás során kiintegrált d -dimenziós, k sugarú és Δk vastagságú hipergömb héját egy d -dimenziós hiperboloid Δk vastagságú hipersíkjára cseréljük. Erre azért van szükség, mert a Lorentz szignatúrában, a Minkowski-téridőben az azonos hosszúságú vektorok hiperboloidon helyezkednek el. Az elgondolás súlyos hibája, hogy a hipersíkok végtelen nagy felületet adnak, ezért egy RG lépés végtelen térfogatú impulzustér-részt eliminál. Az ilyen típusú blokkosítás további regulari-

zációkat igényelne, ez viszont a sérti a Lorentz-invarianciát. További problémát jelent, hogy a k RG skála akár negatív is lehet, ekkor a nulla impulzuson keresztül kellene blokkolnunk, ami nem lehetséges, mert ott nem teljesül a $\Delta k/k \ll 1$ feltétel. Egy lehetséges kiskapu lehetne a problémára, hogy a $|k^2|$ invariáns hossza vonatkozó módusokat elimináljuk, azonban fizikailag nehéz az ilyen típusú RG skála értelmezése.

Úgy tűnik, hogy nem tudjuk megtartani az RG módszerben a Lorentz szimmetriát. Sőt, a mikroszkopikus (UV) skálából a makroszkopikus (IR) skálába történő evolúció gondolatában a $3d$ távolság szerepel, ami nem Lorentz invariáns. A megfontolásból az is látszik, hogy nem is lehet az RG módszert Lorentz invariánssá tenni. Ha ez így van, akkor viszont egyszerűbb egy nem invariáns RG skálát definiálni, amelyet viszont cserében könnyebben lehet kezelni. Egyik lehetőség az, hogy a négyesimpulzus-vektorban leválasztjuk a frekvenciát a $3d$ térbeli impulzusoktól, és a k RG skálát a $3d$ térbeli impulzusok nagyságaként definiáljuk. Elvégezzük a frekvenciaintegrált az evolúciós egyenletekben, és a fennmaradó β függvények csak a térbeli impulzusoktól fognak függeni. A munkámban ezzel a technikával származtattam a Wetterich-egyenletet [148]. Ez alapjában véve egy ADM-dekompozíciószerű módszer, ahol az idő (vagy a hozzá tartozó frekvencia) irányhoz tartozó módusokat szeparáltan kezeljük.

A formalizmus sérti a gömbszimmetriát, helyette hengeres szimmetriánk van. Emiatt érdemes megvizsgálni, hogy a hengersizimmetria milyen következményekkel jár, ezért három levezetésre van szükségünk. Az első a $4d$ számítás megismétlése gömbszimmetrikus euklideszi téridőben. Ezután vizsgálni kell az RG evolúciót egy euklideszi hengersizimmetrikus rendszer esetén, ahol az egyik impulzus összetevőt integráljuk ki. Végül a Lorentz-szimmetrikus modellt tárgyaljuk, amely szintén hengeres geometriájú. Minden esetben kiszámítottam a Reuter-fixponthoz tartozó ν kritikus exponenst, továbbá vizsgáltam az eredmények regulátorfüggését is. A kapott eredményeket az 5.2 táblázatban foglaltam össze. A táblázat azt mutatja, hogy a KRG modell regulátortól függetlenül tartalmazza a Reuter-fixpontot, igaz az exponens értéke (az eredeti AB gravitációs modellben kapottakhoz hasonlóan) nagymértékben változhat a regulátor paramétereinek függvényében. A css regulátort használva újra számolhatjuk az s_1, s_2 síkon adott b -re a ν exponenst. Ez megint erős függést mutat. Jelen táblázatban csak néhány nevezetes regulátorhoz tartozó eredményt tüntettem fel.

Emellett számoltam az éles levágással kapott evolúciót is a Wetterich-egyenletre. Ezzel az volt a célom, hogy később összehasonlítsam ezt az esetet a WH-egyenletben kapott eredményekkel. Látszólag a Wetterich-egyenlet éles levágással megegyezik a WH-egyenlettel, azonban ez távolról sem igaz. Előbbi esetben a kijelölt hurokintegrált a k_Λ, k intervallumon végezzük el, majd egy "blokkítási lépés" után pedig a $k_\Lambda, k - \Delta k$ intervallumon. Ezzel szemben a WH-egyenletben valóban a k skálán szereplő csatolásokból származtatjuk a $k - \Delta k$ skálához tartozó csatoláso-

Szignatúra	R	b	g^*	λ^*	θ'	θ''
Euklideszi	Litim	1	2.6776	0.413398	1.47122	9.30442
	Litim	2	2.60252	0.460511	7.87679	7.79822
	Exp.	2	1.84031	0.636067	3.94478	9.10336
	Hatványfv.	2	1.32287	0.829843	3.40539	10.4214
	Éles		1.97025	0.479998	31.5447, 6.55266	0
Lorentz	Litim	1	6.76028	0.449782	4.44505	11.6619
	Éles		4.77643	0.496293	38.6719, 14.966	0

5.2. táblázat. A KRG modell Reuter-fixpontjának helye és a skálázó exponens értéke euklideszi és Lorentz szignatúra esetén néhány regulátorra.

kat. Azon túl, hogy a két megközelítés az előző okfejtés alapján nem ugyanúgy definiálja a csatolásokat, az evolúciós egyenletek is eltérnek. Az éles levágáshoz tartozó regulátor használata a Wetterich-egyenletben divergens tagokat ad a beta függvényekhez, ami további regularizációt igényelhet [161]. Az éles levágás nem feltétlenül regularizál, ezért nem is szerencsés használni a Wetterich-egyenletben. Ezzel szemben a WH-egyenletben a hipergömb felületek integrálása mindig véges járulékot ad az evolúcióhoz, nincsenek divergens tagok. További fontos eredmény, hogy a hengersizmetrikus téridő geometria nem befolyásolja a Reuter-fixpont létét. Ez nagy szerencse, mert akkor eljárhatunk úgy, hogy a frekvenciaváltozót a térimpulzusoktól külön kezeljük.

A Wetterich-egyenletnél megjelenő divergens járulékok regularizálása nagyon összetett probléma. Naivan azt mondhatnánk, hogy ha egy adott modellnél úgy távolítjuk el az éles levágás regulátora okozta divergenciát, hogy visszkapjuk a hagyományos értelemben jól működő regulátorral kapott eredményeket, akkor megoldottuk a problémát. Ezt a gondolatmenetet követi a [161] munka. Azonban ez csak renormalizálható elméletekben igaz. Általában jellemző a Wetterich-egyenlet alkalmazására, hogy olyan modelleket vizsgálunk vele, ahol csak releváns csatolások vannak. Ez súlyos hiányosság, a renormálás fontos alapismérve, hogy tetszőleges csatolás evolúcióját legyen képes követni. A szakirodalomban sajnálatos módon csak elvétve akad olyan munka, ahol irreleváns csatolások evolúcióját követik. Ezzel redukáljuk a funkcionális módszert a perturbatív renormálás alkalmazási körére. Az irreleváns csatolások azért dobják ki, mert az IR-ben kihálnak, azonban a bevezetésben említett globális RG kép igényli az irreleváns csatolások követését is, hiszen a csatolások releváns-irreleváns osztályozása egy adott fixpont közelében értelmezett, másik fixpontban változhat. Ennek fényében valóban naiv dolog bármilyen diver-

gens tag elhagyása az egyenletekből. További nehézség az AB gravitációban, hogy ott a Reuter-fixpont az UV-ben van, emiatt az irreleváns csatolások ott azonnal problémát okoznak. Egyetlen irreleváns csatolás elmosná a Reuter-fixpontot, ami az aszimptotikus biztonság végét jelentené. Megjegyzem, hogy a fizikai kép emellett szól, mert a Planck skálán új fizika megjelenését várjuk, ami egy irreleváns csatolás segítségével jelenhet csak meg.

A gondolatmenet arra is utal, hogy a korábban említett Lorentz-invariáns RG evolúciónál kapott hiperboloid-felületek végesítése szintén fontos fizikai effektusokat is elmoshat, emiatt is kerülendő.

Egy új eljárást dolgoztam ki, amelynek a segítségével Lorentz szignatúrában sikerült a konform redukált AB gravitáció modelljét feltérképeznem. Az időirányt kiintegrálva és a maradék térimpulzusokban blokkosítva különböző regulátorok esetén meghatároztam a Reuter-fixpont helyzetét és az exponenseket. A munka lehetővé tette, hogy a hagyományos euklideszi formalizmus helyett a fizikailag sokkal relevánsabb Lorentz szignatúrát használva vizsgáljam a modellt [148].

5.3.3. Lorentz-invariancia a konform redukált gravitációban

A konform redukált gravitáció egyszerűsége lehetőséget ad arra is, hogy a modell Lorentz szimmetriáját vizsgáljam. Ehhez a következőképpen módosítottam az effektív hatást:

$$\Gamma_k[\bar{f}; \chi_B] = -Z_k \int_x \sqrt{\hat{g}} \left\{ -\frac{1}{2} \bar{f} \hat{\square} \bar{f} + \frac{c}{12} \hat{R} (\chi_B + \bar{f})^2 - \frac{\Lambda}{6} (\chi_B + \bar{f})^4 \right\}. \quad (5.21)$$

Az \bar{f} a tér várható értékének normált alakja. Bevezettem a c csatolást, amely a görbület első hatványát szorozza, ha $c = 1$, akkor visszkapjuk a hagyományos két csatolásos KRG modellt. Hengerszimmetrikus esetben, a Lorentz szignatúrát használva a Beltrami operátor alakja:

$$-\hat{\square} = W \partial_0^2 - \hat{\Delta}. \quad (5.22)$$

Az időderivált egy új, W csatolással szorzódik, ami egyfajta hullámfüggvény renormálásnak fogható fel kizárólag az időirányban. A k skála fejlődésével W is fejlődik. Ha $W \neq 1$, akkor sérül a Lorentz szimmetria. Ezzel két új csatolást vezettem be a szokásos g és λ mellé. A Wetterich-egyenletet használva az evolúciós egyenletek a

következő alakot öltik:

$$\begin{aligned}
 \dot{g}' &= (2 + \eta)g' - \frac{5g'^2\lambda^2(2g'\lambda^2 - 9(1 - 2\lambda)^{7/2}\pi)}{81(1 - 2\lambda)^7\pi^2} \\
 \dot{\lambda} &= (-2 + \eta)\lambda - \frac{g'(\eta - 5)}{15\pi^{5/2}(1 - 2\lambda)^{1/2}} \\
 \dot{W} &= \eta W - \frac{g'\lambda^2 W(\eta - 5)}{9\pi(1 - 2\lambda)^{7/2}} \\
 \dot{c} &= \eta c - g' \frac{c(\eta - 5) - 5(\eta - 3)(1 - 2\lambda)}{90\pi^{5/2}(1 - 2\lambda)^{3/2}}, \tag{5.23}
 \end{aligned}$$

ahol bevezettük a $g' = g/W^{1/2}$ jelölést, továbbá

$$\eta = -\frac{10\lambda^2 g'}{9\pi(1 - 2\lambda)^{7/2}} \tag{5.24}$$

4d-ban.

5.3.3.1. Ultraibolya skálázás

Azért célszerű bevezetni a g' jelölést, mert akkor az 5.23 első két egyenlete lecsatolódik a második két egyenletről. A g' és a λ beta függvényei alapján a Reuter-Reuter-fixpontfixpont a $g'^* = 25.4$ és $\lambda^* = 0.21$ helyen található, $s_{1,2}^r = -5.16 \pm i6.17$ exponensekkel. Az r felső index a Reuter-fixpontra vonatkozik. A c az átskálázástól függetlenül lecsatolódik a többi egyenletről, a fixponti értéke $c^* = -0.25$, $s_3^r = -2.35$ exponenssel. A W fixpont értéke $W^* = 0$, $s_4^r = -0.62$. Az exponensek valós részei negatívak, ami azt jelenti, hogy a csatolások az UV tartományban relevánsak. A komplex konjugált exponens-pár a szokásos spirális pályákat eredményezi a g, λ síkon. A két új csatolás az UV tartományban relevánsnak bizonyul, ezért az elmélet renormálható marad. A Reuter-fixpont a két új csatolás bevezetésével is létezik. Megtaláljuk a GFP-t is, ami azt biztosítja, hogy a modellnek két fázisa van. A λ csatolás előjele szerint megkülönböztethetünk egy szimmetrikus fázist, ahol az IR limeszben $\lambda < 0$. A másik, a szimmetriasértett fázis, a trajektóriákon a λ pozitív értékeket vesz fel.

A szimmetriasértett fázisban a $\lambda = 0.5$ -nél a 3. fejezetben részletesen ismertetett szingularitásba fut a trajektória. Hasonlóan az SG vagy az AB gravitáció eredeti modelljéhez, a szingularitás itt sem kerülhető el a potenciál minimumban történő kifejtésével.

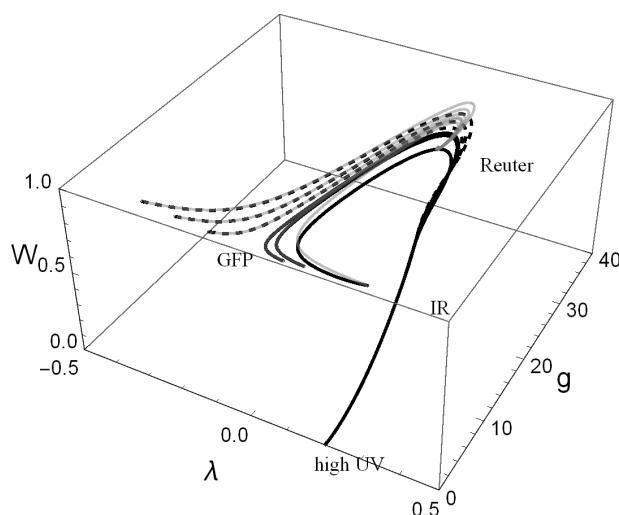
A következő ábrákon a numerikus eredményeket ábrázoltam a $t = k\partial_k$ függvényében. A pozitív értékek az UV felé haladnak, a negatívak az IR felé. A két fázis csak az IR-ben mutat eltérést, az UV-ben nem lehet azokat megkülönböztetni. Ahol lehetséges, az UV és az IR skálázást együtt ábrázoltam.

Az evolúciót a GFP közeléből indítottam. Mint említettem korábban, a jelenlegi világunk a GFP-hoz közel található, ahol jó közelítéssel használható a sík Minkowski-tér, ezért kezdetben pl. $W = 1$ értéket választottam, de emellett más kezdeti értékeket is használtam.

A Reuter-fixpontot mutató fázistér alakja megegyezik az 5.1 ábrán látott struktúrával, ha a λ , g' csatolásokat veszem. A GFP fixpontnál a skálázó exponenseket a csatolások dimenziója határozza meg: $s_\lambda^G = 2$, $s_{g'}^G = -2$, $s_c^G = 0$, $s_W^G = 0$.

5.3.3.2. A Lorentz-szimmetria sérülése

Bár a g' bevezetésével sikerült elrejteni a W hatását, ez a csatolás az, amelyik információt adhat a Lorentz-szimmetriáról. A Newton csatolás g -ról g' -ra történő átskálázása tekinthető olyan módon, hogy a Lorentz-szimmetria megmarad az evolúció során, és visszakapjuk a tradicionális eredményeket. Ha visszatérünk az eredeti g csatoláshoz, akkor a fázisszerkezet megváltozik. Az 5.4 ábrán mutatom be a fázisdiagramot a 3d fázistérben, amelynek függőleges tengelye a W .

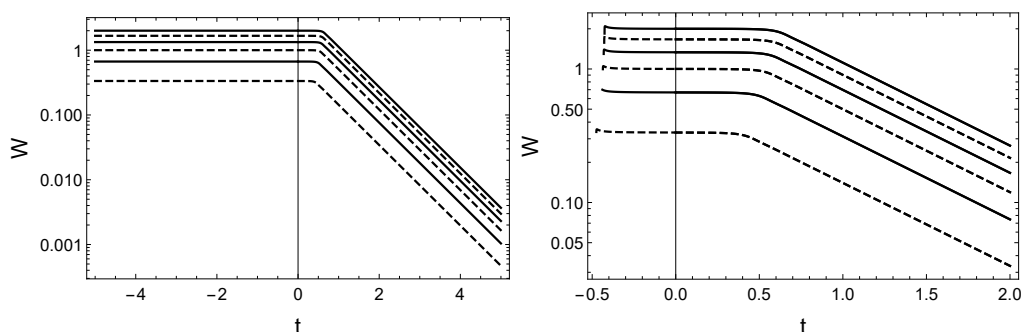


5.4. ábra. A $\lambda - g - W$ fázisdiagramot ábrázoltam. Az ábra azt szemlélteti, hogyan változik a Reuter-fixpont az ultraibolya tartományban a W csatolás miatt. Az 5.1 egyenlethez tartozó pályákat a $\lambda - g$ síkban a $W = 1$ csatolás értéknél szürke görbékkel ábrázoltam. A balra haladó fekete trajektóriák a szimmetrikus fázishoz tartoznak (szaggatott vonalak), a többi görbe a szimmetriasértett fázis része (folytonos vonalak). Az UV irányban egy új fixpont jelenik meg.

Az ábra azt mutatja, hogy a Lorentz-szimmetria sérül, ha az UV skála nagyon magas. Azt kaptam, hogy a hagyományos Reuter-fixponton túlmegy az evolúció, és új fixpont jelenik meg. A W evolúcióját az 5.5 ábrán mutatom be. Az ábrán jól látható, hogyan fejlődik a W csatolás. Az evolúció kezdetén megtartja a $W = 1$ értékét, azonban az RG skála egy bizonyos értékénél csökkenni kezd, az UV limesz-

ben nullához tart, ahogy a g is. Ez azt jelenti, hogy a Reuter-fixpont szigorúan véve eltűnik a modelltől. Az 5.4 ábra vízszintes metszetei az AB gravitáció hagyományos fázisképét mutatja W más-más rögzített értékeire. Az egyes metszetek tartalmazzák a Reuter-fixpontot. Úgy is vehetjük, hogy a Reuter-fixpont vándorol a fázistérben a W fejlődésének következtében.

A Reuter-fixpont alapvető jelentőségű az AB gravitációban, mert renormálhatóvá teszi az elméletet, azonban a létezése nem teszi lehetővé, hogy az UV-ben az elmélet tovább fejlődjön. Ez megakadályozza az új fizika megjelenését a Planck-skála környékén, továbbá a Lorentz-szimmetria sérülését nagy energiákon. A W figyelembevétele orvosolhatja ezt a problémát. A Reuter-fixpont W miatti vándorlása lehetővé teszi számunkra, hogy új releváns csatolásokat találjunk, ezáltal új fizika jelenhet meg, és a Lorentz-szimmetria sérülését is megtalálhatjuk.



5.5. ábra. A bal oldali ábra a W evolúcióját mutatja a szimmetrikus fázisban. Az UV limeszben a csatolás nullához tart, az IR limeszben állandó marad, ott megőrződik a Lorentz-szimmetria. A $W(k_i) = W_i$ kezdeti értékek alulról felfelé a következők: $1/3$, $2/3$, 1 , $4/3$, $5/3$, 2 . A jobb oldali ábra a W evolúcióját mutatja a szimmetriasértett fázisban ugyanezekkel a kezdeti feltételekkel. Az UV-skálázás nem változik, nullához tart a W , azonban az IR-ben egy átmeneti tartomány után, ahol konstans a W , a szingularitásnál hirtelen nullába esik az értéke, újabb Lorentzszimmetria-sértést mutatva.

Az 5.5 ábrán látjuk, hogy a W értéke az evolúció során a kezdeti értékeitől függetlenül az UV irányban csökken, és nullához tart. Ez azt jelenti, hogy a csatolással együtt a hatás időderiváltat tartalmazó tagja is nullához tart. A Lorentz-szimmetria az UV tartományban oly módon sérül, hogy egy statikus rendszer jön létre. A W evolúcióját bemutató 5.5 ábrán azt is láthatjuk, hogy a W skálázása körülbelül a $t_l \approx 0.5$ skálán megváltozik, amit a Lorentzszimmetria-sértés skálájával azonosítok. A többi csatolás csak közel állandó t_l -nél, emiatt az evolúció nem tud befagyni. Ez a kis eltérés az állandó értéktől elegendő ahhoz, hogy az evolúció túlhaladja a Reuter-fixpontot, és az UV-ben attól eltérő képet lássunk. A hagyományos Reuter-fixpont lenyomata megmarad rögzített W -nél, (lásd az 5.4 ábra szürke görbéit).

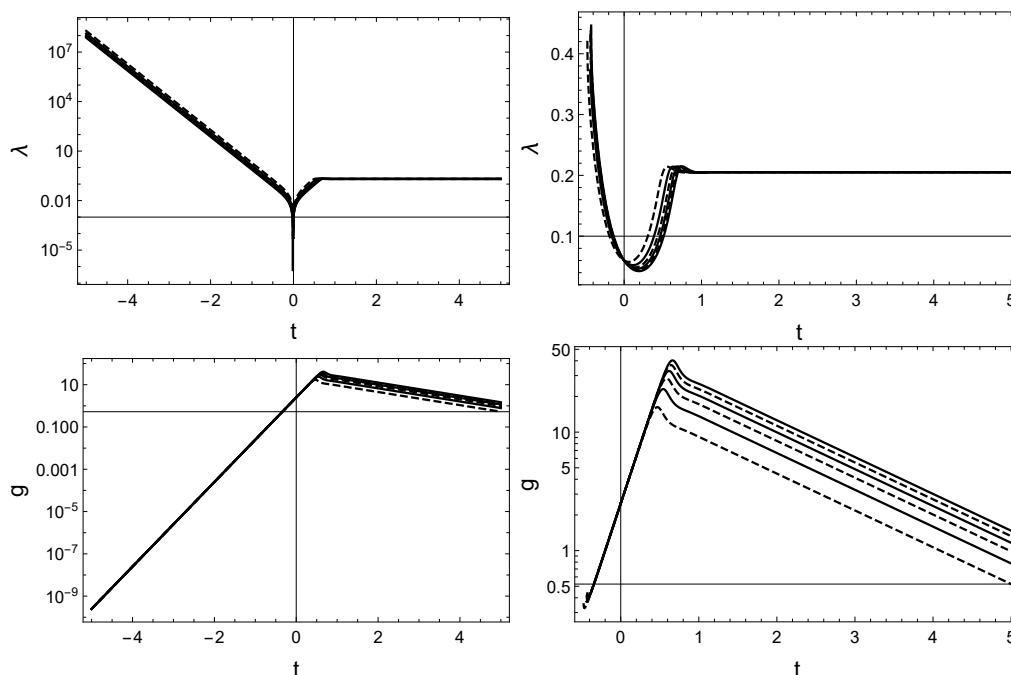
Az 5.23 egyenletbeli RG egyenletek szerint a nem-gaussi fixpont a $g^* = 0$, $\lambda^* = 0.2$, $c^* = -0.25$ és $W^* = 0$ értékeknél található. Az eredmény azt mutatja,

hogy a Newton csatolás nulla, és ebben az értelemben a fixpont (a λ^* véges értéktől eltekintve) gaussinak tekinthető, mivel az elmélet kölcsönhatásmentes. Ez azt jelenti, hogy a fixpont körül a gravitáció gyengének tekinthető, így a perturbatív renormálás működhet. Az eredmény szerint a GFP környezetében a perturbatív renormálás nem alkalmazható, mert a g irreleváns, a kvantumgravitáció renormálhatóvá tételéhez a nem-perturbatív RG módszerre volt szükségünk, azonban UV-ben ismét megjelenik a perturbatív renormálhatóság. Az új fixpont a hatásban lévő időbeli és térbeli deriváltak anizotrópiájának következménye. Hasonló ötlet jelenik meg a Horava-Lifshitz-gravitációban [162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169], ahol az anizotrópia a tér- és időirányú deriváltak eltérő számán keresztül kerül bevezetésre. Ezen túl a Horava-gravitáció majdnem pontosan ugyanezen a helyen talál fixpontot. Megállapíthatjuk, hogy az anizotrópia a fixpontot nem-gaussiból gaussivá alakíthatja, illetve az AB gravitációt aszimptotikusan biztonságos elméletből aszimptotikusan szabad elméletté változtathatja.

5.3.3.3. Infravörös evolúció

A W fejlődése azt mutatja, hogy az IR-ben megőrzi a GFP közelében vett kezdeti értékét a szimmetrikus fázisban, tehát ez a fázis őrzi a Lorentz-szimmetriát. A GFP-ből tekintve az UV és az IR irányban is van az RG skálának egy széles tartománya, ahol a W konstans marad, marginális az evolúciója. Ez azért fontos, mert tudjuk, hogy az RG módszer Lorentzszimmetria-sértő, azonban a W konstans volta arról győzhet meg bennünket, hogy a blokkosításból származó szimmetriasértés elhanyagolható, ezért azok a változások, amit a W -ben látunk az UV-ben és az IR-ben, már nem az RG módszer miatt jelennek meg, hanem valódi szimmetriasértésnek lehet azokat tekinteni. A szimmetriasértett fázis IR irányában sokáig nem sérül a Lorentz-szimmetria, azonban szingularitás közvetlen közelében ismét sérül.

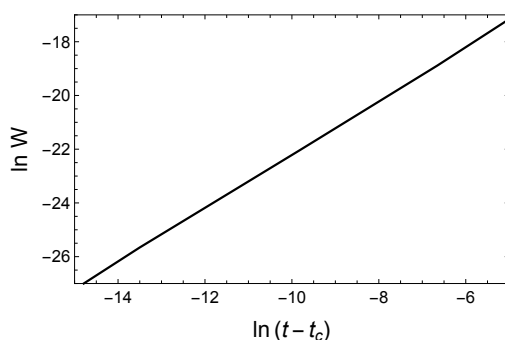
A c csatolás az IR-ben a szimmetriasértett fázisban szingularitást mutat. Hasonlóan viselkedik a g és a λ is. Utóbbiak skálafüggését az 5.6 ábrán szemléltetem. Az UV-ben azt láthatjuk, hogy a λ csatolás véges pozitív értékhez tart, ami a Reuter-fixpontnak megfelelő érték. Valóban, a Reuter és az új UV fixpont között egyedül a λ nem változik. Az UV felé haladva a Newton csatolás nő, majd egy nagyon szűk tartomány után csökkenni kezd, nullához tart. A g az IR-ben is pozitív marad és monoton csökken az IR felé, míg a λ a végtelen felé tart, illetve pozitív marad a szimmetriasértett fázisban, és előjelet vált a szimmetrikus fázisban.



5.6. ábra. A λ és g csatolások futása a szimmetrikus fázisban (bal oldali ábra), és a szimmetriasértett fázisban (jobb oldali ábra). A különböző trajektóriák a 5.5. ábránál használt W_i kezdeti értékeknek felelnek meg.

A λ és a g csatolások ugyanazt a viselkedést mutatják az IR-ben, amit a 2 paraméteres AB gravitáció RG-analízise során kaphatunk, tehát az új csatolások az IR tartományban nem befolyásolják az evolúciót.

A 4. fejezetben ismertetett analízissel vizsgálható a szingularitásnál meglévő skálázó tulajdonságok. A szimmetriasértett fázisban az RG trajektóriák nem követhetők t tetszőlegesen kis értékéig, mert a béta függvényekben szingularitás van, amely a propagátor pólusánál jelenik meg. Ezért van egy véges kritikus t_c határérték, ahol az RG fejlődés megáll. Hasonló típusú skálázási viselkedést találunk más modellek esetében is [117, 132, 122], ezt részletesen elemeztem a 4. fejezetben. Ahogy korábban írtam, a ϕ^4 elméletben ugyan elkerülhető a szingularitás, de az AB gravitációban nem. Az IR skálázásnál a W -t a $t - t_c$ függvényében ábrázolva a fixpontoknál szokványos skálázási tulajdonságot találtam. Az 5.7 alapján jól látható, hogy $W \sim (t - t_c)$.



5.7. ábra. A W skálázása a szimmetriasértett fázisban a t_c kritikus levágás közelében.

A szimmetrisértett fázis IR limeszében sérülő Lorentz-szimmetria fizikailag relevánsnak tűnik, mert a mi világunk kozmológiai állandója ebben a fázisban van. Úgy tűnik, hogy az RG-módszer alkalmazhatóságának határa egybeesik a Lorentz-szimmetria sérülésével. A szingularitás arra utalhat, hogy a fizikai rendszer leírásához új szabadsági fokokra van szükség, és valószínűsíthető, hogy az új módusok nem rendelkeznek Lorentz-szimmetriával. Megjegyezzük, hogy az alacsony energiájú folyamatok a nem-relativisztikus tartományba esnek, ezért a Lorentz-szimmetria elvesztése nem annyira meglepő, akár egy relativisztikus-nemrelativisztikus átmenet jelét is láthatjuk.

Más eredményekkel összhangban [170] arra következtethetünk, hogy az RG blokkosítás dinamikusan sérti a Lorentz-szimmetriát az UV limeszben. A szimmetriasértésnek több oka is lehet, de az minden bizonnyal kizárható, hogy az RG módszer okozza a szimmetriasértést. Tudjuk, hogy a Litim-regulátor explicit módon sérti a Lorentz-szimmetriát, esetleg a CS séma adhatna Lorentz-szimmetrikus regulátort, azonban ez utóbbi nem használható az AB gravitációban, mivel a 4-dimenziós integrálokat divergenssé teszi, és további regularizációt igényel, általában egy új UV levágás formájában, amely szintén sérti a Lorentz-szimmetriát. Megjegyezzük, hogy az UV limeszben a Litim-regulátor Lorentzszimmetria-sértése gyengül, mivel az RG skála a végtelenhez tart, és a szimmetria a $k \rightarrow \infty$ limeszben helyreáll. Ez azt jelenti, hogy a Lorentzszimmetria-sértés nem érzékeny a regulátor megválasztására, amit a W -re kapott eredményeim is megerősítenek.

Megmutattam, hogy az AB gravitáció konform redukált alakjában, amennyiben a tér és idő irányú hullámfüggvény renormálást hagyjuk egymástól függetlenül fejlődni, akkor a Reuter-fixpont csak közelítőleg fixpont, amely a Lorentz szimmetria sérüléséig jó közelítésnek tekinthető, azonban növelve a skálát a szimmetriasértés elmosza a Reuter-fixpont közelében lévő skálázást. Tovább haladva az evolúcióban egy új fixpont jelenik meg, amely összeegyeztethető a Horava-féle gravitációs modell gravitációmentes UV fixpontjával, ahol a futó Newton-állandó nullához, míg a futó kozmológiai állandó véges pozitív értékhez tart [171].

5.4. Az aszimptotikusan biztonságos gravitáció nyitott kérdései

Összefoglalva az előző fejezet eredményeit, elmondhatjuk, hogy a kvantumelmélet és a gravitáció egyesítésének egyik ígéretes modelljét találtuk meg. Az AB gravitáció konzisztens módon feljavítható modellt ad, ahol lényegében minden komolyan vehető változat tartalmazza a Reuter-fixpontot, ezzel funkcionálisan renormálhatóvá téve az eredményt. Azonban a kísérlettel való összevetés hiányában ott lehet bennünk a kérdés, hogy a modell valóban alkalmas-e a kvantum- és a gravitáció elméletének egyesítésére. Ezen a ponton szeretnék hangot adni ennek a kételynek. Az alábbi pontok közül többet érintettem a dolgozatban, és számos kérdéstről olvashatunk cikkeket a szakirodalomban, ahol komoly erőfeszítéseket tettek a kutatók ezek megválaszolására [123].

1. A Reuter-fixpont UV fixpont, azaz a k RG skála tart a végtelenhez, emiatt k_Λ levágási skálát a végtelen felé kell tolnunk. Ez ellentétes az RG blokkosítási iránnyal. Az elgondolás azt feltételezi, hogy az elméletben nincsenek irreleváns csatolások, amelyek felnőnének az UV-ben. A perturbatív renormálásnál is hasonlóképpen járunk el, csak a releváns csatolásokat követjük az evolúció során. Ha így járunk el, akkor viszont kizárjuk annak a lehetőségét, hogy új kölcsönhatás jelenjen meg az UV-ben. Ez ellentmond annak a várákozásnak, hogy a részecskefizikában a Planck-skála környékén új fizika jelenik meg [171].
2. A Standard Modellben az ábeli és skaláris terek csatolásai véges k skálán divergálnak, irrelevánsak, azaz UV Landau pólussal rendelkeznek. Az AB gravitáció kiterjesztései (akár a teljes Standard modellel vett kiterjesztése) elvileg funkcionálisan renormálható, azaz nem szabadna irreleváns csatolást kapnunk. Nem tudjuk, hogy ez a probléma megoldódik-e az AB gravitációban. Amennyiben igen, akkor az a trivialis kérdésére is választ adhat.
3. A Reuter-fixpontot eredetileg euklideszi téridőben találták meg, viszont Lorentz szignatúrában is látnunk kellene. Egyre több kutatás tárgyalja a modellt Lorentz szignatúrában, emellett a skalár- vagy mértékelméleteket is újratárgyalják Lorentz formalizmusban. Ehhez kapcsolódóan megemlítem, hogy az RG módszer nem fogalmazható meg Lorentz invariáns módon. Egyrészt a k skála, mint négyesimpulzus nem használható, másrészt nem ismerünk nem-perturbatív Lorentz invariáns regulátort [152].
4. A QCD-ben nagy energiákon a Lorentz-szimmetria sérül. Az AB gravitációban az UV skálán ezt meg kell találnunk. Euklideszi formalizmusban ez nem lehetséges, mert Lorentz szignatúrában kell dolgoznunk. A Reuter-fixpont fenntartja a csatolások értékét UV-ben, nem engedi, hogy új fizika jelenjen

meg a Planck-skála környékén, a Lorentz-szimmetria is fennmarad. Egy lehetőség ennek a problémának a feloldására feltételezni, hogy a Reuter-fixpont csak közelítőleg fixpont, amely a Lorentz-szimmetria sérülésének skálájáig jó közelítésnek tekinthető, azonban tovább növelve a skálát a szimmetriasértés új skálázási tartományt hoz létre [123]. A megjelenő új fixpont a megközelítéstől függ, az eredményeim alapján összhangba is kerülhetünk a Horava-féle gravitációs modellel, ahol egy gravitációmentes UV fixpontot találhatunk, mert a Newton-csatolás nullához tart, a kozmológiai-csatolás pedig véges pozitív értékhez [171].

5. Az RG módszer skálákon átívelő trajektóriája különböző elméletek között teremt hidat a gravitációs elméletben is. Joggal feltételezhetjük, hogy a kvantumgravitáció alacsony energián a klasszikus gravitációs elmélethez közelít. Fontos azonban hangsúlyozni, hogy az RG módszerrel kapott alacsony energiás viselkedés nem a modell klasszikus, hanem kvantumos változata. Sajnálatos módon azonban az RG módszer egyelőre adós olyan trajektóriával, amely átível a kvantumos és a klasszikus elmélet között. A gravitációnál ez alapvető kíváncsi főleg azért, mert csak a klasszikus gravitáció kapcsán vannak mérési eredményeink. Sajnos a kvantum-klasszikus átmenet leírását sokkal jobban megalapozott elméletek esetén sem sikerült megoldanunk. Példaként említhetem a QED-t, amelynek jól ismert a nagyenergiás kvantumos viselkedése, ahogy az alacsony energiás klasszikus elmélete, még sincs a szakirodalomban olyan RG tárgyalás, amely olyan trajektóriát mutatna, amely a két tartományt összeköti. A kvantumos viselkedésből a klasszikusba történő átmenet kérdése az RG módszer általánosítását követeli meg, ez zárt időtengelyes formalizmusában lehetséges [172].
6. A kvantumgravitáció perturbatív módon nem-renormálható. Emiatt a hurok-kifejtés minden rendjében új, divergens vertex jelenik meg, erre példa a 2-hurok közelítésben vett Goroff-Sagnotti ellentag, ami egy ugyancsak nem renormálható csatolást vezet be [173]. Ezeket kénytelenek vagyunk egyesével vizsgálni a Reuter-fixpontnál, és, meg kell győződnünk arról, hogy ott releváns csatolásokká válnak, amely biztosítja a renormálhatóságot.
7. Az AB gravitáció jóslatai kísérleti úton nem ellenőrizhetők, emiatt nem tudjuk eldönteni, hogy a modell helyesen írja-e le a kvantumgravitációt. Amennyiben kvantitatív elemzésre vágyunk, nem szerencsés az RG módszert segítségül hívni, hiszen ahogy többször hangsúlyoztam már a dolgozatban, az RG módszer inkább a modellek kvalitatív megismerését segíti elő. Egy modell fázisstruktúrájának feltérképezésére kiválóan alkalmas, de például kritikus exponensek pontos számítására más elméleti módszert érdemes választanunk.

Véleményem szerint nem is az a fontos, hogy létezik-e a Reuter-fixpont, hanem hogy ezek az eredmények adtak-e inspirációt további kutatásokhoz. Az AB gravitációban az RG módszerrel kapott eredmények lehet, hogy pontatlanok, javításra (vagy cserére) szorulnak, de abban mindenképpen segít bennünket, hogy egy olyan globális képet alkossunk meg, amely átível a különböző RG skálákon érvényes elméleteken. A legtöbb fizikai elméletet úgy definiálják, hogy az csak egy adott skálatartományban érvényes, amelyben jól ismertnek tekintik a kölcsönhatásokat. Abban mutatkozik meg az RG módszer valódi ereje, hogy alkalmas arra, hogy a skálatartományból kilépve meghaladja az elmélet kereteit, és egy másik elmélethez vezessen bennünket.

6. fejezet

Renormálás valós időben

Az RG módszer hagyományos euklideszi, képzetes idejű formalizmusa mellett egyre nagyobb igény merült fel a valós idejű renormálás kutatására. Ezt főként az AB gravitációs vizsgálatok motiválták, de koncepcionálisan is fontos kérdés, van-e különbség a képzetes és valós idejű formalizmussal kapott eredmények között.

A valós idejű RG módszer a zárt időtengelyes (closed time path, CTP) formalizmus keretében fogalmazható meg konzisztens módon. Elsődleges célom a CTP RG egyenletek megalkotása volt, azonban ez olyan sok elvi és gyakorlati kérdést vetett fel, amelyekkel először egyesével szembe kellett nézni, mielőtt a CTP renormálást használni tudtam volna.

Az első alapvető jelentőségű kérdés az RG módszer és a nyílt rendszerek kapcsolata volt. Az RG módszerben szabadsági fokokat eliminálunk, emiatt értelemszerűen a módszer sokszabadsági fokú rendszerek vizsgálatára alkalmas. A nagyenergiás módusokat kiintegráljuk, és az alacsony energiás módusokra egy effektív elméletet kapunk. A WH-egyenletben egy gömbhéjban lévő módusokat eliminálunk. A gömbben lévő módusok a fizikai rendszerhez tartoznak, ezeket a szabadsági fokokat megfigyeljük. A rendszertől megkülönböztetjük a környezetet, az utóbbihoz tartozó módusokat nem figyeljük meg. A gömbhéj módusai az RG blokkosítás előtt a rendszerhez tartoznak, azok az elimináció után már a rendszert körülvevő környezet részeivé válnak, ezeket a módusokat már nem követjük. Ez kulcskérdés az RG módszerben, ugyanis az eliminált módusok a rendszerből a környezetbe kerülnek, ezáltal nyílttá téve az eredetileg, a levágás skálájánál még zártnak tekinthető fizikai rendszerünket. Ez azt jelenti, hogy az RG módszer szerint a zárt rendszerek vizsgálata inkonzisztens.

A wilsoni renormálás a rendszert zártnak tekintette. Klasszikus fizikában a környezeti effektusok minimalizálhatók, és valóban elhanyagolhatóvá válhat a környezet hatása. Ezzel szemben a kvantummechanikában az összefonott állapotok hatása a rendszer-környezet viszonyra mindig fontos. Ha egy összefonott részecskepár mindkét részecskéje kezdetben a rendszerhez tartozik, és az RG blokkosítás után az egyik részecskét ebből elimináljuk, akkor az a környezethez fog tartozni. Az eredeti, össze-

font részecskepár blokkosítási lépés után rendszerben maradt részecskéjét olyan sűrűségmátrixszal jellemezhetjük, amely kevert sokasághoz tartozik, az egyszerűség kedvéért úgy fogalmazok, hogy a rendszert kevert állapot írja le.

A gondolatmenet szerint a tradicionális wilsoni renormálás hiányos. Ahhoz, hogy pontosabbá tegyük az RG módszert, meg kell határoznunk az összefont állapotokból származó járulékat is. Feltehető a kérdés, hogy fontos-e a kevert állapotok járuléka?

A kvantumtérelméletben először a renormálható elméteket vizsgálták, ahol a csatolások relevánsak. Azonban rövid idő alatt kiderült, hogy a legtöbb realiztikus elmélet (a Standard Modell is) tartalmaz irreleváns csatolásokat, amelyek az UV-ben divergálnak. Erre példa a skalártér önkölcsönható csatolása, vagy az elektromágneses kölcsönhatás finomszerkezeti állandója, melyek béta függvénye szingulárisává válik az UV felé haladva. Ahhoz, hogy ezt megakadályozzuk, bevezethetünk egy UV levágást. Általában az irreleváns csatolások kezelésénél is hasonló módon járhatunk el [161]. A részecskefizikában a QCD az egyedüli realiztikus modell, amely aszimptotikusan szabad, és nincsenek benne irreleváns csatolások. Azonban a hurok korrekciók számolásánál ott is szükségünk van a végtelen integrálok regularizációjára, tehát ott is be kell vezetnünk egy UV levágást (vagy másfajta regulátort).

Ebből arra következtethetünk, hogy a realiztikus kvantumtérelméletekben van UV levágás, ami azt jelenti, hogy a levágás fölötti módusok nincsenek figyelembe véve, azt mondhatjuk, hogy azok a környezethez tartoznak. Azt gondolhatnánk, hogy nincs okunk feltételezni, hogy a levágáson túli módusok befolyásolják a rendszer viselkedését, azonban ez nem igaz. Akár a Bevezetésben említett globális renormálási csoport képre, akár arra gondolva, hogy a Planck skálán új fizika jelenlétét várjuk, azt kell feltételeznünk, hogy az UV levágás olyan módusokat tartalmaz, amelyek ismereteinken túl vannak. Tudásunk hiányában nagyon naiv az a gondolat, hogy azok nincsenek befolyással az alacsony energiás megfigyelt rendszerünkre. Az előző fejezetben már írtam arról, hogy a Planck-skálán megjelenő új fizika megjelenését a Reuter-fixpont megakadályozza. Ehhez hasonlóan maga az RG módszer az UV levágás bevezetésével azt feltételezi, hogy nincs a levágáson túl érdekes fizika, mintha minden modell renormálható lenne. Természetesen ez nem azt jelenti, hogy a módszer vagy a Reuter-fixpont zsákutca, hanem, hogy mindig figyelni kell arra, hogy az UV levágással nem távolítunk-e el valami fizikailag fontos effektust, és amennyiben lehet, pontosítsuk a leírást.

Az előző fejezet végén beszéltem arról, hogy az anizotróp téridő segíthet a Reuter-fixponton túli fizika feltérképezésében. Az RG módszernél is gondosabban kell eljárunk. Komolyan kell vennünk, hogy az RG módszer nyílt rendszereket tárgyal, és szembe kell néznünk ennek minden kellemetlen következményével. A nyílt rendszerek tárgyalása sokkal bonyolultabb, hiszen például energiamegmaradás sincsen. Azonban a bonyolultsága gazdagabbá is teszi ezeket a rendszereket.

A CTP formalizmust egyre szélesebb körben alkalmazzák a kvantumelméletben, emellett jelentős klasszikus fizikai aspektusai is vannak [174, 175, 176]. A CTP

formalizmust először a Heisenberg reprezentációban megfogalmazott perturbációs kifejtésre dolgozták ki [177, 178, 179], a későbbi felhasználás azonban egyre inkább a nyílt kvantumrendszerek felé irányul, ahol a rendszer-környezet szétválasztás fontos szerepet játszik az adott fizikai problémában. A dekoherencia [180, 181], ami a kvantumrendszerek klasszikus határesetének szükséges feltétele, a makroszkopikus környezet figyelembevételével értelmezhető [182, 183, 184, 185, 186, 187]. A kollektív módusok, mint rendszer és annak környezetének kölcsönhatása, kulcsszeret játszik a nemegyensúlyi folyamatok tárgyalásánál is [188, 189]. A kvantum disszipatív rendszerek vizsgálatának az alapja szintén a rendszer-környezet módusok szétválasztása, amely sok más lehetőség mellett a CTP formalizmusban is megadható [190, 191]. Ezekben a modellekben a környezetet általában egy termikus egyensúlyban lévő hőtartálynak képzeljük el. Nanofizikai, szilárdtestfizikai vagy optikai rendszerek leírása elképzelhetetlen nyílt kvantumrendszerek nélkül, ahol a környezettel való kölcsönhatás mindig fontos [192]. Szintén használják a CTP formalizmust a nagyenergiás fizikában a véges hőmérsékletű térelméletektől [193] az asztrofizikáig [194]. A kvantummechanika pályaintegrálos megfogalmazása alkalmas a CTP formalizmus megalkotására [195], a számításaim is ezen alapulnak.

Az RG módszert már általánosították a CTP formalizmusra, és alkalmazták azt akár a ϕ^4 modellre is [196, 197, 198], vagy kvantumpontokra [199], nyílt elektronrendszerekre [200], a transzportfolyamatok megértésére [201], a csillapítás értelmezésére [202], az inflációs dinamikára [203], a kvantumkozmológiára [204], vagy akár a kritikus dinamikára is [205, 206, 207, 208, 192]. Szintén lehetséges a Bose-Einstein-kondenzátum viselkedésének leírása [209, 210, 211], a spektrális függvény számítása [212, 213], vagy a mértékelméletek valós idejű dinamikájának meghatározása [214] CTP-ben. Ugyancsak alkalmazzák a CTP RG módszert sztochasztikus térelméletekben is [215]. Mindezek mellett nagyon komoly irodalma van a valós idejű RG módszernek a 2PI formalizmusban is [216, 217, 218, 219]. A skalárelméletek egy-hurok renormálhatóságát a multiplikatív RG módszer segítségével CTP-ben szintén részletesen analizálták [220].

Célom a ϕ^4 modell, mint a legegyszerűbb nem-triviális skalártérelmélet CTP RG vizsgálata. Az előző bekezdések alapján az RG módszer megköveteli, hogy nyílt rendszerként tekintsek a modellre. Megjelennek olyan kölcsönhatási vertexek, amelyek a nyílt dinamikát írják le, ezeket nyílt csatolásoknak nevezem. A tárgyalásban fontos szerepet kapnak a kevert állapotok, amelyek a blokkosítás során eltávolított, eredetileg összefont módusokból származnak. Nyílt rendszerek tárgyalásának egyik lehetséges módja a CTP vagy Schwinger-Keldysh formalizmus [177, 178, 179].

A tradicionális RG módszer az átmeneti amplitúdó invarianciáján alapszik, emiatt abban kevert állapotok nem szerepelnek. Ahhoz, hogy azok is megjelenjenek, a sűrűségmátrixot kell használnunk. A következő fejezetben a nyílt rendszerek leírását mutatom be CTP formalizmusban.

6.1. Nyílt kvantumrendszerek

A k skála csökkentésekor fokozatosan elimináljuk a módusokat, amelynek következtében a rendszerben kevert állapotok jelenhetnek meg. Először megnézem, hogyan épül fel a CTP formalizmus zárt rendszerek esetén.

6.1.1. Zárt rendszerek

Egy zárt rendszer sűrűségi mátrixának alakja:

$$\rho[t_f, \Phi_+, \Phi_-] = \langle \Phi_+ | U(t_f, t_i) \rho(t_i) U^\dagger(t_f, t_i) | \Phi_- \rangle, \quad (6.1)$$

ahol $\rho(t_i)$ a kezdeti sűrűségmátrixot jelöli, $U(t_f, t_i)$ pedig a zárt dinamika időfejlődési operátorát. A pályaintegrál kifejezése:

$$\rho = \int D[\hat{\phi}] e^{iS[\hat{\phi}]}, \quad (6.2)$$

ahol $\hat{\phi} = (\phi_+, \phi_-)$ a térdublettet jelöli a két időtengelyre vonatkozóan, az integrálás a $\phi_\pm(t_f, \mathbf{x}) = \Phi_\pm(\mathbf{x})$ térkonfigurációk felett történik, a hatás alakja $S[\hat{\phi}] = S[\phi_+] - S^*[\phi_-]$ adja, $S[\phi]$ a zárt elméletben.

A kvantumtérelmélet generáló funkcionálja a tiszta állapotok közötti átmenet amplitúdójával adott, $\langle \Phi_f | U(t_f, t_i) | \Phi_i \rangle$, ezt nevezzük egyidőtengelyes (single time path, STP) sémának. A 6.2 egyenlet változóinak megkétszereződése a bra és a ket terek eltérő kvantumfluktuációjának felelnek meg. Zárt dinamikánál erre nincs szükség, mert a tiszta kezdeti állapotokra $\langle \Phi_+ | \rho(t_i) | \Phi_- \rangle = \Psi_i(\Phi_+) \Psi_i^*(\Phi_-)$ a fluktuációk függetlenek és azonosak. A 6.2 egyenlet sűrűségmátrixa nyílt időpályához (open time path, OTP) tartozik, mivel a pályaintegrál különböző végpontokkal rendelkezik.

6.1.2. Nyílt rendszerek

Azt teszem fel, hogy a ϕ tér tartozik a rendszerhez, annak dinamikáját követem. Ez kölcsönhatásban van egy másik térrel, a φ -vel, amely a környezetet jellemzi. A hatás $S[\phi, \varphi] = S_s[\phi] + S_e[\phi, \varphi]$ tagokra bontható, ahol az első tag a rendszert, a második a rendszer-környezet kölcsönhatást írja le. Annak érdekében, hogy a környezet csak a megfigyelési idő alatt hasson a rendszerre, feltételezzük, hogy a rendszer és környezete a kezdetben nem összefonottak, ami azt jelenti, hogy a kezdeti sűrűségmátrix a következőképpen faktorizálható: $\rho(t_i) = \rho_{s,0}(t_i) \rho_{e,0}(t_i)$. A megfigyelt rendszer redukált sűrűségmátrixa

$$\rho[t_f, \Phi_+, \Phi_-] = \langle \Phi_+ | \text{Tr}_\varphi [U(t_f, t_i) \rho(t_i) U^\dagger(t_f, t_i)] | \Phi_- \rangle, \quad (6.3)$$

ahol a környezeti szabadsági fokokat "kitrace"-elem. Az effektív hatás $S[\hat{\phi}] = S_s[\phi_+] - S_s^*[\phi_-] + S_{infl}[\hat{\phi}]$ alakú. Az influenza funkcionál írja le a nyílt dinamikát [195]:

$$e^{iS_{infl}[\hat{\phi}]} = \int D[\hat{\phi}] e^{iS_e[\phi_+, \varphi_+] - iS_e^*[\phi_-, \varphi_-]}, \quad (6.4)$$

ahol az integrálás a $\varphi_+(t_f, \mathbf{x}) = \varphi_-(t_f, \mathbf{x})$ térkonfigurációkra történik, és a kezdeti sűrűségmátrixszal való konvolúciója a rendszer-környezet kölcsönhatást jelzi.

Hasznos az effektív hatást a következő formában írni:

$$S[\hat{\phi}] = S_1[\phi_+] - S_1^*[\phi_-] + S_2[\phi_+, \phi_-], \quad (6.5)$$

ahol szétválasztottuk a független és a csatolt időtengelyek járulékát. A bra és a ket fluktuációk függetlenségét tükrözi a hatás egyszerű additív szerkezete. Az STP járulékok az S_1 tagokban vannak, a zárt, konzervatív kölcsönhatásokat foglalja magában. A két időtengely közötti csatolás járuléka az S_2 -ben van, ez a nyílt dinamikáért felelős, a bra és ket fluktuációk korrelációit tartalmazza, ekkor a redukált sűrűségmátrix kevert állapotot ír le [175].

A zárt rendszer generáló funkcionálja CTP formalizmusban alkalmas a várható értékek kiszámítására:

$$Z[j^+, j^-] = \text{Tr}[U(t_f, t_i; j^+) \rho_i U^\dagger(t_f, t_i; -j^-)], \quad (6.6)$$

ahol ρ_i a kezdeti sűrűségmátrix, j^+ és j^- a térhez lineárisan kapcsolt forrásokat jelölik. A sémát az teszi alkalmassá a redukált sűrűségmátrix kiszámítására, hogy az időfejlődés szabadon történik, szemben a kvantumtérelmélet hagyományos formalizmusával, ahol mind a kezdeti-, mind a végállapotok rögzítettek. A generáló funkcionál pályaintegrálos formában megadható a

$$Z[\hat{j}] = \int D[\hat{\phi}] e^{iS[\hat{\phi}] + \frac{i}{\hbar} \int dx \hat{j}_x \hat{\phi}_x} \quad (6.7)$$

alakban.

6.1.3. A propagátor

A CTP hatás szabad része a szabad propagátor inverzéből kapható meg, amely alakja:

$$i\hbar \hat{D}_{0x,y} = \text{Tr} \rho_i \begin{pmatrix} T[\phi_x \phi_y] & \phi_y \phi_x \\ \phi_x \phi_y & T[\phi_y \phi_x]^* \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

és a szabad generáló funkcionálból adódik:

$$Z_0[\hat{j}] = e^{-\frac{i}{\hbar} \int dx dy \hat{j}_x \hat{D}_{0x,y} \hat{j}_y}. \quad (6.9)$$

A kapott blokk-struktúra

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} D^n + iD^i & -D^f + iD^i \\ D^f + iD^i & -D^n + iD^i \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

alakú, amely három valós függvénnyel parametrizálható, ahol a D^n és D^f függvényeket a klasszikus elektrodinamikával analóg módon közeli és távoli Green-függvénynek nevezzük. A függvények impulzustérben

$$\begin{aligned} D_{0p}^n &= P \frac{1}{p^2 - m^2}, \\ D_{0p}^f &= -i\pi\delta(p^2 - m^2)\text{sign}(p^0), \\ D_{0p}^i &= -i\pi\delta(p^2 - m^2) \end{aligned} \quad (6.11)$$

alakúak. Amennyiben a hatás szabad része mellett megjelenik a kölcsönhatás, akkor azok $S[\phi] = S_0[\phi] + S_i[\phi]$, a CTP változóknál pedig $S[\hat{\phi}] = S_0[\hat{\phi}] + S_i[\phi^+] - S_i[\phi^-]$ alakúaknak tételezem fel, és erre végzem el a 6.7 egyenletbeli útintegrált. Az integrálás független pályákon történik szabad kezdeti és végső feltételekkel.

6.1.4. Fa-szintű renormálás

A CTP formalizmusban a blokkosított hatás teljesen hasonló módon kapható meg, mint az STP esetben. A csupasz hatást $k = \Lambda$ -nál adjuk meg, és egy infinitezimális lépésben a $k \rightarrow k - \Delta k$ gömbhéjban integrálunk. A nyílt rendszerre vonatkozó gondolatmenetet követve a $k - dk < |\mathbf{p}| < k$ impulzussal jellemzett φ módusok a környezethez, amíg a $|\mathbf{p}| < k - \Delta k$ impulzusú ϕ módusok a rendszerhez tartoznak. Ennek megfelelően a blokkosítás

$$e^{\frac{i}{\hbar}S_{k-\Delta k}[\hat{\phi}]} = \int D[\hat{\varphi}] e^{\frac{i}{\hbar}S_k[\hat{\phi}+\hat{\varphi}]} \quad (6.12)$$

alakú. LPA-ban a hatás lokális része:

$$S_1[\hat{\phi}] = \frac{1}{2} \int dx dy \hat{\phi}_x \hat{D}_{x,y}^{-1} \hat{\phi}_y - \int dx [U(\phi_x^+) - U(\phi_x^-)], \quad (6.13)$$

ahol az első tag az inverz szabad CTP propagátor, a további tagok pedig az egyes időtengelyekhez tartozó lokális potenciálokat jelölik.

A vizsgálat közben egy olyan dologra bukkantam, amely alapján véve változtatja meg az RG módszerről való gondolkodásomat. Az derült ki, hogy éles levágás esetén az eltávolított tömeghéj egy nyeregpontra tartalmaz, amely a lokális potenciálhoz ad járulékot, és releváns kölcsönhatást eredményez. Ez motiválja a nem-lokális tag bevezetését a hatásba

$$S_2[\hat{\phi}] = - \int dx dy V_{x-y}(\hat{\phi}_x, \hat{\phi}_y). \quad (6.14)$$

A blokkosított hatás evolúciójának követése során a nyeregpontra a levágás alakjától függetlenül megjelenik, azonban az éles levágást használó WH-egyenlet esetén az analitikusan megkapható. A Polchinski egyenlet esetén is van nyeregpontra, de azt numerikusan kell kiszámolnunk. A nem-lokalitás megjelenése onnan is nyilvánvaló, hogy a CTP propagátor nem-diagonális része valódi, tömeghéjon lévő részecskéket ír le, amelyek téridőben nem-lokalisak.

Az eredmény azt jelenti, hogy a WH-egyenlet (a kevert állapotok járulékanak hiánya után) újabb hiányosságára derült fény. Figyelembe kell venni a nyeregpontra az eliminációnál, ami szükségessé teszi egy nem-lokalis tag figyelembevételét a potenciálban. Mivel ezt még a szakirodalomban senki sem számolta, ezért első célom a nyílt rendszer olyan evolúciója volt, ahol fa-szinten számoltam, azonban figyelembe véve a nyeregpontra evolúcióját is.

A Wetterich-egyenlet esetén szintén megjelenik ez a járulék, de számolni reménytelenül bonyolult. A hatás kinetikus része szintén tekinthető nem-lokalis tagnak, mert diagonális az impulzusban, tehát nem-diagonális a koordinátában. Minden lokálison túli tag (pl. a regulátor is) nem-lokalisnak tekinthető. Általában a nem-lokalis tagok p^2/Λ^2 -tel vannak elnyomva, és kvázilokálisnak nevezzük őket [221]. Ez vezet el a nem-lokalis tagok kis távolságokon (nagy impulzusokon) vett gradiens kifejtéséhez. Ezzel két újabb nehézséggel kell szembenéznünk. Az első, hogy a gradiens kifejtés levágás közeli impulzusokhoz tartozik (vagy azon túl), mi pedig arra vagyunk kíváncsiak, hogy kis impulzusoknál (a k IR értékénél) hogyan változnak a fizikai tulajdonságok. Sajnálatos módon sima levágás esetén a gradiens kifejtés hatása csak úgy jelenhet meg az IR-ben, hogy a levágás simasága miatt nincs teljesen szétválasztva az UV és az IR fizika, emiatt valamennyi UV effektus mindig le tud szívárogni az IR-be. A bilokális megközelítés annyiban mindenképpen hatékonyabb, hogy a bilokális tag mindig ott válik fontossá, ahol az annak megfelelő impulzus van. Ezt tehetjük közel a k skálához is. A másik kérdés a gradiens kifejtés megbízhatósága: amennyiben renormálható az elmélet, akkor a $\Lambda \rightarrow \infty$ limesz biztosítja a sorfejtés konvergenciáját, sőt azt is, hogy a végtelen levágás lokálissá teszi az elméletet. Azonban nem-renormálható elméletek esetén ez nem igaz. Korábban már érveltem amellett, hogy a funkcionális RG módszert gyakran (tévesen) csak renormálható elméletekre használják, holott pont a nemrenormálható elméletekre dolgozták ki. Utóbbi esetben nem tudjuk a $\Lambda \rightarrow \infty$ limeszt venni, tehát mindenképpen maradni fog a modellben egy maximális impulzus, ami egy minimális távolságnak felel meg, tehát a nem-lokalitás elkerülhetetlen.

A gondolatmenet megmutatja, hogy a gradiens kifejtés és a bilokális potenciál egy töről fakad, ugyanannak a problémának két megközelítését adják. Ha a modell renormálható, akkor a két módszer egymásnak határesetek is lehet: a gradiens kifejtés infinitezimális bilokalitásnak felel meg.

Ahhoz, hogy megtaláljam a (6.12) pályaintegrál nyeregpontra, meg kell oldani a mozgásegyenletet $\hat{\varphi}$ -re, adott $\hat{\varphi}$ -nél. Mivel csak a $\mathcal{O}(\Delta k)$ rendű tagokra van

szükség, ezért elegendő a linearizált egyenletek nyeregpontját kiszámolni, azaz a $\hat{D}^{-1}\hat{\phi} = \hat{L}$ egyenletet megoldani, ahol $(D^{-1})^{\sigma,\sigma'} = (D_0^{-1})^{\sigma,\sigma'} - \delta^{\sigma,\sigma'}\sigma U''(\phi^\sigma)$ a környezeti propagátor inverze. Magát a környezeti propagátort a

$$\hat{D}_{x-y}^{(k)} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \delta(|\mathbf{q}| - k) \hat{D}_q e^{-i(x-y)q} \quad (6.15)$$

kifejezés szerint értelmezem. Bevezettem a

$$L_x^\sigma = \sigma U'(\phi_x^\sigma) - 2 \int dy \partial_{\phi_x^\sigma} V_{x-y}(\hat{\phi}_x, \hat{\phi}_y) \quad (6.16)$$

függvényt. A bilokális potenciál formálisan felírható fa-szinten:

$$V_{x-y}(\hat{\phi}_x, \hat{\phi}_y) = -\frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma'} \sigma\sigma' U'(\phi_x^\sigma) D_{x-y}^{(k,\Lambda)\sigma\sigma'} U'(\phi_y^{\sigma'}), \quad (6.17)$$

ahol

$$\hat{D}_{x-y}^{(k,\Lambda)} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Theta(|\mathbf{q}| - k) \Theta(\Lambda - |\mathbf{q}|) \hat{D}_q e^{-i(x-y)q} \quad (6.18)$$

a teljes propagátor, amely tartalmazza az összes eliminált módus hatását. A lokális potenciál fa-szinten nem fejlődik, $U(\phi) = U_B(\phi)$ ahogy a tömeg sem, $m^2 = m_B^2$. A 6.17 egyenlet azt mutatja, hogy elindul a nem-lokális tag fejlődése. Ez egy nagyon fontos eredmény, mert ez a kulcsa, a rendszer-környezet kölcsönhatás leírásának.

A hagyományos renormálásban nem szerepelnek az összefonódásból származó kevert állapotok. Az összefonott állapotoknak nincs klasszikus fizikai megfelelője. Az általam ismertett módszer tartalmazza az összefonódásból származó járulékokat. Emiatt, megkülönböztetésül a hagyományos renormálási csoport módszertől, az új módszert kvantum renormálási csoportnak neveztem el.

6.2. Nem-lokális evolúció

A nyeregpont vezető rendben járul hozzá a bilokális potenciál evolúciójához. Ezt eddig egyetlen korábbi RG számolásnál sem vették figyelembe. Azt gondoltam, hogy mielőtt a nyílt rendszerek evolúcióját fa-szinten túl is vizsgálnám, érdemes a bilokális potenciál evolúcióját néhány fontos modellben kiszámolni.

Először a ϕ^4 modellt vizsgáltam [15]. A hatás most

$$S = S_0[\chi] + \int_x U(\chi_x) + \int_{xy} V_{x-y}(\chi_x, \chi_y) \quad (6.19)$$

alakban írható, ahol a χ változó a Φ kondenzátum körül fluktuál. A lokális és bilokális potenciálok alakja:

$$U(\chi) = \sum_{n=2}^N \frac{g_n}{n!} \chi^n,$$

$$V_{x-y}(\chi_1, \chi_2) = \sum_{m+n=2}^N \frac{V_{x-y,m,n}}{m!n!} \chi_1^m \chi_2^n. \quad (6.20)$$

A numerikus számolásokban $N = 6$ -t használok 3d-ben. A fa-szintű teljes bilokális fejlődés az impulzustérben:

$$\Delta_k V_q^{tree}(\chi_1, \chi_2) = 2k D_q^{(k-\Delta k, k)} \left[\partial_2 V_q(\chi_1, 0) + \frac{1}{2} U'(\chi_1) \right] \left[\partial_1 V_q(0, \chi_2) + \frac{1}{2} U'(\chi_2) \right]. \quad (6.21)$$

Két különböző forrásból van járulékunk: a lokális potenciálból a nyeregpontra miatt, illetve a bilokális tag evolúciójából. A fluktuációk által generált evolúció:

$$\dot{V}_{q,m,n}^{fl} = -\hbar k \left[\frac{1}{2} (V_{q,m+2,n} + V_{q,m,n+2}) \int_p D_p^{(k)} + \int_p D_p^{(k)} V_{p-q,m+1,n+1} \right]. \quad (6.22)$$

Összefoglalom a 3d-ben $N = 6$ -ra a kapott evolúciós egyenleteket. A fa-szintű evolúció:

$$\Delta_k V_{q,3,3} = 2D_q^{(k-\Delta k, k)} \left(V_{q,3,1} + \frac{1}{2} g_4 \right)^2, \quad (6.23)$$

a lokális csatolások evolúciója pedig

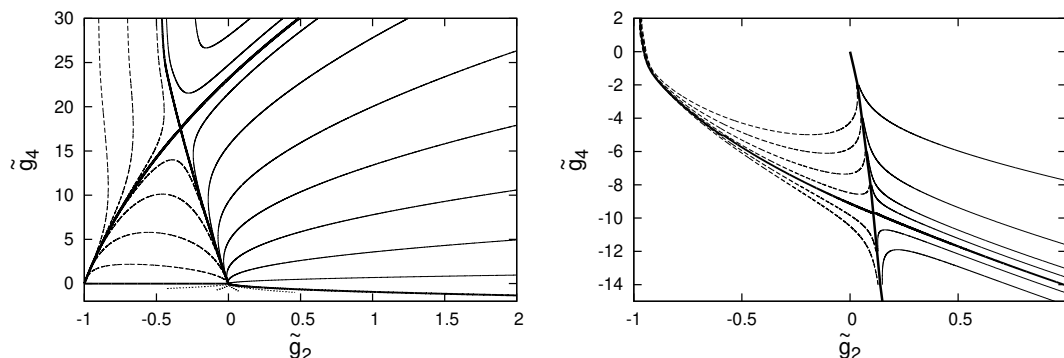
$$\begin{aligned} \dot{g}_2 &= -\frac{\hbar k^3}{4\pi^2} \frac{g_4}{\omega_k^2}, \\ \dot{g}_4 &= \frac{\hbar k^3}{4\pi^2} \left(3 \frac{g_4^2}{\omega_k^4} - \frac{g_6}{\omega_k^2} \right) - 6\dot{V}_{0,2,2}, \\ \dot{g}_6 &= \frac{\hbar k^3}{4\pi^2} \left(\frac{15g_4 g_6}{\omega_k^4} - \frac{30g_4^3}{\omega_k^6} \right), \end{aligned} \quad (6.24)$$

ahol $\omega_q^2 = q^2 + g_2 + 2V_{q,1,1}$.

A V bilokális csatolások kezdeti értéke mindig nulla, de a lokális csatolások beindítják az evolúciójukat, konkrétan a 6.23 egyenlet alapján g_4^2 -es tag miatt a $V_{q,3,3}$ evolúciója elindul. A konzisztencia miatt a g_6 evolúcióját is követnünk kell. Ez lehetőséget ad nemcsak a másodrendű, hanem az elsőrendű fázisátmenet elemzésére is.

A GFP megtalálható a bilokális modellben is, azonban a WH fixpont a \tilde{g}_2, \tilde{g}_4 fázistér 4. síknegyedébe kerül, ahol a trikritikus pont van. A lokális elmélet WF fixpontja a

$$\tilde{g}_{WF2}^* = -\frac{1}{3}, \quad \tilde{g}_{WF4}^* = \frac{16}{9} \frac{\pi^2}{\hbar}, \quad \tilde{g}_{WF6}^* = \frac{256}{27} \left(\frac{\pi^2}{\hbar} \right)^2. \quad (6.25)$$



6.1. ábra. (bal): A lokális modell fázisszerkezete $g_6(\Lambda) = 0.1$ -nél, a folytonos görbék a szimmetrikus fázisban futnak, a szaggatott görbék pedig a másodrendű fázisátmenet szimmetriasértett fázisához tartoznak, a pontozott vonallal ábrázolt trajektóriák leállnak az instabilitás következtében. (jobb): a bilokális modell fázisszerkezete. Utóbbi esetben eltűnik a 2. síknegyed WF fixpontja.

helyen van, ez bilokális esetben a

$$\tilde{g}_2^* = \frac{1}{9}, \quad \tilde{g}_4^* = -\frac{80 \pi^2}{81 \hbar}, \quad \tilde{g}_6^* = \frac{1280}{729} \left(\frac{\pi^2}{\hbar} \right)^2, \quad \tilde{v}_{022} = \frac{400 \pi^2}{41^2 \hbar^2} \quad (6.26)$$

helyre vándorol. Az új fixpont szintén nyeregpont, de két irreleváns iránnyal. A bilokalitás ad új releváns csatolást, a $V_{q,1,1}$ -t, ez világosan mutatja, hogy nem lehet teljes egy RG vizsgálati módszer a nyeregpont, ezzel együtt a bilokális tag evolúciójának követése nélkül. A nem-lokalitás arra is lehetőséget ad, hogy a vákuum szerkezetét megvizsgáljuk. Az elsőrendű fázisátalakulásnál a szimmetriasértett fázisban inhomogén vákuumot találunk, amelynek a hullámszáma az RG skála egyharmada. Ennek az az oka, hogy a 3-3 szórás Feynman diagramja járul hozzá a $V_{q,3,3}$ evolúciójához, ahol a középső környezeti propagátor által hordozott k impulzus a külső lábakon három egyenlő részre oszlik el.

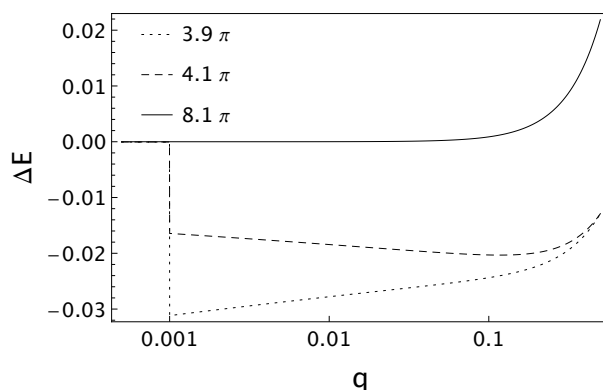
A 6.1 ábrán szemléltetem a fázisdiagramot. Összehasonlításképpen ábrázoltam a lokális modell fázisait is.

Szintén vizsgáltam, hogy hogyan változik a periodikus modellek tulajdonsága, ha a nyeregpontot és a bilokális potenciált figyelembe veszem [16]. Az SG modell esetén a

$$S_2 = \int_{xy} v_{x-y} \sin(\beta\phi_x) \sin(\beta\phi_y) \quad (6.27)$$

alakú bilokális tag ad nemtriviális evolúciót. Bevezettem a v_{x-y} bilokális csatolást. Az evolúciónál a kezdeti értéke nulla, a lokális csupasz csatolások indítják be a futását. A WH-egyenlet a \tilde{u} lokális csatolásra ugyanazt az evolúciós egyenletet adja. A bilokális tag evolúciója a fa-szinten

$$\Delta v_q = -\frac{u^2}{2z_0 k^2} \omega_{q,k} \quad (6.28)$$



6.2. ábra. Az energiakülönbséget ábrázoltam különböző z_0 értékeknél. A folytonos vonal a szimmetrikus fázisra vonatkozik. A pontozott vonalnál $1/z_0 = 3.9\pi$, itt nem-triviális minimum van a q közel nulla értékre. A szaggatott vonal esetén $1/z_0 = 4.1\pi$, a nem-triviális minimum a $q = 0.106$ -nál van.

alakú impulzustérben. Ez módosítja az inverz propagátort is, amely alapján a hullámfüggvény renormálásra az alábbi evolúciós egyenletet kapom:

$$\dot{z} = -\frac{\tilde{u}^2}{z}. \quad (6.29)$$

Azt kapom, hogy az eredetileg lokális elméletnél elindul a hullámfüggvény renormálás, ha a bilokális potenciál evolúcióját figyelembe veszem. A fázisszerkezet is a 4.1 ábrának megfelelően alakul.

Egy $\phi_x = \phi \cos(qx)$ alakú periodikus klasszikus háttérteret feltételezve, szemiklasszikus szinten minimalizálhatjuk az energiát a periodikus klasszikus tér paramétereinek, a ϕ és a g függvényében. Az eredményeket a 6.2 ábrán mutatom be. A ΔE energiakülönbség a periodikus és a nulla klasszikus térrel számolt energia különbségét adja. Amennyiben negatív, úgy a periodikus tér kedvezőbb energetikailag. Az energia különböző viselkedést mutat a z_0 különböző értékei esetén. A szimmetrikus fázisban, a $1/z_0 > 8\pi$ esetén azt kapjuk, hogy a minimum $q = 0$ -nál található, tehát az alapállapot triviális. Vannak bizonyos kezdeti értékek, ahol $q = \Lambda$ -nál hamis minimum jelenik meg, de ezek az értékek kizárhatók, mivel a Λ a levágás a környezetben van, és nem tekinthető fizikai skálának. A szimmetriasértett fázisban már lehet nem triviális alapállapotunk. Ott két tartományt különböztethetünk meg, amelyeket egy kritikus érték választ el, ez $1/z_0 = 4\pi$. Ha $1/z_0 < 4\pi$, akkor a nem-triviális minimum nem fizikai. A $4\pi < 1/z_0 < 8\pi$ paramétertartományban azonban a q -nak van egy véges értéke, ahol az energiának nemtriviális minimuma van, ami azt jelenti, hogy az alapállapotot egy periodikus térkonfiguráció adja, legalábbis szemiklasszikus közelítésben. A véges q azt jelenti, hogy a bilokális potenciál inhomogén alapállapotot hoz létre. A kritikus érték $1/z_0 = 4\pi$ elválasztja

a homogén és az inhomogén alapállapotot. A szimmetrikus fázissal együtt három fázisunk van a 2d SG modellben. Ez a fázisszerkezet összhangban van a [34]-ben kapott eredménnyel.

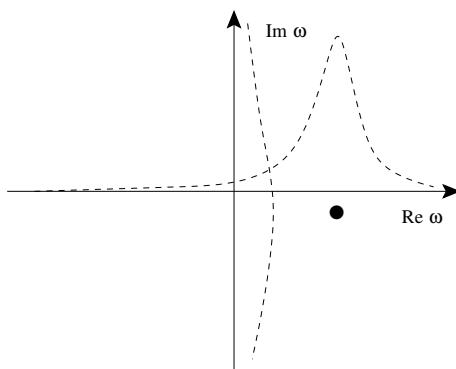
A nem-lokális kölcsönhatást az AB gravitációs modellben is bevezettem, ezt részleteztem az 5. fejezetben. Megmutattam, hogy a bilokális kölcsönhatás alkalmas arra, hogy az AB gravitációban megkapjam az anomális dimenziót [125].

Eljárást dolgoztam ki olyan RG egyenlet származtatására, amelyben az evolúció során figyelembe vesszük az összefont állapotok járulékát is. Az új eljárást kvantum renormálási csoportnak neveztem el [150]. A WH-egyenletet valós időben, CTP formalizmusban írtam fel. Megmutattam, hogy a blokkosítás során éles levágásnál egy nem triviális nyeregponthoz jelenik meg, amely nem-lokális járulékot ad a blokkosított hatáshoz, amely új releváns csatolásokat eredményez. Meghatároztam a bilokális potenciál hatását ϕ^4 modellben [15], az SG modellben [16], az AB gravitációban [125]) és rámutattam, hogy a bilokalitás a gradiens kifejtés véges kiterjesztésének tekinthető.

6.3. Minkowski-téridő, levonási pont

Az előző alfejezetben azt mutattam meg, hogy az eliminált módusoknál megjelenő nyeregponthoz milyen új releváns kölcsönhatásokat indukál. A nyeregponthoz megjelenése, a nem-lokális potenciál szükségessége alapvetően fontos a nyílt rendszerek konzisztens tárgyalásához. Emellett egy újabb fontos elemet is vizsgálni kell. A CTP formalizmus Minkowski-téridőben, valós időben van megfogalmazva. Ez a hagyományos euklideszi tárgyaláshoz képest egy realiztikusabb leírást ad, azonban ez további nehézségeket okoz. Az RG módszer valós idejű megvalósításának egyik fő újdonsága, hogy az unitér időfejlődés következtében a csatolások komplexekké válnak. A csatolások imaginárius része akkor kap jelentős járulékot az optikai tétel alapján, amikor tömeghéjon lévő részecskék vannak jelen közbenső állapotokban. A komplex csatolások megkétszerezik a paraméterek számát, ezáltal a fázisdiagram is változhat.

A csatolások definiálásának optimális módját a gyenge csatolású elmélet egy-hurok perturbatív RG sorfejtésén keresztül lehet bemutatni. Az integrálban a $\omega \sim \Re\omega_{\mathbf{p}}$ energiatartomány ad jelentős járulékot Minkowski-téridőben, euklideszi esetben pedig a $\omega \sim \Im\omega_{\mathbf{p}}$ tartomány, ahol $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Az m^2 renormált paraméter a levonási pontban számolt $\Sigma(p_s)$ sajátenergia segítségével határozzuk meg. A sajátenergia szingularitást mutat a kvázirészecskék tömeghéján, azaz a $p^2 = m^2$ értéknél, elválasztva a $p^2 < m^2$ és $p^2 > m^2$ tartományokat, ahol előbbi esetben a virtuális, utóbbinál a valódi részecskék járulnak hozzá a sajátenergiához. A levonási pontnak az utóbbi tartományban kell lennie, vagyis $p_s^2 > m^2$, hogy a valódi részecskék fizikáját tartalmazza a leírás. A kvázirészecske-propagátor energiacsúcsa



6.3. ábra. A felöltötetett propagátort ábrázoltam komplex energiasíkon, a kvázirészecske pólusát fekete ponttal jelöltem. A propagátor abszolút értékét szaggatott vonallal jelöltem mind a Minkowski, mind az euklideszi esetben. Előbbi éles csúcsot mutat.

keskenyebb a Minkowski-téridőben, mint az euklideszi térben, mert a pólus közelebb van a valós tengelyhez, mint a képzeteshez, ezt a 6.3 ábrán szemléltetem. Ez is azt mutatja, hogy a levonási pont megválasztása nagyon fontos Minkowski-téridőben.

A ϕ^4 modell RG analízisét végeztem el Minkowski-téridőben [16]. A számolást a perturbatív és a funkcionális RG keretében is elvégeztem a WH-egyenletet használva. Figyelembe vettem a térfüggő anizotróp hullámfüggvény renormálás fejlődését is. Minkowski-téridőben, a d -dimenziós impulzus frekvencia-komponensét külön kezelve egy hengerszimmetrikus geometriájú modellt kapok, hasonlóan az előző fejezetben használt geometriával, ahol az AB gravitációt Lorentz-szignatúrával vizsgáltam. Ugyanazzal a problémával nézünk szembe: a levágás, tehát maga az RG blokkosítási lépés sérti a Lorentz szimmetriát, és ez nem kiküszöbölhető effektus a számításokban. A tárgyalásomban sikerült összeegyeztetni a WH-egyenletet a gradiens kifejtéssel, ugyanis a hengerszimmetria miatt a blokkosítás nem gömbhéjakra, hanem hengerfelületekre történik. A Z hullámfüggvény járuléka két egymástól Δk impulzussal eltolt gömbhéj metszeteként áll elő, ennek járuléka nulla. Azonban hengerek esetén a hengert a szimmetriatengelye mentén toljuk el Δk -val, ami véges járulékot ad. Ilyen módon megkapható a Z futása. A henger magassága k -val arányos (a végtelen helyett), ami egyfajta regularizációként fogható fel, ezek után vizsgálni kell az eredmények magasságfüggését.

Levonási pontnak a k skálának megfelelő síkhullámot választottam, amely valódi szingularitást ad a pólusnál. A pólus okozta szingularitás fizikai, hiszen a tömeghéjon lévő gerjesztések okozzák, azonban ezt regularizálni kell. Ennek hiányában a g_4 beta függvényében az egyik tagot csak a Feynman ϵ menti meg a szingularitástól. Azért, hogy ez ne okozzon a későbbiekben problémát, célszerű a levonási pontot egy Lorentz görbének választani, de az is megoldást adhat, ha a síkhullámot megszorozom egy 1-hez közeli számmal, így eltolom kissé a szingularitási

ponttól.

A legfontosabb eredményem az, hogy a csatolások komplexek. A Feynman ϵ -t azonosítottam a tömeg képzetes részével, és az skálafüggővé válik, fejlődik. Amennyiben előjelet vált, akkor az idő megfordul. A perturbatív és a funkcionális RG eszközeit használtam a trajektóriák meghatározásához. A futások a két megközelítéssel hasonló viselkedést mutatnak. Mindkét esetben azt kapom, hogy a tömeg, így annak képzetes része is releváns. Utóbbi válthat előjelet, amennyiben a kezdeti értéke nagyon közel van a nullához. A tömeg képzetes része nem lehet nulla, ugyanis akkor matematikailag értelmetlen minden képlet. A véges képzetes rész azzal jár, hogy nem kaphatjuk vissza a GFP-t analitikusan, azonban aszimptotikusan, csökkentve a tömeg képzetes részének kezdeti értékét, visszakapom a GFP körüli skálázást. A g_4 csatolás szintén komplex, ennek negatív képzetes része biztosítja a pályaintegrál konvergenciáját, ha pozitív előjelűvé válna, akkor fizikailag értelmezhetetlen tartományba kerülnénk. A hullámfüggvény renormáláshoz tartozó csatolásoknak az IR-ben nincs komoly szerepük, azonban az UV-ben a $|g_4|$ felrobbanását okozzák.

A WF fixpont sem kapható meg analitikusan, azonban a szimmetrikus és a szimmetriasértett fázist a trajektóriák futása alapján meg tudjuk különböztetni. A szimmetrikus fázisban a csatolások valós része az IR-ben pozitív. A spontán szimmetriasértett fázisban a tömeg képzetes része miatt annak evolúciója nem szinguláris, legalábbis akkor, ha a levonási pontnak megfelelő síkhullám alakú tér nem okoz tömeghég szingularitást. A fázisban a (dimenziótlan) tömeg valós része a mínusz végtelenbe tart. A g_4 futásnak egy csúcsa van a szimmetriasértett fázisban, az RG módszer megőrzi a spinodális instabilitás emlékét az evolúcióban.

A fixpontok analitikusan nem kaphatók meg a beta függvényekből, a modell fázisszerkezete is megváltozik, bár megmarad a szimmetrikus és a szimmetriasértett fázis. Annyiban gazdagodik is, hogy megjelenik egy diszkrét időtükrözési szimmetriát sértő fázis, amikor a tömeg képzetes része előjelet vált. A vizsgálat fontos tanulsága, hogy Minkowski-formalizmusban nem-triviális levonási pontot kell használni. Célszerű a Lorentz-görbének megfelelő térrel számolni, mert az nem okoz tömeghég szingularitást.

6.3.1. Komplex csatolások a Wetterich-egyenletben

A Minkowski-téridő miatt hengersizimmetrikus geometriájú elméletet kell vizsgálnunk. A henger magassága regulátorként fogható fel, a különböző magasságokkal a regulátorfüggés vizsgálható. A WH-egyenlet keretei között nem találtam meg a ϕ^4 modell WF fixpontját Minkowski-formalizmusban, ezért megnéztem, hogy esetleg más regulátorok vagy más RG egyenletek nem adnak-e más eredményt [222].

A Wetterich-egyenletet véve Minkowski-téridőben, Litim-regulátort használva a ϕ^4 elmélet esetén LPA-ban analitikusan meghatároztam a beta függvényeket két

csatolásra [222]. A csatolások, a WH-egyenlethez hasonlóan, megint komplexekké válnak. $4 - \epsilon$ dimenzióban, az ϵ -ban vezető rendű tagokat megtartva a fixponti egyenletek analitikusan megoldhatók. Ha Ω -val jelölöm a henger magasságát, mint frekvencia levágást, akkor azt kapom, hogy $1.5 < \Omega < 50$ esetén visszakapom a WF fixpontot. Új eredmény, hogy maguk a fixponti értékek is komplexek lesznek. Felvethető az a kérdés, hogy mennyire lehetnek fizikainak tekinteni akár a komplex csatolásokat, akár a komplex fixpontokat? A tömeg valós része, a renormált tömeg kapcsolatba hozható az elmélet gerjesztésének tömegével, a képzetes rész pedig a részecske élettartamának reciproka. A tömeg növekvő képzetes része csökkenő élettartamot jelöl. A negatív előjel pedig a standard időirányt írja elő. Vannak olyan trajektóriák, ahol pozitívvá válik, ekkor dinamikai módon sérül az időtükrözési szimmetria. Az önkölcsönhatás csatolása nem szerepel fizikai folyamatok leírásánál, csak az abszolút érték négyzete szerepel szórási folyamatokban, ezért annak komplexsége válása csak kvantitatív változást okoz. A fixpont szintén nem fizikai, csak a fixpont környéke. A fixpont azt mutatja meg, hogy a fázistér mely tartományaiban linearizálhatók az evolúciós egyenletek. Mindezek alapján azt mondhatom, hogy a paraméterek komplexsége válása nem okoz elvi problémát. A valós idejű formalizmus az euklideszi formalizmussal szemben a fizikai térben tárgyalja a folyamatokat, ezekben a csatolások komplexek.

A $3d \phi^4$ modellt is vizsgáltam, ott is megkaptam a WF fixpontot bizonyos Ω levágásokra. A fixponti értékek komplexek, de már perturbatív módon nem elérhető tartományban vannak. A számítást kiegészítettem a konstans hullámfüggvény renormálás figyelembevételével (LPA' közelítés). A csatolások számának növelésével vizsgáltam az eredmények konvergenciáját, és $N = 4, 6$ csatolásra (ami a komplex voltuk miatt 10,12-nek felel meg) stabil fixponti értékeket kaptam. A fixpont valós része közel van a szakirodalomban ismert értékekhez, az eredmény újdonsága a stabilan megjelenő véges képzetes értékben van.

Meghatároztam a $2d$ SG modell csatolásainak futását is Minkowski-téridőben. Az SG modell tömegtelen, ennek ellenére egy képzetes tömeget be kell vezetnünk, hogy biztosítsuk a pályaintegrál konvergenciáját. A számoláshoz a Litim- és a CS-regulátort használtam. A szokásos két fázis látható, a Coleman-ponttal elválasztva. Továbbá azt kapom, hogy a szimmetrikus fázis mindkét regulátorra ugyanazt a (euklideszi téridőben megszokott) irreleváns skálázást adja. A szimmetriasértett fázisban azonban különbség mutatkozik. A CS regulátor esetén megjelenik a $\beta^2 = 4\pi$ kritikus érték, ami a szimmetriasértett fázist két részre bontja. Ha $8\pi > \beta^2 > 4\pi$, akkor az u csatolás valós része véges IR értéket vesz fel, azonban, ha $\beta^2 < 4\pi$, akkor a futás spinodális instabilitásba fut. Megismételve a számolást a Litim-regulátorra, a szimmetriasértett fázis egységes marad. Mivel a CS regulátorral kapott eredmény van összhangban korábbi eredményekkel [34], ezért azt gondolom fizikainak, továbbá a Thirring és SG modellek kapcsolata szintén $\beta^2 = 4\pi$ -nél áll fenn. A két regulátorral kapott eltérés oka az lehet, hogy a Litim-regulátor olyan divergenciákat is kimos

(a spinodális instabilitásnak megfelelőt), amely fizikai tartalommal bír. Ez újra azt mutatja, hogy a Wetterich-egyenletet óvatosan kell használni. A regulátor pont a k skálán változtatja meg mesterségesen a kvázirészecske dinamikát, ezért ugyan minden véges, amit kapunk, de nem feltétlen fizikai.

Megvizsgáltam, hogy az RG módszernek a Minkowski-téridőben történő vizsgálata milyen változást eredményez a tradicionális euklideszi tárgyalással szemben. A frekvenciaváltozót kiintegrálva az éles levágás esetén is tudtam térfüggő hullámfüggvény renormálást számolni. Megmutattam, hogy véges levonási pontot kell alkalmaznunk, hogy a tömeghég járulékát megkapjuk [223]. Azt is megmutattam, hogy a csatolások komplexekké válnak, és a tömeg képzetes része azonosítható a Feynman epszilonnal. Az eljárás a Wetterich-egyenlet esetén is komplex csatolásokra vezet [222]. Ez dinamikai módon sérti az időtükrözési szimmetriát. Emellett nincs gaussi fixpont, aszimptotikusan kaphatjuk meg a szabad elmélet skálázását. A Minkowski-formalizmus következtében gyökeresen megváltozik a fázisszerkezet, a WF fixpont is eltűnik.

6.4. Renormálás és nyílt dinamika

Az előző fejezetekben számos olyan új elemet vettem figyelembe a renormálásnál, ami a nyílt rendszerek vizsgálatánál nélkülözhetetlenek, ezek:

- nemlokális potenciál,
- levonási pont,
- komplex paraméterek.

Hangsúlyozom, hogy az új elemek megjelenését az RG módszer követeli meg. Ezeket beépítve az RG módszerbe a ϕ^4 modell olyan analízisét végezhettem el, amely már tartalmazza nyíltság következtében megjelenő rendszer-környezet vagy IR-UV összefonódást, illetve a rendszerben a kevert állapotokat. Hogy minél realiztikusabb modellt vizsgáljak, 4d-ben végzem el a számolást [224].

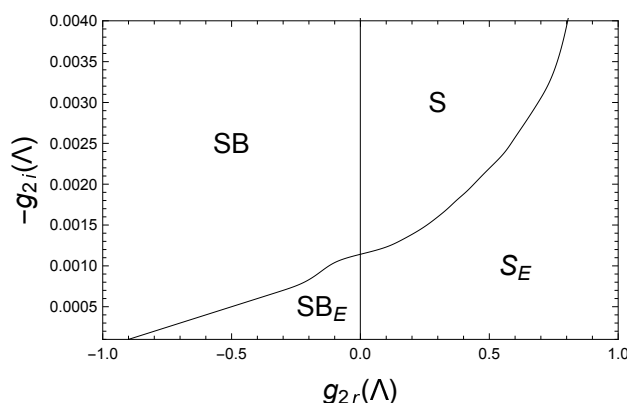
A lokális potenciált a

$$U(\phi) = \frac{g_2}{2}\phi_+^2 + \frac{g_4}{4!}\phi_+^4 \quad (6.30)$$

alakban veszem fel, komplex csatolásokkal: $g_2 = g_{2r} + ig_{2i}$ és $g_4 = g_{4r} + ig_{4i}$. A bilokális potenciált pedig

$$V(x - x', \phi_-, \phi_+) = \tilde{\Theta}(x - x') \left(ih_{11i}\phi_-\phi_+ + i\frac{h_{22i}}{4}\phi_-^2\phi_+^2 \right) \quad (6.31)$$

alakban paraméterezem, ahol a $\tilde{\Theta}$ a lépcsőfüggvény Fourier-transzformáltja. A lokális potenciált a negyedrendű tagig követem. A bilokális potenciálban csak



6.4. ábra. A ϕ^4 modell fázisszerkezete a komplex $g_2(\Lambda)$ síkon, ahol $g_4(\Lambda) = 0.1$, $h_{11}(\Lambda) = -i2g_{11i}(\Lambda)$, $h_{22}(\Lambda) = 0$ és $\eta = 1$, S: szimmetrikus fázis, SB: szimmetriasértett fázis. Az összefont fázisokat E indexszel jelölöm.

időbeli nem-lokálitást veszek figyelembe, azt is a lehető legegyszerűbb alakban, egy lépcsőfüggvény formájában. A CTP szimmetria miatt, ami a két időtengely felcserélésére vonatkozó szimmetria, a bilokalitás következtében megjelenő nyílt csatolások tisztán képzetesek.

A levonási pontnak egy Lorentz görbét választok, mert ez a propagátor pólusa okozta szingularitást feloldja. Impulzustérben az IR tér alakja $\phi_{\omega, \mathbf{p}}^{(s)} = \Phi_{\pm}(2\pi)^4 \delta(\mathbf{p}) \rho_{\omega}$, ahol

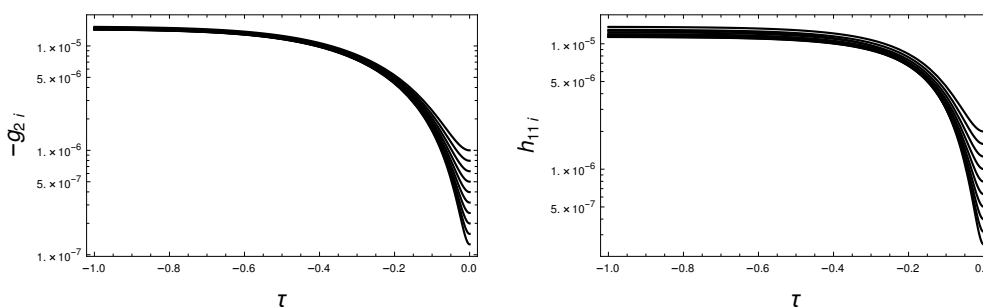
$$\rho_{\omega} = \frac{\eta}{2\pi} \left[\frac{1}{(\omega - \omega_s)^2 + \eta^2} + \frac{1}{(\omega + \omega_s)^2 + \eta^2} \right], \quad (6.32)$$

továbbá a levonási pont energiáját $\omega_s = c_s \sqrt{k^2 + g_{2r}}$ alakban írom fel, egy $c_s \geq 1$ faktor szerepel benne, hogy a pólus fölé kerüljön a levonási pont. Az η paraméter regularizálja a hullámcsomagot. Ha $\eta \rightarrow 0$, akkor megközelítjük a síkhullámot.

A megoldásokban 4 kérdésre keresem a választ: (1) az elmélet fázisszerkezete, (2) a zárt elmélet határeset, (3) nyílt csatolások relevanciája és (4) a renormálhatóság.

Az elmélet fázisszerkezete

A beta függvények struktúrája azt mutatja, hogy a lokális csatolások a nyílt csatolásoktól függetlenül fejlődnek, ezért a Minkowski-tér-időben kapott eredményeket kapom vissza. A nyílt csatolások evolúciója viszont teljesen új. Ha ezek a csatolások felnőnek, az annak a jele, hogy az UV-IR összefonódás erős. A csatolások trajektóriái alapján a 6.4 ábrán látható fázisdiagramot rajzolhatom le. Az S és SB fázis a lokális csatolásokból kapott fázisok, ahol a nyílt csatolások nem játszanak különösebb szerepet. Ellenben az S_E fázisban a nyílt csatolások divergálnak, fázis



6.5. ábra. A zárt limesz trajektóriája, az $\epsilon \rightarrow 0$ határesetben, az ϵ -t az $-10^{-6} < \epsilon < -10^{-7}$ intervallumból vettem a szimmetrikus fázisban, ahol kezdetben $g_2(\Lambda) = 0.1 - i\epsilon$, $g_4(\Lambda) = 0.1$, $h_{11}(\Lambda) = -i2\epsilon$, $h_{22}(\Lambda) = 0$, $\eta = 9.2$.

szimmetrikus, mert g_{2r} pozitív marad, azonban a h_{11i} és h_{22i} nyílt csatolások egy kritikus skálán divergensekké válnak. Ez a szimmetrikus-összefonott fázis. Az SB_E a szimmetriasértett-összefonott fázis, ahol a nyílt csatolások divergálnak, és a g_{2r} negatív marad. Az eredmény azt mutatja, hogy az összefonódás következtében gazdagodik a fázisszerkezet, két új fázist találtam.

A zárt elmélet határeset

Az RG módszer nyílt rendszerek vizsgálatára alkalmas, azonban eddig szinte kizárólag csak zárt rendszerekre alkalmazták. Fontos megjegyezni arról, hogy ha vesszük a zárt limeszt, akkor visszakapjuk a korábbi eredményeket. A limeszképzést a $\epsilon = -g_{2i} = h_{11i}/2 \rightarrow 0$ és $g_{4i} = h_{22i} = 0$ paraméterválasztással kaphatjuk meg. Keressük azt az η -t, ahol nincs ϵ -függés. Ez azt mutatja, hogy a nyílt csatolások ebben a határesetben soha nem kapnak jelentős szerepet. Az eredményeket a 6.5 ábrán mutatom be. A $-g_{2i}$ és h_{11i} csatolások kezdeti értékei egy nagyságrendnyi intervallumot ölelnek fel, az IR-ben ezek egy közös értékhez konvergálnak, ami azt mondja, hogy a nyílt rendszer egyetlen zárt rendszer határesetbe fut bele az evolúció során. Az eredményem azt mutatja, hogy egyértelműen létezik a zárt elmélet határeset.

Nyílt csatolások relevanciája

Az első pontban már láthattuk, hogy létezik két olyan fázis is (az S_E és SB_E), ahol az összefonódás dominál. Ebben a pontban azt vizsgálom, hogy milyen a nyílt csatolások skálázása. Két csatolást vizsgáltam, a h_{11i} -t és a h_{22i} -t. A dimenziójuk alapján előbbi releváns, utóbbi marginális, utóbbinál szükséges vizsgálni a relevancia kérdését. Ehhez széles tartományban vett kezdeti értékeket választva azt nézzük, hogy az IR-ben konvergálnak egymáshoz vagy divergálnak egymástól a trajektóriák.

A tapasztalatok alapján tovább távolodnak egymástól a trajektóriák, tehát a h_{22i} szintén releváns csatolás. Mivel minden releváns csatolást figyelembe kell vennünk az RG evolúció során, ez is alátámasztja, hogy a nyílt csatolások nélkül nem teljes az evolúció leírása.

Renormálhatóság

A ϕ^4 elmélet 4d-ben euklideszi formalizmusban funkcionálisan nem renormálható, mert a g_4 csatolás egy véges k skálán az UV Landau pólusnál divergál, ezt nevezzük trivialitási problémának. Felvethető a kérdés, hogy a nyílt dinamika módosítja-e ezt a képet? Ehhez az UV irányban kell a blokkosítást végrehajtani. A h_{22i} -nek kis kezdeti értéket adva az UV irányban azt kellene látni, hogy csökken a g_4 csatolás, ezzel szemben azonban azt kapom, hogy a Landau-pólushoz hasonlóan szingulárisává válik. Ezek szerint a nyílt dinamika nem oldja meg a trivialitási problémát.

Összefoglalásként fontosnak tartom megjegyezni, hogy az RG módszer nyílt dinamikájú általánosítása olyan hiányosságokra hívja fel a figyelmet a módszerben, amelyet pótolnunk kell. A számolást csak a lehető legegyszerűbb realiztikus modellnél sikerült végrehajtani. A propagátor ugyan Lorentz-szimmetrikus, abban a Dirac-delta és a nem-lokálitást eredményező lépcsőfüggvény található, azonban a disztribúciókkal történő számolás sok nehézséget okoz, szerencsésebb volna a propagátor inverzét a frekvenciában kifejtteni, amiben megjelenne a szokásos kvadratikus tag mellett egy lineáris tag is. Ebben az irányban érdemes a számolást folytatni. A cél a QED nyílt dinamikájának megismerése.

Éles levágást használva elvégeztem az egykomponensű ϕ^4 modell RG analízisét zárt időtengelyes formalizmusban [224]. A formalizmussal figyelembe vehettem az UV és IR módusok közötti összefonódást, amelynek a járulékai a tradicionális RG formalizmusban nem szerepelnek. Az RG módszer a fizikai rendszert dinamikai szempontból nyílttá teszi, de a lokális csatolásokat követve ezt nem láthatjuk. Az időtengelyeket összekötő nyílt csatolásokat vezettem be, amelyek a szakirodalomban eddig nem szerepeltek. A nyílt csatolások között számos releváns van, amely azt mutatja, hogy az UV-IR összefonódás, a rendszer nyíltsága nem hanyagolható el, továbbá a nyíltság miatt új fázisok jelennek meg.

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom elsőként Dr. Polónyi Jánosnak, aki megszerettette velem a renormálási csoport módszert. A közös munka során több olyan eredeti gondolatot vetett föl, amelyek kidolgozása új elemekkel bővítette a módszert. Nemcsak tudományos területen inspirált, hanem az élet sok más területén is nagy hatással volt a világképemre.

Sokat köszönhetek A közös beszélgetések során kiderült, hogy a renormálás az élet nagyon sok területén megjelenik.

Köszönöm Dr. Sailer Kornélnak, hogy bekapcsolódhattam a Debreceni Egyetem Elméleti Fizikai Tanszékének a kutatómunkájába. Hallgató korom óta kíséri figyelemmel a munkámat és dolgozunk együtt.

Köszönöm Dr. Nagy Ágnesnek, Dr. Vibók Ágnesnek, hogy volt és jelenlegi tanszékvezetőként kiváló munkakörülményeket teremtettek nekem, továbbá az önálló kutatás szabadságát biztosították számomra.

Köszönöm társszerzőimnek az együttműködést. Kiemelem Dr. Nándori Istvánt, akivel gyümölcsöző munkát végeztünk a periodikus modellek renormálása terén.

Köszönöm Dr. Kovács Józsefnek a közös munkát. Ugyan technikai okok miatt nem lehettem a témavezetője, a PhD munkáját az én irányításommal végezte. Köszönöm a végzett doktoranduszomnak, Papné Dr. Steib Imola Pálmának, hogy a doktori munkája során vállalta, hogy olyan témában vegyen részt, amely az RG módszert szokatlan köntösben tárgyalta, ennek minden elvi és technikai nehézségével. Köszönöm a jelenlegi doktoranduszomnak Gégény Flóra Enikőnek az eddigi közös munkát, akivel eljutottunk odáig, hogy a PhD dolgozatát elkészítse.

Köszönöm Kertészné Molnár Zsuzsának, a tanszék munkatársának, a munkámat megkönnyítő segítségét.

Köszönöm Nagy Erikának és Czégény Mártának a dolgozat gondos áttekintését.

Hálával tartozom a családomnak, elsősorban a feleségemnek, Németi Editnek a folyamatos támogatásért.

Nagy Sándor

Irodalomjegyzék

- [1] K. G. Wilson, „The renormalization group and critical phenomena,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 55, pp. 583–600, 1983.
- [2] J. Polonyi, „Lectures on the functional renormalization group method,” *Central Eur.J.Phys.*, vol. 1, pp. 1–71, 2003.
- [3] N. Tetradis and C. Wetterich, „The high temperature phase transition for ϕ^4 theories,” *Nucl. Phys. B*, vol. 398, pp. 659–696, 1993.
- [4] D. F. Litim, „Optimized renormalization group flows,” *Phys.Rev.*, vol. D64, p. 105007, 2001.
- [5] T. R. Morris, „The Exact renormalization group and approximate solutions,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A9, pp. 2411–2450, 1994.
- [6] M. Reuter, „Nonperturbative evolution equation for quantum gravity,” *Phys.Rev.*, vol. D57, pp. 971–985, 1998.
- [7] A. Eichhorn, „Steps towards Lorentzian quantum gravity with causal sets,” in *9th International Conference: Spacetime - Matter - Quantum Mechanics: From discrete structures and dynamics to top-down causation (DICE2018) Castiglioncello , Tuscany , Italy, September 17-21, 2018*, 2019.
- [8] W. J. Cunningham and S. Surya, „Dimensionally Restricted Causal Set Quantum Gravity: Examples in Two and Three Dimensions,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 37, no. 5, p. 054002, 2020.
- [9] E. Manrique, S. Rechenberger, and F. Saueressig, „Asymptotically Safe Lorentzian Gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, p. 251302, 2011.
- [10] F. J. Wegner and A. Houghton, „Renormalization group equation for critical phenomena,” *Phys.Rev.*, vol. A8, pp. 401–412, 1973.
- [11] K. G. Wilson, „The Renormalization Group: Critical Phenomena and the Kondo Problem,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 47, p. 773, 1975.

- [12] J. Polchinski, „Renormalization and Effective Lagrangians,” *Nucl.Phys.*, vol. B231, pp. 269–295, 1984.
- [13] C. Wetterich, „Exact evolution equation for the effective potential,” *Phys.Lett.*, vol. B301, pp. 90–94, 1993.
- [14] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, „Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics,” *Phys.Rept.*, vol. 363, pp. 223–386, 2002.
- [15] S. Nagy, J. Polonyi, and I. Steib, „Euclidean scalar field theory in the bilocal approximation,” *Phys. Rev.*, vol. D97, no. 8, p. 085002, 2018.
- [16] I. Steib and S. Nagy, „Renormalization of the bilocal sine-Gordon model,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 34, no. 21, p. 1950117, 2019.
- [17] K. G. Wilson and M. E. Fisher, „Critical exponents in 3.99 dimensions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 28, pp. 240–243, 1972.
- [18] K. G. Wilson and J. B. Kogut, „The Renormalization group and the epsilon expansion,” *Phys. Rept.*, vol. 12, pp. 75–200, 1974.
- [19] S. R. Coleman, „The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model,” *Phys.Rev.*, vol. D11, p. 2088, 1975.
- [20] D. J. Amit, Y. Y. Goldschmidt, and G. Grinstein, „Renormalization Group Analysis of the Phase Transition in the 2D Coulomb Gas, Sine-Gordon Theory and ϕ^4 Model,” *J.Phys.*, vol. A13, p. 585, 1980.
- [21] I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer, „On the renormalization of periodic potentials,” *Phys.Rev.*, vol. D63, p. 045022, 2001.
- [22] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer, „Renormalizable parameters of the sine-Gordon model,” *Phys.Lett.*, vol. B647, pp. 152–158, 2007.
- [23] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi, and K. Sailer, „Quantum censorship in two dimensions,” *Phys.Lett.*, vol. B694, pp. 89–93, 2010.
- [24] R. Daviet and N. Dupuis, „Nonperturbative functional renormalization-group approach to the sine-Gordon model and the Lukyanov-Zamolodchikov conjecture,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 122, no. 15, p. 155301, 2019.
- [25] V. L. Berezinskii, „Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems with a continuous symmetry group. II. Quantum systems,” *Sov. Phys.-JETP*, vol. 34, pp. 610–616, 1972.

- [26] J. Kosterlitz and D. Thouless, „Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems,” *J.Phys.*, vol. C6, pp. 1181–1203, 1973.
- [27] S. Mandelstam, „Soliton Operators for the Quantized Sine-Gordon Equation,” *Phys. Rev.*, vol. D11, p. 3026, 1975. [,138(1975)].
- [28] B.-S. K. Skagerstam, „The Quantum Sine-Gordon Equation and Its Relation to the Thirring Model in Quantum Field Theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 13, p. 2827, 1976.
- [29] B. Schroer and T. Truong, „Equivalence of Sine-Gordon and the Thirring Model and Cumulative Mass Effects,” *Phys. Rev. D*, vol. 15, p. 1684, 1977.
- [30] M. Faber and A. N. Ivanov, „On the equivalence between Sine-Gordon model and Thirring model in the chirally broken phase of the Thirring model,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 20, pp. 723–757, 2001.
- [31] S. Samuel, „The Grand Partition Function in Field Theory with Applications to Sine-Gordon,” *Phys. Rev. D*, vol. 18, p. 1916, 1978.
- [32] A. Ringwald and C. Wetterich, „Average Action for the N Component ϕ^4 Theory,” *Nucl. Phys. B*, vol. 334, pp. 506–526, 1990.
- [33] V. Pangon, S. Nagy, J. Polonyi, and K. Sailer, „Onset of symmetry breaking by the functional RG method,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A26, pp. 1327–1345, 2011.
- [34] S. Kehrein, „Flow equation solution for the weak to strong coupling crossover in the sine-Gordon model,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 83, pp. 4914–4917, 1999.
- [35] J. Kovacs, S. Nagy, I. Nandori, and K. Sailer, „Renormalization of QCD₂,” *JHEP*, vol. 1101, p. 126, 2011.
- [36] S. Nagy, J. Polonyi, and K. Sailer, „Periodic ground state for the charged massive Schwinger model,” *Phys.Rev.*, vol. D70, p. 105023, 2004.
- [37] S. Nagy, „Massless fermions in multi-flavor QED(2),” *Phys.Rev.*, vol. D79, p. 045004, 2009.
- [38] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer, „Generalized universality in the massive sine-Gordon model,” *Phys.Rev.*, vol. D77, p. 025026, 2008.
- [39] J. Alexandre, V. Branchina, and J. Polonyi, „Global renormalization group,” *Phys.Rev.*, vol. D58, p. 016002, 1998.

- [40] I. Marian, U. Jentschura, and I. Nandori, „The numerically optimized regulator and the functional renormalization group,” *J.Phys.*, vol. G41, p. 055001, 2014.
- [41] I. Nandori, I. Marian, and V. Bacso, „Spontaneous symmetry breaking and optimization of functional renormalization group,” *Phys.Rev.*, vol. D89, p. 047701, 2014.
- [42] S. Nagy, J. Polonyi, and K. Sailer, „Effective potential for the massive sine-Gordon model,” *J. Phys. A*, vol. 39, pp. 8105–8117, 2006.
- [43] D. F. Litim and D. Zappala, „Ising exponents from the functional renormalisation group,” *Phys.Rev.*, vol. D83, p. 085009, 2011.
- [44] S. Huang and G. S. Agarwal, „Robust force sensing for a free particle in a dissipative optomechanical system with a parametric amplifier,” *Phys. Rev. A*, vol. 95, no. 2, p. 023844, 2017.
- [45] V. Barsan, „The quartic oscillator in an external field and the statistical physics of highly anisotropic solids,” 2009.
- [46] A. Kowalewska-Kudłaszuk, J. Kalaga, and W. Leoński, „Long-time fidelity and chaos for a kicked nonlinear oscillator system,” *Physics Letters A*, vol. 373, pp. 1334–1340, mar 2009.
- [47] A. Kowalewska-Kudłaszuk, J. K. Kalaga, and W. Leoński, „Wigner-function nonclassicality as indicator of quantum chaos,” *Physical Review E*, vol. 78, dec 2008.
- [48] T. V. Gevorgyan, A. R. Shahinyan, and G. Y. Kryuchkyan, „Generation of fock states and qubits in periodically pulsed nonlinear oscillators,” *Physical Review A*, vol. 85, may 2012.
- [49] C. Skokos, D. O. Krimer, S. Komineas, and S. Flach, „Delocalization of wave packets in disordered nonlinear chains,” *Physical Review E*, vol. 79, may 2009.
- [50] A. Kapulkin and A. K. Pattanayak, „Nonmonotonicity in the quantum-classical transition: Chaos induced by quantum effects,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 074101, Aug 2008.
- [51] J. Finn, K. Jacobs, and B. Sundaram, „Comment on “nonmonotonicity in the quantum-classical transition: Chaos induced by quantum effects”,” *Physical Review Letters*, vol. 102, mar 2009.

- [52] K. Kingsbury, C. Amey, A. Kapulkin, and A. Pattanayak, „Kingsbury et al. reply:,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 119402, Mar 2009.
- [53] C. M. Bender and T. T. Wu, „Anharmonic oscillator,” *Phys. Rev.*, vol. 184, pp. 1231–1260, Aug 1969.
- [54] C. M. Bender, J. E. Mandula, and B. M. McCoy, „Does renormalized perturbation theory diverge?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 24, pp. 681–683, Mar 1970.
- [55] C. M. Bender and T. T. Wu, „Large-order behavior of perturbation theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 27, pp. 461–465, Aug 1971.
- [56] T. Banks, C. M. Bender, and T. T. Wu, „Coupled anharmonic oscillators. i. equal-mass case,” *Phys. Rev. D*, vol. 8, pp. 3346–3366, Nov 1973.
- [57] C. M. Bender and T. T. Wu, „Anharmonic oscillator. ii. a study of perturbation theory in large order,” *Phys. Rev. D*, vol. 7, pp. 1620–1636, Mar 1973.
- [58] C. M. Bender, F. Cooper, G. S. Guralnik, and D. H. Sharp, „Strong-coupling expansion in quantum field theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 19, pp. 1865–1881, Mar 1979.
- [59] C. M. Bender and G. V. Dunne, „Exact solutions to operator differential equations,” *Phys. Rev. D*, vol. 40, pp. 2739–2742, Oct 1989.
- [60] C. M. Bender and G. V. Dunne, „Integration of operator differential equations,” *Phys. Rev. D*, vol. 40, pp. 3504–3511, Nov 1989.
- [61] C. M. Bender and L. M. A. Bettencourt, „Multiple-scale analysis of the quantum anharmonic oscillator,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 4114–4117, Nov 1996.
- [62] C. M. Bender and L. M. A. Bettencourt, „Multiple-scale analysis of quantum systems,” *Phys. Rev. D*, vol. 54, pp. 7710–7723, Dec 1996.
- [63] G. Auberson and M. Capdequi Peyranère, „Quantum anharmonic oscillator in the heisenberg picture and multiple scale techniques,” *Phys. Rev. A*, vol. 65, p. 032120, Feb 2002.
- [64] K. Vlachos, „Variational method for the free-energy approximation of generalized anharmonic oscillators,” *Phys. Rev. A*, vol. 47, pp. 838–846, Feb 1993.

- [65] Y. Zhou, J. D. Mancini, P. F. Meier, and S. P. Bowen, „Variational method for approximating energy levels,” *Phys. Rev. A*, vol. 51, pp. 3337–3339, Apr 1995.
- [66] V. Fessatidis, J. D. Mancini, J. D. Prie, Y. Zhou, and A. Majewski, „Further application of an improved systematic variational method for approximating energy levels,” *Phys. Rev. A*, vol. 60, pp. 1713–1716, Aug 1999.
- [67] R. Jáuregui and J. Récamier, „Iterative bogoliubov transformations and anharmonic oscillators,” *Phys. Rev. A*, vol. 46, pp. 2240–2249, Sep 1992.
- [68] C. R. Handy, „Application of the eigenvalue moment method to the quartic anharmonic double-well oscillator,” *Phys. Rev. A*, vol. 46, pp. 1663–1666, Aug 1992.
- [69] R. N. Chaudhuri and M. Mondal, „Improved hill determinant method: General approach to the solution of quantum anharmonic oscillators,” *Phys. Rev. A*, vol. 43, pp. 3241–3246, Apr 1991.
- [70] R. K. Agrawal and V. S. Varma, „Improved hill determinant method for the solution of quantum anharmonic oscillators,” *Phys. Rev. A*, vol. 49, pp. 5089–5091, Jun 1994.
- [71] T. Hatsuda, T. Kunihiro, and T. Tanaka, „Optimized perturbation theory for wave functions of quantum systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, pp. 3229–3232, Apr 1997.
- [72] H. Meißner and E. O. Steinborn, „Quartic, sextic, and octic anharmonic oscillators: Precise energies of ground state and excited states by an iterative method based on the generalized bloch equation,” *Phys. Rev. A*, vol. 56, pp. 1189–1200, Aug 1997.
- [73] T. Kashiwa, „Auxiliary field method as a powerful tool for nonperturbative study,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 085002, Mar 1999.
- [74] S. Oh, „Quantum computational method of finding the ground-state energy and expectation values,” *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 012326, Jan 2008.
- [75] T. Kunihiro, „Renormalization-group resummation of a divergent series of the perturbative wave functions of the quantum anharmonic oscillator,” *Phys. Rev. D*, vol. 57, pp. R2035–R2039, Feb 1998.
- [76] I. L. Egusquiza and M. A. Valle Basagoiti, „Renormalization-group method for simple operator problems in quantum mechanics,” *Phys. Rev. A*, vol. 57, pp. 1586–1589, Mar 1998.

- [77] V. I. Yukalov, E. P. Yukalova, and S. Gluzman, „Self-similar interpolation in quantum mechanics,” *Phys. Rev. A*, vol. 58, pp. 96–115, Jul 1998.
- [78] M. Frasca, „Ultraviolet analysis of one dimensional quantum systems,” 2002.
- [79] M. A. Martín-Delgado, G. Sierra, and R. M. Noack, „The density matrix renormalization group applied to single-particle quantum mechanics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 32, pp. 6079–6090, aug 1999.
- [80] M. A. Martín-Delgado and G. Sierra, „Density matrix renormalization group approach to an asymptotically free model with bound states,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 1514–1517, Aug 1999.
- [81] A. S. Kapoyannis and N. Tetradis, „Quantum mechanical tunneling and the renormalization group,” *Phys. Lett. A*, vol. 276, pp. 225–232, 2000.
- [82] K.-I. Aoki, A. Horikoshi, M. Taniguchi, and H. Terao, „Non-Perturbative Renormalization Group Analysis in Quantum Mechanics,” *Prog. Theor. Phys.*, vol. 108, no. 3, pp. 571–590, 2002.
- [83] R. Hedden, V. Meden, T. Pruschke, and K. Schönhammer, „A functional renormalization group approach to zero-dimensional interacting systems,” *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 16, pp. 5279–5296, jul 2004.
- [84] H. Gies, „Introduction to the functional RG and applications to gauge theories,” *Lect. Notes Phys.*, vol. 852, pp. 287–348, 2012.
- [85] D. Zappala, „Improving the renormalization group approach to the quantum mechanical double well potential,” *Phys. Lett.*, vol. A290, pp. 35–40, 2001.
- [86] J. Polonyi and K. Sailer, „Renormalization group in the internal space,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 025010, 2005.
- [87] J. Kovacs, S. Nagy, and K. Sailer, „Optimized regulator for the quantized anharmonic oscillator,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 30, no. 12, p. 1550058, 2015.
- [88] I. Nandori, „Functional renormalization group with a compactly supported smooth regulator function,” *JHEP*, vol. 1304, p. 150, 2013.
- [89] S. Nagy, B. Fazekas, L. Juhasz, and K. Sailer, „Critical exponents in quantum Einstein gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D88, no. 11, p. 116010, 2013.
- [90] D. F. Litim, „Optimization of the exact renormalization group,” *Phys. Lett.*, vol. B486, pp. 92–99, 2000.

- [91] J. Kovacs, B. Fazekas, S. Nagy, and K. Sailer, „Quantum-classical transition in the Caldeira-Leggett model,” *Annals Phys.*, vol. 376, pp. 372–381, 2017.
- [92] S. Nagy and K. Sailer, „Functional renormalization group for quantized anharmonic oscillator,” *Annals Phys.*, vol. 326, pp. 1839–1876, 2011.
- [93] S. Nagy, I. Nandori, J. Polonyi, and K. Sailer, „Functional renormalization group approach to the sine-Gordon model,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 102, p. 241603, 2009.
- [94] S. Kehrein, „Flow equation approach to the sine-Gordon model,” *Nucl.Phys.*, vol. B592, pp. 512–562, 2001.
- [95] S. Nagy and K. Sailer, „Interplay of fixed points in scalar models,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. A28, p. 1350130, 2013.
- [96] F. Kun and S. Nagy, „Damage process of a fiber bundle with a strain gradient,” *Phys. Rev. E*, vol. 77, p. 016608, Jan 2008.
- [97] T. Byrnes, P. Sriganesh, R. J. Bursill, and C. J. Hamer, „Density matrix renormalization group approach to the massive Schwinger model,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 013002, 2002.
- [98] A. Buzdin and D. Feinberg, „Electromagnetic interaction of vortices in layered superconducting structures,” *Journal de Physique*, vol. 51, no. 17, pp. 1971–1978, 1990.
- [99] A. Buzdin and D. Feinberg, „Parallel field penetration in a layered superconductor,” *Physics Letters A*, vol. 165, no. 3, pp. 281–284, 1992.
- [100] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, „Vortices in high-temperature superconductors,” *Reviews of modern physics*, vol. 66, no. 4, p. 1125, 1994.
- [101] I. Nandori, S. Nagy, K. Sailer, and U. Jentschura, „Renormalization-group analysis of layered Sine-Gordon type models,” *Nucl.Phys.*, vol. B725, p. 467, 2005.
- [102] U. Jentschura, I. Nandori, and J. Zinn-Justin, „Effective action and phase structure of multi-layer sine-Gordon type models,” *Annals Phys.*, vol. 321, pp. 2647–2659, 2006.
- [103] E. Babaev, „Unconventional rotational responses of hadronic superfluids in a neutron star caused by strong entrainment and a σ - hyperon gap,” *Physical review letters*, vol. 103, no. 23, p. 231101, 2009.

- [104] J. Smiseth, E. Smørgrav, E. Babaev, and A. Sudbø, „Field-and temperature-induced topological phase transitions in the three-dimensional n-component london superconductor,” *Physical Review B*, vol. 71, no. 21, p. 214509, 2005.
- [105] S. Nagy, „Degeneracy induced scaling of the correlation length for periodic models,” *Nucl.Phys.*, vol. B864, pp. 226–240, 2012.
- [106] J. Kovacs, S. Nagy, and K. Sailer, „Asymptotic safety in the sine-Gordon model,” *Phys. Rev.*, vol. D91, no. 4, p. 045029, 2015.
- [107] M. Grater and C. Wetterich, „Kosterlitz-Thouless phase transition in the two-dimensional linear sigma model,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 75, pp. 378–381, 1995.
- [108] G. Von Gersdorff and C. Wetterich, „Nonperturbative renormalization flow and essential scaling for the Kosterlitz-Thouless transition,” *Phys.Rev.*, vol. B64, p. 054513, 2001.
- [109] T. R. Morris, „The Renormalization group and two-dimensional multicritical effective scalar field theory,” *Phys. Lett. B*, vol. 345, pp. 139–148, 1995.
- [110] S. Nagy, „Critical exponents of the O(N) model in the infrared limit from functional renormalization,” *Phys.Rev.*, vol. D86, p. 085020, 2012.
- [111] E. Brezin and J. Zinn-Justin, „Renormalization of the nonlinear sigma model in $2 + \epsilon$ dimensions. Application to the Heisenberg ferromagnets,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 36, pp. 691–694, 1976.
- [112] E. Brezin, J. Zinn-Justin, and J. Le Guillou, „Renormalization of the Nonlinear Sigma Model in (Two + Epsilon) Dimension,” *Phys.Rev.*, vol. D14, p. 2615, 1976.
- [113] A. Codello and R. Percacci, „Fixed Points of Nonlinear Sigma Models in $d > 2$,” *Phys.Lett.*, vol. B672, pp. 280–283, 2009.
- [114] R. Flore, A. Wipf, and O. Zanusso, „Functional renormalization group of the non-linear sigma model and the $O(N)$ universality class,” *Phys. Rev. D*, vol. 87, no. 6, p. 065019, 2013.
- [115] D. J. Gross and A. Neveu, „Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories,” *Phys.Rev.*, vol. D10, p. 3235, 1974.
- [116] M. Thies, „Analytical solution of the Gross-Neveu model at finite density,” *Phys.Rev.*, vol. D69, p. 067703, 2004.

- [117] J. Braun, H. Gies, and D. D. Scherer, „Asymptotic safety: a simple example,” *Phys.Rev.*, vol. D83, p. 085012, 2011.
- [118] P. Castorina, M. Mazza, and D. Zappala, „Renormalization group analysis of the three-dimensional Gross-Neveu model at finite temperature and density,” *Phys.Lett.*, vol. B567, pp. 31–38, 2003.
- [119] S. Hands, S. Kim, and J. B. Kogut, „The U(1) Gross-Neveu model at nonzero chemical potential,” *Nucl.Phys.*, vol. B442, pp. 364–390, 1995.
- [120] V. Schon and M. Thies, „Emergence of Skyrme crystal in Gross-Neveu and ’t Hooft models at finite density,” *Phys.Rev.*, vol. D62, p. 096002, 2000.
- [121] J. Braun, „Fermion Interactions and Universal Behavior in Strongly Interacting Theories,” *J.Phys.*, vol. G39, p. 033001, 2012.
- [122] S. Nagy, „Lectures on renormalization and asymptotic safety,” *Annals Phys.*, vol. 350, pp. 310–346, 2014.
- [123] N. Dupuis, L. Canet, A. Eichhorn, W. Metzner, J. M. Pawłowski, M. Tissier, and N. Wschebor, „The nonperturbative functional renormalization group and its applications,” *Phys. Rept.*, vol. 910, pp. 1–114, 2021.
- [124] S. Weinberg, *Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation. In General Relativity: An Einstein centenary survey, ed. S. W. Hawking and W. Israel.* Cambridge University Press, 1979.
- [125] F. Gégény and S. Nagy, „Renormalization of the conformally reduced gravity with bilocal potential,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 35, no. 22, p. 2050123, 2020.
- [126] A. Bonanno and G. Lacagnina, „Spontaneous symmetry breaking and proper time flow equations,” *Nucl. Phys. B*, vol. 693, pp. 36–50, 2004.
- [127] A. Bonanno, S. Lippoldt, R. Percacci, and G. P. Vacca, „On Exact Proper Time Wilsonian RG Flows,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 80, no. 3, p. 249, 2020.
- [128] A. Bonanno and M. Reuter, „Proper time flow equation for gravity,” *JHEP*, vol. 02, p. 035, 2005.
- [129] S. Nagy, „Gravitáció és renormálás,” *Fizikai Szemle*, vol. 5, pp. 152–157, 2023.
- [130] F. Saueressig, „The Functional Renormalization Group in Quantum Gravity,” 2 2023.

- [131] D. F. Litim, „Fixed Points of Quantum Gravity and the Renormalisation Group,” *PoS*, vol. QG-Ph, p. 024, 2007.
- [132] S. Nagy, J. Krizsan, and K. Sailer, „Infrared fixed point in quantum Einstein gravity,” *JHEP*, vol. 1207, p. 102, 2012.
- [133] J. M. Pawłowski, „Aspects of the functional renormalisation group,” *Annals Phys.*, vol. 322, pp. 2831–2915, 2007.
- [134] L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, and J. Vidal, „Optimization of the derivative expansion in the nonperturbative renormalization group,” *Phys.Rev.*, vol. D67, p. 065004, 2003.
- [135] D. F. Litim, „Fixed points of quantum gravity,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 92, p. 201301, 2004.
- [136] P. Fischer and D. F. Litim, „Fixed points of quantum gravity in extra dimensions,” *Phys.Lett.*, vol. B638, pp. 497–502, 2006.
- [137] D. F. Litim, „On fixed points of quantum gravity,” *AIP Conf.Proc.*, vol. 841, pp. 322–329, 2006.
- [138] H. W. Hamber, „Phases of 4-d simplicial quantum gravity,” *Phys.Rev.*, vol. D45, pp. 507–512, 1992.
- [139] H. W. Hamber, „Scaling Exponents for Lattice Quantum Gravity in Four Dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 92, no. 6, p. 064017, 2015.
- [140] S. Nagy, B. Fazekas, Z. Peli, K. Sailer, and I. Steib, „Regulator dependence of fixed points in quantum Einstein gravity with R^2 truncation,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 35, no. 5, p. 055001, 2018.
- [141] M. Reuter and H. Weyer, „Background Independence and Asymptotic Safety in Conformally Reduced Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D79, p. 105005, 2009.
- [142] M. Reuter and H. Weyer, „The Role of Background Independence for Asymptotic Safety in Quantum Einstein Gravity,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 41, pp. 983–1011, 2009.
- [143] J.-E. Daum and M. Reuter, „The Effective Potential of the Conformal Factor in Quantum Einstein Gravity,” *PoS*, vol. CLAQG08, p. 013, 2011.
- [144] P. F. Machado and R. Percacci, „Conformally reduced quantum gravity revisited,” *Phys. Rev.*, vol. D80, p. 024020, 2009.

- [145] A. Bonanno and F. Guarnieri, „Universality and Symmetry Breaking in Conformally Reduced Quantum Gravity,” *Phys.Rev.*, vol. D86, p. 105027, 2012.
- [146] J. A. Dietz and T. R. Morris, „Background independent exact renormalization group for conformally reduced gravity,” *JHEP*, vol. 04, p. 118, 2015.
- [147] M. Niedermaier and M. Reuter, „The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity,” *Living Rev.Rel.*, vol. 9, p. 5, 2006.
- [148] S. Nagy, K. Sailer, and I. Steib, „Renormalization of Lorentzian conformally reduced gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 36, no. 15, p. 155004, 2019.
- [149] M. Reuter and F. Saueressig, „Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation,” *Phys.Rev.*, vol. D65, p. 065016, 2002.
- [150] S. Nagy, J. Polonyi, and I. Steib, „Quantum renormalization group,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 2, p. 025008, 2016.
- [151] J. Polonyi, „Stability and causality of multi-local theories,” *EPL*, vol. 120, no. 4, p. 40005, 2017.
- [152] J. Polonyi, „Boost invariant regulator for field theories,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A34, no. 03n04, p. 1950017, 2019.
- [153] A. Eichhorn, „Towards coarse graining of discrete Lorentzian quantum gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 35, no. 4, p. 044001, 2018.
- [154] S. Rechenberger and F. Saueressig, „A functional renormalization group equation for foliated spacetimes,” *JHEP*, vol. 03, p. 010, 2013.
- [155] J. Biemans, A. Platania, and F. Saueressig, „Quantum gravity on foliated spacetimes: Asymptotically safe and sound,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 8, p. 086013, 2017.
- [156] J. Biemans, A. Platania, and F. Saueressig, „Renormalization group fixed points of foliated gravity-matter systems,” *JHEP*, vol. 05, p. 093, 2017.
- [157] W. B. Houthoff, A. Kurov, and F. Saueressig, „Impact of topology in foliated Quantum Einstein Gravity,” *Eur. Phys. J.*, vol. C77, p. 491, 2017.
- [158] A. Platania and F. Saueressig, „Functional Renormalization Group Flows on Friedman–Lemaître–Robertson–Walker backgrounds,” *Found. Phys.*, vol. 48, no. 10, pp. 1291–1304, 2018.

- [159] A. Baldazzi, R. Percacci, and V. Skrinjar, „Quantum fields without Wick rotation,” *Symmetry*, vol. 11, no. 3, p. 373, 2019.
- [160] B. Knorr, „Lorentz symmetry is relevant,” *Phys. Lett. B*, vol. 792, pp. 142–148, 2019.
- [161] J. Braun *et al.*, „Renormalised spectral flows,” *SciPost Phys. Core*, vol. 6, p. 061, 2023.
- [162] P. Horava, „Membranes at Quantum Criticality,” *JHEP*, vol. 03, p. 020, 2009.
- [163] P. Horava, „Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 161301, 2009.
- [164] P. Horava, „Quantum Gravity at a Lifshitz Point,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 084008, 2009.
- [165] A. Contillo, S. Rechenberger, and F. Saueressig, „Renormalization group flow of Horava-Lifshitz gravity at low energies,” *JHEP*, vol. 12, p. 017, 2013.
- [166] G. D’Odorico, F. Saueressig, and M. Schutten, „Asymptotic Freedom in Horava-Lifshitz Gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, no. 17, p. 171101, 2014.
- [167] A. O. Barvinsky, D. Blas, M. Herrero-Valea, S. M. Sibiryakov, and C. F. Steinwachs, „Renormalization of Horava gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 93, no. 6, p. 064022, 2016.
- [168] G. D’Odorico, J.-W. Goossens, and F. Saueressig, „Covariant computation of effective actions in Horava-Lifshitz gravity,” *JHEP*, vol. 10, p. 126, 2015.
- [169] A. O. Barvinsky, M. Herrero-Valea, and S. M. Sibiryakov, „Towards the renormalization group flow of Horava gravity in $(3 + 1)$ dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, no. 2, p. 026012, 2019.
- [170] A. Eichhorn, A. Platania, and M. Schiffer, „Lorentz invariance violations in the interplay of quantum gravity with matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, no. 2, p. 026007, 2020.
- [171] F. Gégény, S. Nagy, and K. Sailer, „On the Lorentz symmetry in conformally reduced quantum gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 40, no. 4, p. 045004, 2023.
- [172] J. Polonyi, „Quantum-classical crossover in electrodynamics,” *Phys. Rev.*, vol. D74, p. 065014, 2006.

- [173] H. Gies, B. Knorr, S. Lippoldt, and F. Saueressig, „Gravitational Two-Loop Counterterm Is Asymptotically Safe,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, no. 21, p. 211302, 2016.
- [174] J. Polonyi, „Effective dynamics of a classical point charge,” *Annals Phys.*, vol. 342, pp. 239–263, 2014.
- [175] J. Polonyi, „Classical and quantum effective theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 6, p. 065010, 2014.
- [176] J. Polonyi, „The Abraham–Lorentz force and electrodynamics at the classical electron radius,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 34, no. 15, p. 1950077, 2019.
- [177] J. S. Schwinger, „Brownian motion of a quantum oscillator,” *J. Math. Phys.*, vol. 2, pp. 407–432, 1961.
- [178] L. V. Keldysh, „Diagram technique for nonequilibrium processes,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 47, pp. 1515–1527, 1964. [Sov. Phys. JETP20,1018(1965)].
- [179] J. S. Schwinger, *PARTICLES, SOURCES, AND FIELDS. VOL. 3*. 1989.
- [180] H. D. Zeh, „On the interpretation of measurement in quantum theory,” *Foundations of Physics*, vol. 1, pp. 69–76, 1970.
- [181] W. H. Zurek, „Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?,” *Physical review D*, vol. 24, no. 6, p. 1516, 1981.
- [182] E. Joos and H. D. Zeh, „The emergence of classical properties through interaction with the environment,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 59, pp. 223–243, 1985.
- [183] W. H. Zurek, „Reduction of the wavepacket: How long does it take?,” in *Frontiers of nonequilibrium statistical physics*, pp. 145–149, Springer, 1986.
- [184] M. Gell-Mann and J. B. Hartle, „Classical equations for quantum systems,” *Physical Review D*, vol. 47, no. 8, p. 3345, 1993.
- [185] R. B. Griffiths, „Consistent histories and the interpretation of quantum mechanics,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 36, pp. 219–272, 1984.
- [186] R. Omnes, „Logical reformulation of quantum mechanics. i. foundations,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 53, pp. 893–932, 1988.
- [187] J. J. Halliwell, „A review of the decoherent histories approach to quantum mechanics,” *arXiv preprint gr-qc/9407040*, 1994.

- [188] A. Kamenev, *Field theory of non-equilibrium systems*. Cambridge University Press, 2023.
- [189] J. Rammer, „Quantum field theory of non-equilibrium states,” *Quantum Field Theory of Non-equilibrium States*, 2011.
- [190] U. Weiss, *Quantum dissipative systems*. World Scientific, 2012.
- [191] A. D. Zaikin and D. Golubev, *Dissipative Quantum Mechanics of Nanostructures: Electron Transport, Fluctuations, and Interactions*. CRC Press, 2019.
- [192] L. Sieberer, M. Buchhold, and S. Diehl, „Keldysh Field Theory for Driven Open Quantum Systems,” *Rept. Prog. Phys.*, vol. 79, no. 9, p. 096001, 2016.
- [193] H. Umezawa, H. Matsumoto, and M. Tachiki, „Thermo field dynamics and condensed states,” 1982.
- [194] E. A. Calzetta and B.-L. B. Hu, *Nonequilibrium Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2008.
- [195] R. P. Feynman and F. Vernon Jr, „The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system,” *Annals of physics*, vol. 281, no. 1-2, pp. 547–607, 2000.
- [196] F. Lombardo and F. D. Mazzitelli, „Coarse graining and decoherence in quantum field theory,” *arXiv preprint hep-th/9508052*.
- [197] D. A. Dalvit and F. D. Mazzitelli, „Exact ctp renormalization group equation for the coarse-grained effective action,” *Physical Review D*, vol. 54, no. 10, p. 6338, 1996.
- [198] C. Anastopoulos, „Coarse grainings and irreversibility in quantum field theory,” *Physical Review D*, vol. 56, no. 2, p. 1009, 1997.
- [199] R. Gezzi, T. Pruschke, and V. Meden, „Functional renormalization group for nonequilibrium quantum many-body problems,” *Physical Review B*, vol. 75, no. 4, p. 045324, 2007.
- [200] A. Mitra, S. Takei, Y. B. Kim, and A. Millis, „Nonequilibrium quantum criticality in open electronic systems,” *Physical review letters*, vol. 97, no. 23, p. 236808, 2006.
- [201] S. G. Jakobs, V. Meden, and H. Schoeller, „Nonequilibrium functional renormalization group for interacting quantum systems,” *Physical review letters*, vol. 99, no. 15, p. 150603, 2007.

- [202] J. Zanella and E. Calzetta, „Renormalization group study of damping in nonequilibrium field theory,” *arXiv preprint hep-th/0611222*, 2006.
- [203] J. Zanella and E. Calzetta, „Inflation and nonequilibrium renormalization group,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, no. 25, p. 7037, 2007.
- [204] E. A. Calzetta, B. L. Hu, and F. D. Mazzitelli, „Coarse-grained effective action and renormalization group theory in semiclassical gravity and cosmology,” *Physics Reports*, vol. 352, no. 4-6, pp. 459–520, 2001.
- [205] B. Bergerhoff and J. Reingruber, „Thermal renormalization group equations and the phase transition of scalar $O(N)$ theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 60, p. 105036, 1999.
- [206] L. Canet and H. Chaté, „A non-perturbative approach to critical dynamics,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 40, no. 9, p. 1937, 2007.
- [207] D. Mesterházy, J. H. Stockemer, L. F. Palhares, and J. Berges, „Dynamic universality class of model c from the functional renormalization group,” *Physical Review B*, vol. 88, no. 17, p. 174301, 2013.
- [208] L. M. Sieberer, S. D. Huber, E. Altman, and S. Diehl, „Dynamical critical phenomena in driven-dissipative systems,” *Physical review letters*, vol. 110, no. 19, p. 195301, 2013.
- [209] T. Gasenzer, J. Berges, M. G. Schmidt, and M. Seco, „Non-perturbative dynamical many-body theory of a Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A*, vol. 72, p. 063604, 2005.
- [210] J. Berges and T. Gasenzer, „Quantum versus classical statistical dynamics of an ultracold Bose gas,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 033604, 2007.
- [211] L. M. Sieberer, S. D. Huber, E. Altman, and S. Diehl, „Nonequilibrium functional renormalization for driven-dissipative Bose-Einstein condensation,” *Phys. Rev. B*, vol. 89, no. 13, p. 134310, 2014.
- [212] J. M. Pawłowski and N. Strodthoff, „Real time correlation functions and the functional renormalization group,” *Phys. Rev. D*, vol. 92, no. 9, p. 094009, 2015.
- [213] S. Huelsmann, S. Schlichting, and P. Scior, „Spectral functions from the real-time functional renormalization group,” *Phys. Rev. D*, vol. 102, no. 9, p. 096004, 2020.

- [214] V. Kasper, F. Hebenstreit, and J. Berges, „Fermion production from real-time lattice gauge theory in the classical-statistical regime,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 2, p. 025016, 2014.
- [215] J. Zanella and E. Calzetta, „Renormalization group and nonequilibrium action in stochastic field theory,” *Physical Review E*, vol. 66, no. 3, p. 036134, 2002.
- [216] J. Berges and G. Hoffmeister, „Nonthermal fixed points and the functional renormalization group,” *Nuclear Physics B*, vol. 813, no. 3, pp. 383–407, 2009.
- [217] T. Gasenzer and J. M. Pawłowski, „Towards far-from-equilibrium quantum field dynamics: A functional renormalisation-group approach,” *Phys. Lett. B*, vol. 670, pp. 135–140, 2008.
- [218] T. Gasenzer, S. Keßler, and J. M. Pawłowski, „Far-from-equilibrium quantum many-body dynamics,” *The European Physical Journal C*, vol. 70, no. 1-2, pp. 423–443, 2010.
- [219] L. Corell, A. K. Cyrol, M. Heller, and J. M. Pawłowski, „Flowing with the temporal renormalization group,” *Phys. Rev. D*, vol. 104, no. 2, p. 025005, 2021.
- [220] A. Baidya, C. Jana, R. Loganayagam, and A. Rudra, „Renormalization in open quantum field theory. part i. scalar field theory,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2017, no. 11, pp. 1–84, 2017.
- [221] O. J. Rosten, „Fundamentals of the Exact Renormalization Group,” *Phys.Rept.*, vol. 511, pp. 177–272, 2012.
- [222] F. Gégény and S. Nagy, „Complex couplings in renormalization,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 37, no. 11n12, p. 2250061, 2022.
- [223] I. Steib, S. Nagy, and J. Polonyi, „Renormalization in Minkowski space–time,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 36, no. 05, p. 2150031, 2021.
- [224] S. Nagy and J. Polonyi, „Renormalizing Open Quantum Field Theories,” *Universe*, vol. 8, no. 2, p. 127, 2022.

sandornagy_161_23