krajcsi_202_24

Az elemi szimbolikus számfeldolgozás mentális reprezentációi

(Mental representation for simple symbolic number processing)

Akadémiai doktori értekezés tézisei

Krajcsi Attila

2024

I. Az elemi számfeldolgozás klasszikus modellje

A számok és általában a matematika megértése nemcsak a formális oktatásban, hanem a mindennapi életben is alapvető fontosságú (Butterworth, 1999; Dehaene, 1997; Garcia-Retamero és mtsai., 2019). A matematikai gondolkodás tanulmányozása során a kognitív tudomány egyik sarokköve a számok megértését támogató alapvető reprezentációk megtalálása.

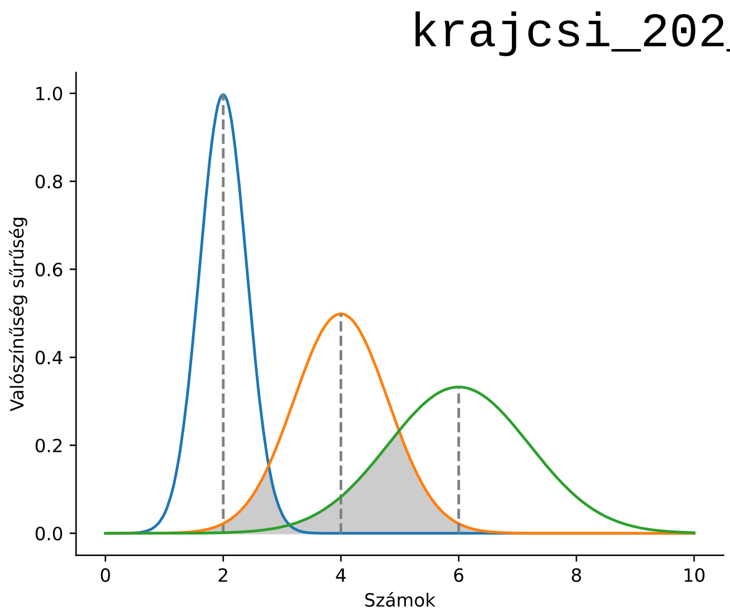
Az elmúlt évtizedekben a numerikus megismerés területének talán legdominánsabb kutatási témája egy evolúciósan régi és egyszerű reprezentáció szerepe, és annak tulajdonságai voltak. Ez a rendszer kulcsszerepet játszhat a számok megértésében és a magas szintű matematikai problémamegoldásban. A jelen dolgozat azt tárgyalja, hogy ez a domináns modell potenciálisan miért helytelen mégis, illetve egy alternatív magyarázat lehetőségét veszi számba.

Az analóg számosság rendszer (ASZR)

A numerikus megismerés egyik legszélesebb körben vizsgált mentális komponensét 1967-ben írták le először. Alapvető tanulmányukban Moyer és Landauer (1967) arra kérte a résztvevőket, hogy egyjegyű arab számokat hasonlítsanak össze, jelezve, hogy a két szám közül melyik a nagyobb. Egy nagyon egyszerű hatást, a **távolsághatást** írtak le: minél nagyobb volt a két érték közötti numerikus távolság, annál könnyebb volt a feladat hibázási arányban és a reakcióidőben mérve. Az elemzések azt mutatták, hogy a viselkedési teljesítmény nem egyszerűen az összehasonlítandó értékek numerikus távolságától, hanem inkább a két érték arányától függött. Ezt az **arányhatást** úgy értelmezték, hogy a számösszehasonlítások engedelmeskednek a pszichofizikai Weber elvnek, így egy evolúciósan régi és egyszerű reprezentációt tárva fel, amely a matematikai gondolkodást a szimbolikus számokkal való munka során is támogatja. Míg a hétköznapi felfogás azt feltételezi, hogy a matematikai gondolkodás egy magas szintű, humán-specifikus, kulturális konstrukció, az összehasonlítási arányhatás felfedezése arra utalt, hogy a matematikai gondolkodás egy evolúciósan ősi rendszerben gyökerezik. Nem csoda, hogy ez a fontos és figyelemre méltó felfedezés a Nature folyóiratban jelent meg.

Az összehasonlítási arányhatás kezdeti leírása után empirikus munkák sora erősítette meg, hogy ez az egyszerű számreprezentáció nemcsak felnőtteknél, hanem csecsemőknél (Feigenson és mtsai., 2004; Libertus & Brannon, 2010; Odic & Starr, 2018) és állatoknál (Brannon & Merritt, 2011; Parrish & Beran, 2022) is kimutatható.

Ennek a reprezentációnak egy egyszerű lehetséges megvalósítása, amely **analóg (vagy közelítő) számosság rendszer** (**ASZR**, angolul analog/approximate number system, ANS) elnevezést kapta, egy olyan lineáris reprezentáció, ahol a szám reprezentációja zajos, és a zaj arányos a reprezentált értékkel (1. ábra) (Dehaene, 2007). Más szóval, minél nagyobb a szám, annál zajosabb az érték reprezentációja. A modell szerint két szám összehasonlításakor a viselkedéses teljesítmény a két reprezentált érték reprezentációs átfedésétől függ (Dehaene, 2007).



1 . ábra A számreprezentáció egy lehetséges implementációja az ASZR elméletben.

Ez az egyszerű reprezentáció később a numerikus megismerés sarokkövévé vált. Először is, egy sor kognitív hatást és jelenséget tudott megmagyarázni. Mint fentebb kifejtettük, magyarázatot adhat az aranyhatásra. Megmagyarázza a távolsághatást is, ahol a távolsághatás az arányhatás alternatív mérési formájának tekinthető. Hasonlóképpen, a **nagysághatás** (a nagyobb értékek összehasonlítása nehezebb, mint a kisebb értékek összehasonlítása) szintén az arányhatás másik mérési formájaként értelmezhető. Más szóval, ha feltételezzük az arányhatást, a távolság- és nagysághatásoknak is meg kell jelenniük, mert a távolság és nagyság tulajdonságok korrelálnak a számpárok aránytulajdonságával. Következésképpen az összehasonlítási arány-, távolság- és nagysághatások ugyanazzal a mechanizmussal magyarázhatók.

Egy másik példaként az ASZR megmagyarázhatja a numerikus és a térbeli információk közötti interferenciát. A numerikus-téri interferencia egyik kiemelkedő példája a **SNARC hatás** (Spatial-Numerical Association of Response Codes, vagyis válaszkódok téri-numerikus asszociációja). Egy szám párossági döntésekor (azaz, hogy a szám páros vagy páratlan), a résztvevők nagyobb értékekre gyorsabban reagálnak a jobb válaszgombbal, mint a bal válaszgombbal, és kisebb értékekre gyorsabban reagálnak a bal válaszgombbal, mint a jobb válaszgombbal (legalábbis a balról jobbra olvasó kultúrákban) (Dehaene és mtsai., 1993). A SNARC hatás ASZR magyarázata feltételezi, hogy az ASZR térbeli jelleggel rendelkezik, és ez a térbeli tulajdonság interferál a válasz helyével (Dehaene és mtsai., 1993).

Egy következő hatás, amelyet az ASZR modell meg tud magyarázni, az **előfeszítési távolsági hatás**. Amikor például egy résztvevő eldönti, hogy egy egyjegyű szám kisebb vagy nagyobb-e ötnél, a teljesítményét befolyásolja az előző próba, és a hatás erőssége az előző és az aktuális próba értékei közötti numerikus távolságtól függ. Az ASZR magyarázat feltételezi, hogy az összehasonlítási arányhatáshoz hasonlóan az előfeszítési hatás nagysága is az előfeszítő és a célértékek közötti reprezentációs átfedéssel függ össze (1. ábra). (Lásd a disszertáció 2. fejezetében az ASZR feltételezett további hatásait).

Az ASZR modell nemcsak azért kiemelkedő jelentőségű, mert egyszerű kognitív hatások sorát tudta megmagyarázni, hanem azért is, mert a rendszer hatással lehet a magasabb szintű matematikai képességekre is. Más pszichofizikai, a Weber elvnek megfelelő rendszerekhez hasonlóan az ASZR-nek is van egy pontossága, a Weber-állandó. Az **ASZR pontosságában egyéni különbségek** láthatóak (Halberda és mtsai., 2008), és ez a pontosság sok mérés szerint korrelál az iskolai matematikai jegyekkel és más komplexebb matematikai képességekkel (Libertus és mtsai., 2011; Schneider és mtsai., 2017; Szkudlarek & Brannon, 2017). Sőt, az ASZR pontosságának fejlesztése javíthatja a magasabb szintű matematikai teljesítményt is (Park & Brannon, 2013, 2014). Emellett a rendszer sérülése (a pontosságának csökkenése) lehet az oka annak, hogy egyes gyermekek fejlődési diszkalkuliával élnek (olyan tanulási nehézség, amleyben a gyermekek specifikus sérülést mutatnak a matematikai feladatokban anélkül, hogy alacsony intelligenciával rendelkeznének) (Piazza és mtsai., 2010). Ez utóbbi példák jellemzően azt mutatják, hogy az ASZR modell nemcsak az alaptudományok, hanem számos alkalmazott terület számára is nélkülözhetetlen, és jelentősége alapvető lehet az iskolában és a mindennapi életben. (További példákat a disszertáció 2. fejezetében találunk.)

Azonban elképzelhető, hogy az ASZR modell az alapjait tekintve hibás. A jelen dolgozat célja, hogy egy alternatív magyarázatot nyújtson az érintett jelenségekre, és tesztelje az ASZR modellt és az itt javasolt alternatív modellt.

II. Egy alternatív magyarázat, a diszkrét szemantikus rendszer (DSZR)

Az ASZR modell problémái

Mint a legtöbb modell esetében, az ASZR modell kapcsán is vannak olyan empirikus eredmények, amelyek nem állnak teljesen összhangban a modellel. Sokszor az ilyen ellentmondások nem feltétlenül azért léteznek, mert a modellek helytelenek, hanem származhatnak érvénytelen mérésekből, a modellek hiányzó részleteiből, vagy egyszerűen a véletlenszerű mintavételezés okozta szélsőséges adatokból (azaz a mérés véletlenszerű zajából). Az ASZR esetében azonban komolyabb problémák is felmerülnek, amelyek arra utalhatnak arra, hogy a modell hibás.

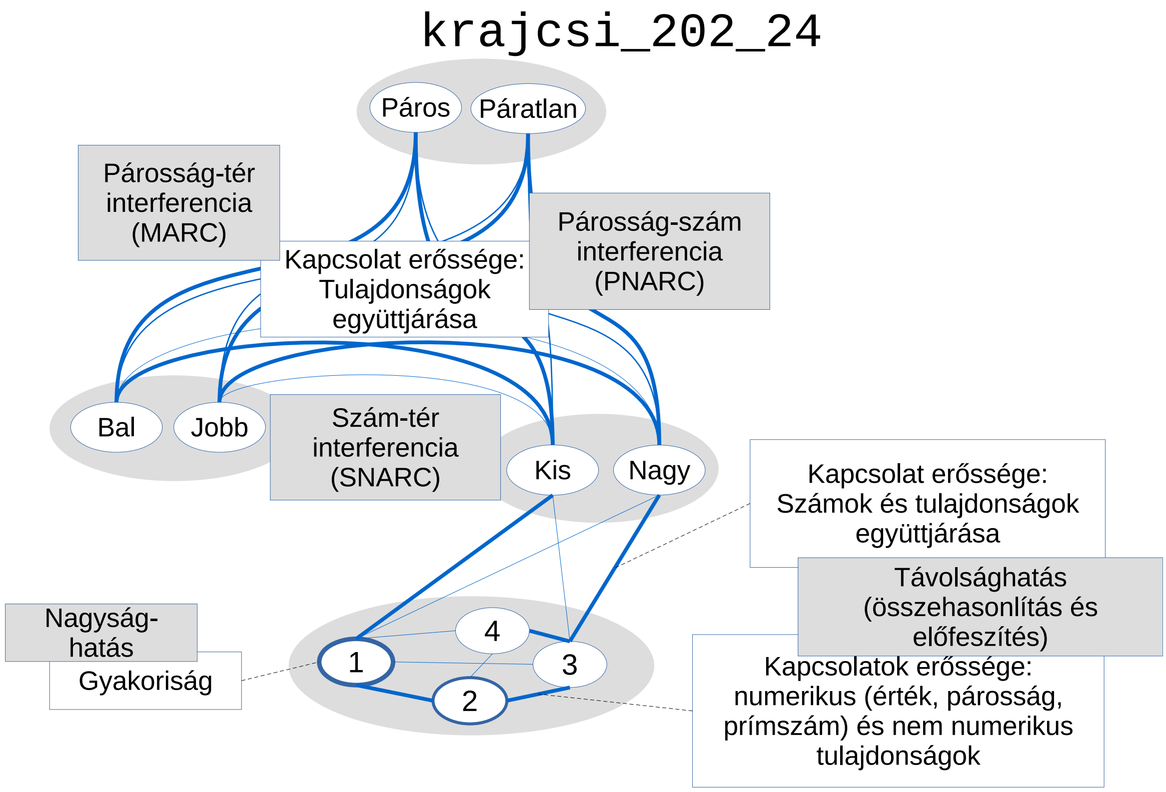
Az ASZR esetében az egyik alapvető probléma az, hogy a modell nem tudja megmagyarázni, hogy az **emberek miért képesek kis arányok esetén is megkülönböztetni a számokat**. A Weber elv szerint két inger megkülönböztetése a két inger arányától függ (Algom, 2021). A kis arányú ingerek megkülönböztetése nehéz lehet, akár a véletlenszerű találgatást is elérheti. Embereknél a Weber állandót szimbolikus számok esetében 0,1 körüli értékre mérik (Krajcsi, Lengyel, & Kojouharova, 2018). Ezzel a Weber állandóval még a legkisebb arányú egyjegyű számpár - vagyis a 8 vs. 9 - megkülönböztetése is nagyon nehéznek kell lennie. A pszichofizikai modellek azt jósolják, hogy a 8 vs. 9 összehasonlítás hibaarányának 0,1 Weber állandóval körülbelül 20%-osnak kell lennie. Megfelelő empirikus mérés nélkül is valószínűtlennek tűnik, hogy felnőttek a próbák 20%-ában ne tudnák megmondani, hogy a 8 vagy a 9 nagyobb, és az empirikus eredmények megerősítik ezt a várakozást (Krajcsi, Lengyel, & Kojouharova, 2018). Ez a becsült Weber állandó még nagyobb hibaarányt jósol, ha többjegyű számokra általánosítjuk (mivel az ASZR egyes feltételezések szerint támogatja a többjegyű összehasonlítást is, pl. Dehaene, 2007). Ez az egyszerű, de jellegzetes és erős eltérés az adatok és a modell közt egy komoly figyelmeztető jel, hogy az ASZR modell hibásan jósolhatja meg a számok összehasonlítási teljesítményét.

Egy másik kritikus probléma, hogy amikor egy numerikus feladatban távolsághatás (vagy ezzel ekvivalens arány- vagy nagysághatást) figyelnek meg, a kutatók feltételezik, hogy ez az ASZR aktiváció jele. A **látszólag azonos távolság hatások azonban minőségileg eltérő reprezentációkban is gyökerezhetnek**. Egy képmegnevezési feladatban azt találták, hogy a reakcióidő függött az előző próba jelentésétől, és a hatás erőssége az aktuális és az előző képek jelentésének szemantikai hasonlóságától függött (Vigliocco és mtsai., 2002). Ez az előfeszítési távolság hatás pontos párhuzama a numerikus előfeszítési távolság hatásnak (lásd fentebb); mégis, figyelembe véve a nyelvi és a pszicholingvisztikai modellek természetét, nem valószínű, hogy a szavak jelentése egyszerű pszichofizikai reprezentációkban tárolódik. Ez a példa ugyancsak figyelmeztető jelnek tekinthető, hogy nem minden távolsághatás (vagy arány- illetve nagysághatás) jelzi az ASZR alapú feldolgozást.

A diszkrét szemantikus rendszer modell

Ez utóbbi nyelvi előfeszítési távolság hatás által inspirálva kutatócsoportunk elkezdte vizsgálni a pszicholingvisztikai vagy szemantikai hálózatokhoz hasonló reprezentáció lehetőségét egyszerű numerikus feldolgozás esetében. Vajon az értékeket és a kapcsolódó fogalmakat reprezentáló csomópontokból álló hálózat magyarázatot adhat-e az ASZR-nek tulajdonított jelenségekreés hatásokra?

Alternatív modellünkben olyan csomópontok hálózatát javasoltuk, amelyek arab számjegyeket vagy más szimbolikus számjegyeket és kapcsolódó fogalmakat, például „kisebb”, „nagyobb”, „páros”, „páratlan” (2. ábra) reprezentálnak (lásd hasonló, de koncepcionálisan kevésbé radikális modelleket pl. Leth-Steensen & Marley, 2000; Verguts & Fias, 2004; Verguts & Van Opstal, 2014 tanulmányaiban). Ezt a reprezentációt **diszkrét szemantikus rendszernek (DSZR)** neveztük el. Különböző szimbolikus számfeldolgozási hatások, amelyeket korábban az ASZR-nek tulajdonították, ebben a modellben is megmagyarázhatóak.

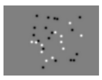
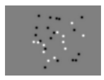
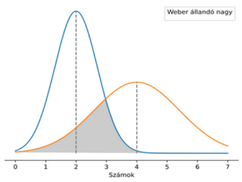
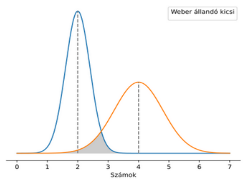
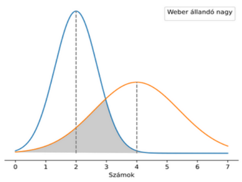
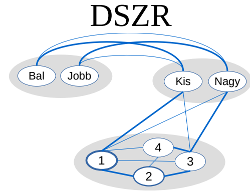


2. Ábra. A diszkrét szemantikus rendszer hipotetikus szerkezete. A hálózat csomópontjai (fehér ellipszisek) számokat és kapcsolódó fogalmakat jelölnek. A kapcsolatok különböző súlyokkal rendelkezhetnek, amelyeket a vonalak szélességével ábrázolunk. A hálózat különböző tulajdonságai (fehér négyzetek) magyarázhatják a szimbolikus numerikus hatásokat (szürke négyzetek).

A DSZR modellben az arányhatás nem egyetlen hatás, hanem valójában **két független hatásból, a nagyság- és a távolsághatásból áll**, amelyek összeadódva egy látszólagos arányhatást alkotnak. A DSZR modellben **a nagysághatás egy gyakorisági hatás**. A szakirodalomban jól ismert, hogy a szimbolikus számok gyakorisága összefügg azok értékével a mindennapi életben: a kisebb számok gyakoribbak, a nagyobbak pedig ritkábbak (Dehaene & Mehler, 1992). Az is jól ismert, hogy a gyakoribb ingereket könnyebb feldolgozni. Mindezért a kisebb számok gyorsabban feldolgozhatók. Ez utóbbi szabály a korábban megfigyelt numerikus összehasonlítás nagysághatásának egy lehetséges változata (2. ábra). Ami a **távolsághatást** illeti, a DSZR modellben a számjegycsomópontok más csomópontokkal képezhetnek asszociációkat, például „kis”, vagy „nagy” tulajdonságokkal. A számok feldolgozása során a kis számok erősebben kapcsolódnak a „kis” csomóponthoz, a nagy számok pedig a „nagy” csomóponthoz. Két szám összehasonlításakor a kis számtávolságú számpár számai hasonlóbb asszociációkat mutatnak a „kis” és a „nagy” csomópontokkal, mint a nagy számtávolságú számpárok számai. Az eltérő asszociációk (azaz a nagy numerikus távolsággal rendelkező számok) megkönnyíthetik a döntést, létrehozva a távolsághatást (lásd a Verguts & Fias, 2004 tanulmányában a hatás egy specifikusabb implementációját). Alternatív megoldásként a távolsághatás magyarázatához figyelembe vehetjük a számcsomópontok közötti kapcsolatok erősségét, és a terjedő aktiváció befolyásolhatja a számfeldolgozást, ahol a kapcsolat erőssége és következésképpen a terjedő aktiváció hatása távolsághatást okoz (2. ábra).

A DSZR modell különböző interferencia hatásokat is meg tud magyarázni, mint például a SNARC vagy más hatásokat. A reprezentációban a tulajdonságpárok között kapcsolatok alakulhatnak ki (hasonló modelleket lásd még pl. Hines, 1990; Leth-Steensen & Marley, 2000; Proctor & Cho, 2006), amely kapcsolatok elősegíthetik a kongruens elemek feldolgozását, és akadályozhatják az inkongruens elemek feldolgozását (2. ábra). (A DSZR modellről bővebben lásd a disszertáció 2. és 3. fejezetét).

Fontos kiemelni, hogy a DSZR modell csak a szimbolikus számokra (például arab számokra, számszavakra, római számokra) vonatkozik, a nem szimbolikus számokra (például ponthalmazokra, eseménysorozatokra, hangsorozatokra) nem. Alternatív modellünk szerint (a klasszikus modellhez hasonlóan) a nem szimbolikus számokat az ASZR dolgozza fel. Ahhoz, hogy mind a szimbolikus, mind a nem szimbolikus számfeldolgozást bevonjuk a modellbe, és hogy összevessük a klasszikus és az alternatív nézetet, fontos kiemelni, hogy a klasszikus modell szerint mind a szimbolikus, mind a nem szimbolikus számokat az ASZR dolgozza fel, amit itt **tiszta ASZR keretrendszernek** nevezünk. Ezzel szemben az alternatív modellünkben a nem szimbolikus számokat az ASZR, míg a szimbolikus számokat a DSZR dolgozza fel, amit **hibrid ASZR-DSZR keretrendszernek** nevezünk (3. ábra).

	Tiszta ASZR keretrendszer		**Hibrid ASZR-DSZR keretrendszer**	
	Nem szimbolikus	Szimbolikus	Nem szimbolikus	Szimbolikus
Ingerek	 ♪♪♪♪♪♪	7 Hét VII	 ♪♪♪♪♪♪	7 Hét VII
Reprezentációk	ASZR 	ASZR 	ASZR 	DSZR 

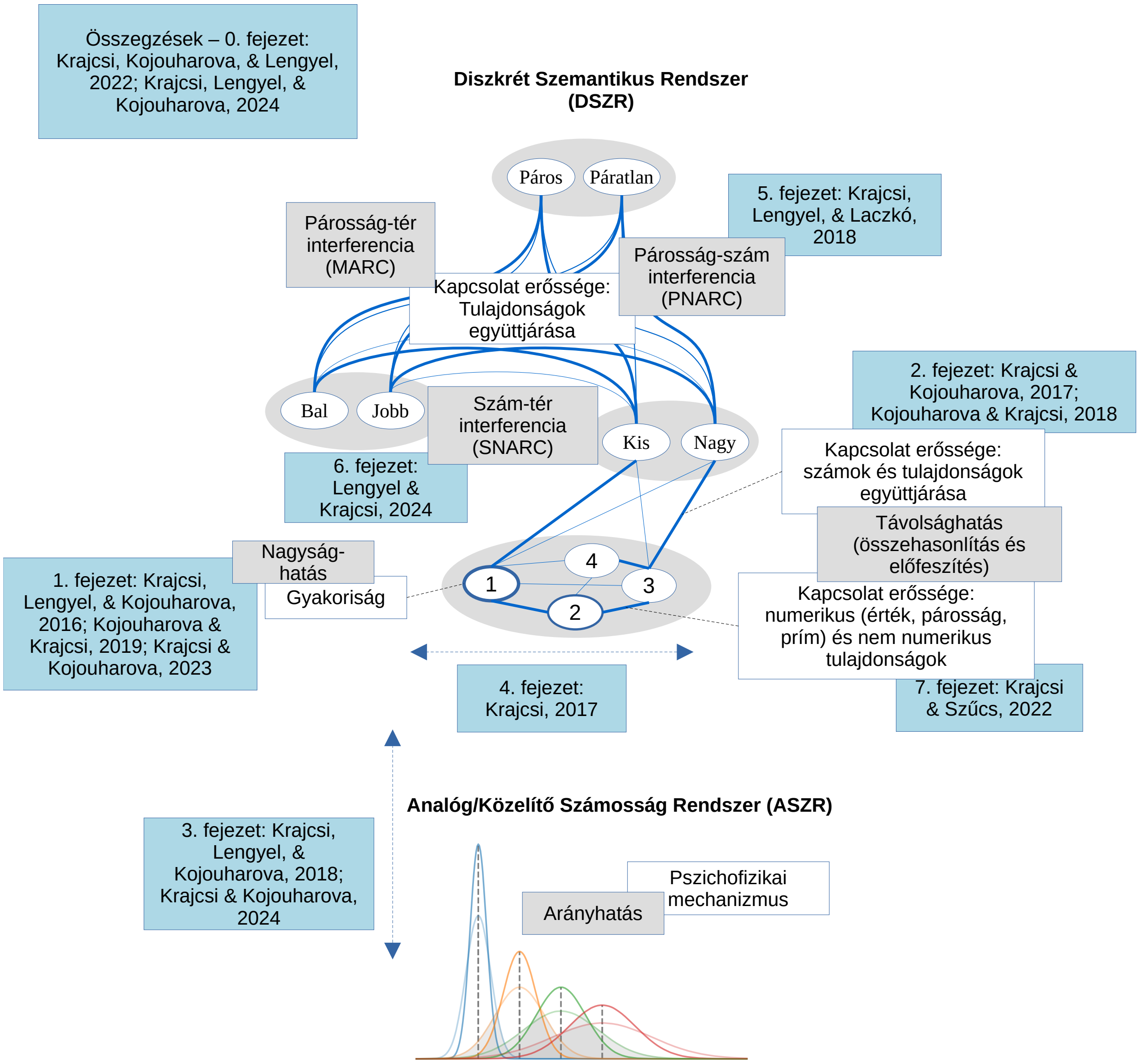
3. ábra. Az egyszerű numerikus műveleteket kezelő feltételezett reprezentációk a tiszta ASZR keretrendszer (balra) és a hibrid ASZR-DSZR keretrendszer (jobbra) szerint.

A fenti megfontolások azt mutatják, hogy a diszkrét csomópontokból álló hálózat, mint amilyen a DSZR, megmagyarázhatják ugyanazokat a szimbolikus numerikus jelenségeket, amelyeket az ASZR-nek tulajdonítottak. Más szóval, a DSZR a szimbolikus számfeldolgozás lehetséges alternatív modellje.

Ha azt szeretnénk megvizsgálni, hogy a DSZR modell nemcsak lehetséges, hanem jobb leírás is, mint az ASZR modell, akkor két korlátot figyelembe kell venni. Az egyik korlát az, hogy a két modell számos jelenségre hasonló előrejelzéseket ad. Ez nem meglepő azt figyelembe véve, hogy a DSZR modell ugyanazoknak a jelenségeknek a magyarázatára jött létre, amelyeket az ASZR-nek tulajdonítottak. Ez azonban azt is jelenti, hogy a két modellt nem lehet az átfedő előrejelzések alapján összevetni, hanem olyan helyzeteket kell találni, ahol a két modellnek eltérő előrejelzései vannak. A második kezelendő korlát az, hogy bár lehetnek olyan jelenségek, amelyekre a két modell eltérő előrejelzéseket ad, tudomásunk szerint a szakirodalom néhány ritka kivételtől eltekintve többnyire olyan jelenségekről számol be, amelyek mind az ASZR, mind a DSZR modellel megmagyarázhatók. Annak vizsgálatára, hogy a DSZR nem csak lehetséges, hanem jobb modell-e, mint az ASZR modell, új teszteket kellett tervezni, ahol a két modell jellegzetesen eltérő előrejelzésekkel rendelkezik.

III. A két modell összevetése

Egy sor tanulmányban új teszteket terveztünk a szimbolikus számfeldolgozás ASZR és DSZR modelljeinek összevetésére, illetve általánosabban a tiszta ASZR keretrendszer és a hibrid ASZR-DSZR keretrendszer összevetésére. Az alábbiakban a főbb megállapításainkat foglaljuk össze (lásd még a 4. ábrát az eredmények vizuális összefoglalásaként a disszertáció fejezeteit is feltüntetve; a 2. táblázatban az összes vonatkozó munka főbb megállapításait összefoglalva találjuk).



4. ábra. A DSZR és ASZR modellek vázlata a vonatkozó hatásokkal (szürke négyzetek), a modellek azon tulajdonságaival, amelyek figyelembe veszik ezeket a hatásokat (fehér négyzetek), valamint a disszertáció azon fejezeteivel és kapcsolódó cikkeivel, amelyek ezeket a hatásokat tesztelik (kék négyzetek).

1. Az ASZR és a DSZR modellek jóslatainak összevetése az összehasonlítási feladatban. A feltételezett ASZR aktiváció meghatározó jele az összehasonlítási arányhatás, amely megfelel a Weber elvnek. Erre a hatásra az ASZR és a DSZR eltérő jellegű magyarázatokkal szolgál: a DSZR modellben a pszichofizikai alapú arányhatás helyett egy gyakoriság alapú nagysághatás és egy asszociációs alapú távolsághatás összegét feltételezzük. A két modell összehasonlítási feladat teljesítményének jóslatai azonban nagyon hasonlóak: a modellek konkrét változataitól vagy implementációitól függően egy egyjegyű összehasonlítási feladat teljesítményének jóslatai 0,9-nél erősebben korrelálhatnak a két modellben (Krajcsi és mtsai., 2016). (További részletekért lásd a disszertáció 3. fejezetét is.) Bár a jóslatok hasonlóak, vannak kisebb különbségek is, és elvileg elképzelhető, hogy valamelyik modell pontosabb jóslatot ad az empirikus adatokra. Az eredmények szerint a mért adatok általában túl zajosak ahhoz, hogy a két modellt ilyen módon össze lehessen vetni, és így nem lehet megmondani, hogy melyik modell jóslata pontosabb (Krajcsi és mtsai., 2016). (További részletekért lásd a disszertáció 3. fejezetét is.) Ezért más jellegű teszteket kell tervezni annak vizsgálatára, hogy melyik modell írja le jobban a szimbolikus összehasonlítást.

2. Összehasonlítási nagysághatás. Mivel a DSZR modell azt feltételezi, hogy a nagysághatás egy gyakorisági hatás, azt is jósolja, hogy a nagysághatásnak az ingergyakoriságnak megfelelően kell változnia. Az arab számokkal kapcsolatos korábbi tapasztalatok hatásának elkerülése érdekében egy első vizsgálatban új mesterséges számjegyeket vezettünk be, ahol a számjegyek gyakoriságát kísérletileg manipuláltuk (Krajcsi és mtsai., 2016). A résztvevők új szimbólumokat tanultak meg, amelyek az 1 és 9 közötti értékeket jelentették, majd számpárokat hasonlítottak össze ebben az új jelölésben. A résztvevők egyik csoportjában az összehasonlítási feladatban olyan számjegyek szerepeltek, amelyek a mindennapi életben előforduló arab számok gyakoriságára hasonlítottak, vagyis a kisebb számok gyakoribbak voltak, és a gyakoriság arányos volt az érték hatványával (Dehaene & Mehler, 1992). Egy másik csoportban a számjegyek gyakorisága egyenletes volt, azaz minden számjegy azonos gyakorisággal jelent meg. Míg az első csoportban megfigyelhető volt a nagysághatás, addig a második csoportban ez hiányzott. Mindez azt jelenti, hogy a nagysághatás az ingerek gyakoriságát követte a DSZR modell jóslatának megfelelően (Krajcsi és mtsai., 2016). (További részletekért lásd a disszertáció 3. fejezetét is.)

Lehet azzal érvelni, hogy ez a nagysághatás nem ugyanaz, mint amit az arab számoknál megfigyeltek; az ingerek végtére is új számjegyek voltak. Az új mesterséges jelölésnél azonban ugyanazokat a további hatásokat figyeltük meg, mint az arab számoknál a szakirodalomban: jelen volt az összehasonlítási távolsághatás, továbbá a döntési idő függött a megelőző előfeszítő ingerektől, és ez a hatás arányos volt az előző és az aktuális értékek számtani távolságával, ami az előfeszítési távolsághatás (Krajcsi és mtsai., 2016). Ha ezeket a hatásokat az arab számok numerikus feldolgozásának jelének tekintjük, akkor ezeknek a hatásoknak az új szimbólumok numerikus feldolgozásának is jelének kell lenniük. Mindezek alapján megállapítható, hogy a résztvevők az új szimbólumokat számokként kezelték.

Fontos, hogy az ingergyakoriság hatása a nagysághatásra az arab számok esetében is megfigyelhető volt. Egy másik, arab számokkal végzett összehasonlítási feladatban nemcsak a mindennapi számjegy gyakoriságot, és az egyenletes gyakorisági eloszlást használtuk, hanem egy harmadik csoportban fordított mindennapi statisztikát is alkalmaztunk (azaz a nagy értékek gyakoribbak voltak, mint a kis értékek). Bár az arab számokkal a kis értékeket mindig gyorsabban hasonlították össze, az ingerek hatása mégis befolyásolta a nagysághatást: a nagysághatás mindennapi gyakoriság esetén volt a legnagyobb, egyenletes gyakoriság esetén kisebb, fordított mindennapi gyakoriság esetén pedig a legkisebb (Kojouharova & Krajcsi, 2019). Más szóval, az arab számok összehasonlításának nagysághatása a korábbi tapasztalatok és az aktuális ülés tapasztalatának kombinációját mutatja. Összefoglalva, a gyakoriság alapú nagysághatás az arab számok esetében is megfigyelhető, ahol eredményeinket a korábbi és az aktuális ingergyakoriság együttes tapasztalataként értelmezzük.

Lehet azzal érvelni, hogy a kombinált nagysághatások utóbbi eredménye nem a gyakoriságokról szerzett korábbi és jelenlegi tapasztalatok kombinációja, hanem az ASZR alapú arányhatás és az ülés gyakoriság alapú nagysághatásának kombinációja. Ennek a lehetőségnek a vizsgálatára egy újabb vizsgálatban a résztvevők új mesterséges számjegyeket hasonlítottak össze, és az ingerek gyakoriságát az ülés közepén megváltoztattuk (Krajcsi & Kojouharova, 2023). Ha a teljesítmény a két gyakoriság kombinációját tükrözi, akkor a gyakoriságokat a rendszer képes lehet összegezni, és lehetséges, hogy a korábbi arab számokkal kapcsolatos vizsgálatban az ingerek gyakorisága önmagában is okozhatja a nagysághatást. Az eredmények azt mutatták, hogy a válaszok valóban az egy ülésben látott két gyakoriságot ötvözik (Krajcsi & Kojouharova, 2023). Továbbá nem figyeltünk meg további ASZR-re utaló hatást. Például, ha a korábbi vizsgálatainkban megfigyelt nagysághatás változások valójában pszichofizikai alapú arányhatás változások, akkor a távolsághatásnak is változnia kellene (ne feledjük, hogy az ASZR modellben a távolság- és nagysághatás egyszerűen az arányhatás mérésének két különböző módja). A távolsághatásban azonban nem volt ilyen változás megfigyelhető (Krajcsi & Kojouharova, 2023).

Mindezek az eredmények azt mutatják, hogy a szimbolikus összehasonlítás nagysághatása az ingergyakoriságtól függ, miközben más befolyásoló tényezőt nem lehetett megfigyelni (Kojouharova & Krajcsi, 2019; Krajcsi és mtsai., 2016; Krajcsi & Kojouharova, 2023). Ezek az eredmények komolyan megkérdőjelezik az ASZR modellt, és összhangban vannak a DSZR modellel.

3. Összehasonlítási távolsághatás. A DSZR modell szerint a szimbolikus összehasonlítás nagysághatásához hasonlóan a szimbolikus összehasonlítási távolsághatás is függhet az ingerek statisztikájától. A távolsághatás esetében azonban a statisztika nem egyszerűen az inger gyakorisága, hanem az a gyakoriság, amellyel egy szám és a „nagyobb”-„kisebb” kategóriák együttesen megfigyelhetőek. Az egy számjegyű összehasonlításban, ha az ingerek egyenletes gyakorisági eloszlásúak (azaz minden számjegy azonos gyakorisággal jelenik meg), akkor az 1 soha nem nagyobb a többi számnál, a 9 mindig nagyobb, a többi számjegy pedig értékükkel arányosan nagyobb (lásd példaként az 1. táblázatot egy módosított sorozattal).

Számok	1	2	3		7	8	9
Esély, hogy kisebb legyen egy összehasonlításban	100%	80%	60%		40%	20%	0%
Esély, hogy nagyobb legyen egy összehasonlításban	0%	20%	40%		60%	80%	100%

1. táblázat. Annak az esélye, hogy egy összehasonlítási feladatban a szimbólum azonos valószínűséggel történő bemutatás esetén kisebb vagy nagyobb lesz az adott számsorozat esetén.

Egy vizsgálatsorozatban kihasználtuk azt a tényt, hogy ha az 1-9-es sorozat közepéből kihagyunk néhány számot, akkor az asszociációs statisztikák megváltoznak, miközben maguk a számértékek nyilvánvalóan változatlanok maradnak (lásd az 1. táblázatot). Így az asszociációs statisztikák és az értékek szétválaszthatók, ami az elméletek összevetésének az alapja lehet: az ASZR modell feltételezi, hogy a teljesítmény az értékektől (pontosabban azok arányaitól) függ, míg a DSZR modell feltételezi, hogy a teljesítmény az ingerstatisztikától függ. A résztvevők teljesítményét vizsgálva új mesterséges számjegyek összehasonlításakor a teljesítményt jobban megjósolták az asszociációs statisztikák, mint a számjegyek értékei (Krajcsi & Kojouharova, 2017). (További részletekért lásd a disszertáció 4. fejezetét.) Ugyanezt az eredményt arab számokkal is megismételhető volt (Kojouharova & Krajcsi, 2018). Ezek az eredmények ismét nem magyarázhatók az ASZR modellel, de összhangban vannak a DSZR modellel.

Az eddig bemutatott tesztekben általában a szimbolikus ingerek statisztikai tulajdonságait manipulálva az volt látható, hogy az összehasonlítás nagyság- és a távolsághatása elsősorban ezektől a statisztikáktól függ. Lehetséges azonban, hogy ezek a statisztikai tulajdonságok nemcsak a szimbolikus, hanem a nem szimbolikus összehasonlításokat is befolyásolhatják – bár ez a pszichofizikai modellek többségét tekintve komoly meglepetéssel járna. Ezt a lehetőséget tesztelve, miközben a résztvevők ponthalmazok mennyiségét hasonlították össze, az ingerek statisztikáit a korábban ismertetett vizsgálatokban alkalmazott manipulációkhoz hasonlóan változtattuk (Krajcsi & Kojouharova, 2024). Az eredmények szerint a nem szimbolikus összehasonlítási távolsághatás a szimbolikus távolsághatással ellentétben elsősorban az ingerek értékeitől függ, nem pedig azok statisztikájától. Ez ismét világosan mutatja, hogy a szimbolikus és a nem szimbolikus összehasonlítások minőségileg eltérően működnek. Az is megfigyelhető volt, hogy a nem szimbolikus összehasonlítás nagysághatását némileg befolyásolja az ingerek gyakorisága, azonban a hatás a diffúziós modell (lásd alább részletesebben) segítségével értékelve minőségileg más, mint a szimbolikus összehasonlítás esetében. Az eredmény ismét megerősíti, hogy a szimbolikus és nem szimbolikus összehasonlítások feldolgozása minőségileg eltérő módon történik, ami megerősíti a hibrid ASZR-DSZR keretrendszer helyességét.

4. A pszichofizikai modell tesztelése. A fenti első tesztek egyike azt vizsgálta, hogy az általános ASZR modell előrejelzése vagy a DSZR modell jósolja-e meg jobban a szimbolikus számok összehasonlítását. Egy alternatív tesztben a pszichofizikai alapú ASZR modell előrejelzését használtuk a szimbolikus (arab) és a nem szimbolikus (ponthalmazok) számösszehasonlítások szembeállítására. A pszichofizika alapú teljesítmény mind a szimbolikus, mind a nem szimbolikus számösszehasonlítás esetében összhangban lenne a tiszta ASZR keretrendszerrel (3. ábra). Másfelől, ha a pszichofizika-alapú modell csak a nem szimbolikus összehasonlítást tudja megmagyarázni, de a szimbolikus összehasonlítást nem, az a hibrid ASZR-DSZR keretrendszert támogatná. Hasonló tesztek ugyan találhatók a szakirodalomban (pl. lásd Dehaene, 2007 összefoglalóját), de a mi tesztünk az előrejelzéseket részletesebben vizsgálta. Összességében azt találtuk, hogy míg a pszichofizikai modell megfigyelhető torzítások nélkül írta le a nem szimbolikus számösszehasonlítást, a szimbolikus összehasonlítás számos részletét rosszul jósolta meg (Krajcsi, Lengyel, & Kojouharova, 2018). Az egyik legfontosabb probléma az, hogy az ASZR modell sokkal nagyobb hibaarányt jósol a kis arányú szimbolikus összehasonlításoknál (pl. 8 vs. 9), mint ami az empirikus adatokban megfigyelhető. Ez lényegében empirikus és formálisabb megerősítése annak a korábbi megjegyzésünknek, hogy míg az ASZR (és a Weber elv) azt feltételezi, hogy a kis arányokat nem lehet megkülönböztetni, addig az emberek általában meg tudják mondani, hogy melyik szám nagy; például meg tudják mondani, hogy a 9 nagyobb, mint a 8, vagy a 90 nagyobb, mint a 89. Egy másik kulcskérdés a diffúziós modellen alapuló eredményekre épül (Ratcliff és mtsai., 2004, 2016; Ratcliff & McKoon, 2008; Shinn és mtsai., 2020; Voss és mtsai., 2013). Az egyszerű döntések diffúziós modellje azt feltételezi, hogy a döntés a releváns bizonyítékok felhalmozásán alapul, ahol a döntés függ például a döntési küszöbtől (amelyet például a pontosság-gyorsaság szándéka határoz meg), az információ felhalmozásának kiindulópontjától (a próbát megelőzően egy adott válasz felé irányuló esetleges torzítás) vagy a sodródási rátától (a felhalmozandó információ minősége, azaz a feladat nehézsége). Fontos, hogy egy pszichofizikai összehasonlítási feladatban, ha az ingerek a releváns dimenzióban egyenértékűek (pl. azonos számmosságú ponthalmaz), a feladat nem megoldható, és a kapcsolódó sodródási ráta nulla. Ezzel a feltételezéssel összhangban a nem szimbolikus összehasonlításban, ahogy a két inger aránya egyre kisebb lesz (azaz a feladat egyre nehezebb), a sodródási ráta a nullához közelít. A méréseink szerint azonban a szimbolikus összehasonlításban, ahogy az ingerek aránya kisebb lesz, a sodródási ráta nem a nulla érték felé közelít, hanem egy pozitív érték felé tendál (Kojouharova & Krajcsi, 2018). (További részletekért lásd a disszertáció 5. fejezetét is.) Ez az eredmény ismét összhangban van azzal a mindennapi megfigyeléssel és egyszerű intuícióval, hogy az emberek bármilyen számpár esetében képesek döntően sikeresen elvégezni a numerikus összehasonlításokat. Összességében, míg a pszichofizikai modell sikeresen leírja a nem szimbolikus számösszehasonlítást, a szimbolikus számösszehasonlítást nem tudja jól bejósolni, ami ismét kritikus problémát jelent a tiszta ASZR keretrendszer számára, ám összhangban van a hibrid ASZR-DSZR keretrendszerrel.

5. Az összehasonlítási távolság és a nagysághatások függetlensége. A fentebb ismertetett vizsgálatok azt is megmutatták, hogy az ingergyakoriság manipulálása a nagysághatást megváltoztatja, de a távolsághatást nem (Kojouharova & Krajcsi, 2019; Krajcsi és mtsai., 2016; Krajcsi & Kojouharova, 2023). Ezzel szemben az értékek és a „nagy”–„kicsi” tulajdonságok közötti asszociációk erősségének manipulálása a távolsághatást változtatja meg, de a nagysághatást nem (Kojouharova & Krajcsi, 2018; Krajcsi & Kojouharova, 2017). Mindez azt jelzi, hogy a távolság- és a nagysághatás egymástól függetlenül változtatható. Ez lényeges az ASZR és a DSZR modellek összevetésében, mivel az ASZR modell szerint mivel a távolság- és nagysághatások ugyanabból a pszichofizikai arányhatásból származnak, nem disszociálódhatnak. Ezzel szemben a DSZR modellben a szimbolikus távolság- és nagysághatás két független hatás, így disszociálódhatnak. Egy másik vizsgálatban ugyanezt a függetlenséget korrelációs módszerrel is sikerült kimutatni (Krajcsi, 2017). Ha az összehasonlítási távolság és a nagysághatás meredekségét nem szimbolikus (ponthalmaz) összehasonlításban mérjük, a tökéletlen reliabilitás szerepének korrekciója után (Spearman, 1904, 1910) a két hatás 1 körül korrelál, ami pontosan megfelel a pszichofizikai modell előrejelzésének, mivel a távolság és a nagysághatás egyszerűen az arányhatás kétféle mérési módja, vagyis a modell szerint a távolság és a nagysághatás meredekségének tökéletesen korrelálnia kell. Ezzel szemben a szimbolikus (arab) számok összehasonlításánál a távolság- és nagysághatás meredeksége sokkal alacsonyabb korrelációt mutat, ami azt mutatja, hogy a szimbolikus számok összehasonlítása nem pszichofizikai hatás. (További részletekért lásd a disszertáció 6. fejezetét.) Ez az eredménymintázat ismét egy erős ellenérv a tiszta ASZR keretrendszer ellen, és megerősíti a hibrid ASZR-DSZR keretrendszer helyességét.

6. Interferenciahatások. Az ASZR-modell azt feltételezi, hogy a rendszer a téri orientációja miatt interferálhat más téri komponensekkel, például a válaszhelyekkel (Dehaene és mtsai., 1993). Egy általánosabb modell azt feltételezi, hogy a folyamatos pszichofizikai tulajdonságok vagy hasonló rendszerben vagy egyetlen, általánosabb rendszerben reprezentálhatók, és ezek a tulajdonságok (például a számérték és a tér) interferálhatnak egymással (Cantlon és mtsai., 2009; Walsh, 2003). Ezzel szemben a DSZR modell azt feltételezi, hogy bármely tulajdonságpár interferálhat egymással, hasonlóan más nyelvi vagy fogalmi interferencia modellhez (Hines, 1990; Leth-Steensen & Marley, 2000; Proctor & Cho, 2006).

A különböző modellek jóslatai között egy fontos különbség, hogy a numerikus értékek interferálhatnak-e diszkrét tulajdonságokkal, amelyek nem valószínű, hogy folytonos reprezentáción tárolódnak. Ilyen diszkrét tulajdonság lehet a párosság. Ennek megfelelően egy vizsgáltban a párosság és a szám értékének interferenciáját vizsgáltuk (ami a DSZR modell szerint lehetséges, míg az ASZR modell szerint nem). Egy párosság döntési feladatban azt találtuk, hogy a párosság interferál a számok értékével, ami ismét a DSZR modellt támasztja alá (Krajcsi, Lengyel, & Laczkó, 2018) (További részletekért lásd a disszertáció 7. fejezetét is.).

A DSZR modell azt is feltételezi, hogy az interferencia a rendszerben reprezentált vonatkozó címkékből származik. Ez nemcsak a szimbolikus számok, hanem a nem szimbolikus számok esetében is magyarázhatja az interferenciát. Számos nem szimbolikus feladatban ugyanis a résztvevők olyan döntéseket hoznak, ahol a válaszgombok konkrét verbális címkéket jelölnek. Számos korábbi vizsgálat kimutatta, hogy ez a szám-tér interferencia akkor is megfigyelhető, ha a feladat nem szimbolikus, de a numerikus információ releváns a feladatban (Cleland és mtsai., 2020; Cleland & Bull, 2019). A DSZR modell szerint ezekben az esetekben az interferencia nem az érték nem szimbolikus reprezentációjából, hanem a kapcsolódó szimbolikus címkékből származhat, mint amilyen például „kicsi”–„nagy”, „páros”–„páratlan” vagy „bal”–„jobb”. A DSZR modell azt jósolja, hogy ezek az interferenciák csak akkor jönnek létre nem szimbolikus ingerek mellett, ha ezek a címkék aktiválódnak. E feltételezés tesztelésére egy színdöntési feladatban, ahol a számok nem relevánsak, az ingerek vagy szimbolikus számok (arab számok) vagy nem szimbolikus számok (ponthalmazok) voltak piros vagy kék színben. Az eredmények szerint a numerikus-téri interferencia csak szimbolikus számok esetén figyelhető meg, nem szimbolikus számok esetén nem (Lengyel & Krajcsi, 2024). A tiszta ASZR keretrendszer azt feltételezi, hogy az evolúciósan régi számérzékelés nem szimbolikus ingerekre fejlődött ki, ezért ennek az interferenciának jelen kell lennie a nem szimbolikus ingerek esetében is. Ez az eredmény ismét a DSZR elképzelést támasztja alá, és ellentmond az ASZR elképzelésnek.

7. Előfeszítési távolsághatás. Egy másik lehetséges teszt az előfeszítési távolsághatás (ETH) és az összehasonlítási távolsághatás (ÖTH; lásd a fenti ASZR részt) közötti kapcsolat vizsgálata. Az

ASZR modell szerint mindkét hatás az egymást átfedő zajos számreprezentációkból származik, amelyek viszont az ingerértékek arányától és a résztvevők Weber állandójától függnek. Ez azt jelenti, hogy az ETH és az ÖTH meredekségének korrelálnia kell (hasonlóan az összehasonlítási távolság- és a nagysághatás meredekségéhez). Ezzel szemben a DSZR modellben a két hatás eltérő mechanizmusokban is gyökerezhet (2. ábra). Az ilyen korrelációs teszt egyik komoly problémája, hogy az ETH reliabilitása viszonylag kicsi lehet. A statisztikai és módszertani irodalomban jól ismert, de a gyakorlati kutatásban gyakran figyelmen kívül hagyják, hogy az alacsony megbízhatóság csökkenti a mért korrelációt (Spearman, 1910). Következésképpen, ha egy korrelációban bármely változó megbízhatósága alacsony, a megfigyelt korreláció nem lehet magas, még akkor sem, ha a valódi korreláció magas. A korreláció helyes mérésének egyetlen módja, hogy a megbízhatóság kielégítően magas legyen (Spearman, 1910). Gyakran a megbízhatóság növelésének egyetlen rendelkezésre álló módszere a próbák számának növelése. Egy több üléses vizsgálatban a résztvevők körülbelül 6 órán keresztül végeztek összehasonlítási feladatokat (Krajcsi & Szűcs, 2022). Ez a hosszú, több ülésből álló adatgyűjtés biztosította, hogy a megbízhatóság elég magas legyen ahhoz, hogy az ETH és az ÖTH meredekségek közötti valódi korreláció megbecsülhető legyen, és potenciálisan tökéletes korreláció legyen megfigyelhető. Az eredmények szerint azonban a két meredekség korrelációja alacsony volt, sokkal alacsonyabb, mint amit az ASZR modell jósol (Krajcsi & Szűcs, 2022). (További részletekért lásd a disszertáció 8. fejezetét is.) Ez az eredmény ismét a DSZR modellt igazolta.

Összefoglalva, valamennyi munkánk (4. ábra, illetve 2. táblázat) olyan jelenségeket tárt fel, amelyeket az ASZR modell nem tud megmagyarázni; ezért a jelenlegi domináns modell felülvizsgálatára van szükség. Javaslatunk szerint az eredmények összhangban vannak a szimbolikus számfeldolgozás DSZR modelljével és az általánosabb hibrid ASZR-DSZR keretrendszerrel. További munkák deríthetik majd ki, hogy a DSZR modell megfelelő magyarázatot adhat-e az egyszerű szimbolikus számfeldolgozásra, vagy az ASZR modell helyére más alternatív modellt kell találni.

Hivatkozás	Fő eredmények
(Krajcsi és mtsai., 2016)	• Az ASZR és a DSZR modellek előrejelzései a szimbolikus számok összehasonlítási teljesítményére olyannyira hasonlóak, hogy a szokásos közvetlen összehasonlító módszerek nem működnek. • A szimbolikus számok összehasonlításának nagysághatása új szimbólumoknál teljes mértékben az ingerek gyakoriságától függ.
(Kojouharova & Krajcsi, 2019)	• Az arab számok összehasonlításának nagysághatása részben az ingergyakoriságtól függ.
(Krajcsi & Kojouharova, 2023)	• A szimbolikus számok összehasonlításának nagysághatása új szimbólumoknál összegzi a különböző ingergyakoriságokat. Nincs további jele az ASZR-nek a szimbolikus számok összehasonlítási nagysághatásában.

(Krajcsi & Kojouharova, 2017)	• A szimbolikus számösszehasonlítási távolsághatás dominánsan az ingerstatisztikától függ új számszimbólumok esetében.
(Kojouharova & Krajcsi, 2018)	• Arab számoknál az összehasonlítási távolsághatás dominánsan az ingerstatisztikától függ.
(Krajcsi & Kojouharova, 2024)	• A nem szimbolikus számösszehasonlítást dominánsan nem befolyásolja az ingerstatisztika. Az ingerek gyakorisága azonban módosítja a nagysághatást. Ez a nagysághatás jellegzetesen különbözik a szimbolikus összehasonlítás nagysághatásától.
(Krajcsi, Lengyel, & Kojouharova, 2018)	• A pszichofizikai modellek a nem szimbolikus számösszehasonlítást torzítások nélkül írják le, míg a szimbolikus számösszehasonlítást szisztematikus pontatlanságokkal írják le.
(Krajcsi, 2017)	• A nem szimbolikus számösszehasonlítás távolság- és nagysághatás meredekségei tökéletesen korrelálnak, míg a szimbolikus távolság- és nagysághatás meredekségei gyengén korrelálnak.
(Krajcsi, Lengyel, & Laczkó, 2018)	• A párosság interferál a számértékkel párossági döntésben (PNARC hatás).
(Lengyel & Krajcsi, 2024)	• A szám-válasz oldal interferencia (SNARC) hatás szimbolikus numerikus ingerek esetén megfigyelhető, de nem szimbolikus ingerek esetén nem.
(Krajcsi & Szűcs, 2022)	• A szimbolikus összehasonlítási távolsághatás és az előfeszítési távolsághatás meredekségei nem korrelálnak.

2. Táblázat. A főbb eredmények összegzése az szövegben tárgyalt sorrendben.

IV. A disszertáció témájához közvetlenül kapcsolódó kéziratok

Ebben a fejezetben a jelen disszertáció témájához közvetlenül kapcsolódó összes publikált vagy benyújtott munkánkat felsoroljuk. Elsőként azokat a munkákat soroljuk fel, amelyek egyben a disszertáció fejezeteit is képezik (lásd még a 4. ábrát). Ezek a fejezetek sorrendjében vannak felsorolva. Másodszor, további, az ASZR és a DSZR modelleket összevető munkákat említünk, a megjelenés dátuma alapján felsorolva (ezek szintén szerepelnek a 4. ábrán). Végül összefoglaljuk azokat a munkákat, amelyek kritikusan vizsgálják az ANS szerepét más numerikus megismerési jelenségekben, megjelenési dátum szerint rendezve (ezeket a 4. ábra nem említi).

A disszertáció részét képező tanulmányok

Chapter 2. Krajcsi, A., Lengyel, G., & Kojouharova, P. (2024). A new framework for elementary number processing: The hybrid ANS–DSS account [Submitted].

- Átfogó áttekintés számos, az ASZR-nek tulajdonított hatásról, a DSZR által nyújtott alternatív magyarázatról és a modelleket összevető tesztekről. A munka kitér továbbá a kapcsolódó modellekre és az általános képre, hogy milyen reprezentációk támogathatják a számok megértését.

Chapter 3. Krajcsi, A., Lengyel, G., & Kojouharova, P. (2016). The Source of the Symbolic Numerical Distance and Size Effects. Frontiers in Psychology, 7. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.01795

- A munka az ASZR és a DSZR modellek kvantitatív előrejelzéseit tárgyalja és állítja szembe egymással az összehasonlítási feladat esetében. Megállapítja, hogy a modellek nem vethetőek össze a szokásos mérési pontosságot alkalmazó empirikus adatokat használva, ha a teszt során a modellek jóslatait illesztjük. Kísérleti manipulációval bizonyítja az ingergyakoriság domináns szerepét az összehasonlítási nagysághatásra.

Chapter 4. Krajcsi, A., & Kojouharova, P. (2017). Symbolic Numerical Distance Effect Does Not Reflect the Difference between Numbers. Frontiers in Psychology, 8. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.02013

- A munka azt mutatja, hogy a szimbolikus összehasonlítási távolsághatás dominánsan az ingerek feltételes valószínűségét tükrözi.

Chapter 5. Krajcsi, A., Lengyel, G., & Kojouharova, P. (2018). Symbolic number comparison is not processed by the analog number system: different symbolic and nonsymbolic numerical distance and size effects. Frontiers in Psychology, 9. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00124

- A munka a pszichofizikai modellt vizsgálja szimbolikus és nem szimbolikus összehasonlítási feladatokban, és megállapítja, hogy míg a modell a nem szimbolikus feladatokat megfelelően írja le, addig a szimbolikus feladatok esetében szisztematikusan torzít.

Chapter 6. Krajcsi, A. (2017). Numerical distance and size effects dissociate in Indo-Arabic number comparison. Psychonomic Bulletin & Review. 24(8), 927–934. https://doi.org/10.3758/s13423-016-1175-6

- A munka azt mutatja be, hogy míg a nem szimbolikus összehasonlítás távolság- és nagysághatásai korrelálnak, addig a szimbolikus távolság- és nagysághatások nem.

Chapter 7. Krajcsi, A., Lengyel, G., & Laczkó, Á. (2018). Interference between number magnitude and parity: Discrete representation in number processing. Experimental Psychology. 65(2), 71–83. https://doi.org/10.1027/1618-3169/a000394

- A munka a számosság és a párosság interferenciáját mutatja ki.

Chapter 8. Krajcsi, A., & Szűcs, T. (2022). Symbolic number comparison and number priming do not rely on the same mechanism. Psychonomic Bulletin & Review. https://doi.org/10.3758/s13423-022-02108-x

- A tanulmány megállapítja, hogy az összehasonlítási távolsághatás és az előfeszítési távolsághatás nem ugyanarra a mechanizmusra támaszkodik.

Az ASZR és a DSZR modelleket összevető további tanulmányok

- Kojouharova, P., & Krajcsi, A. (2018). The Indo-Arabic distance effect originates in the response statistics of the task. Psychological Research. https://doi.org/10.1007/s00426-018-1052-1
    - A tanulmány megállapítja, hogy az ingerasszociációs statisztikák nemcsak az új számszimbólumok, hanem az arab számok esetében is befolyásolják az összehasonlítási távolsághatást.
- Kojouharova, P., & Krajcsi, A. (2019). Two components of the Indo-Arabic numerical size effect. Acta Psychologica, 192, 163–171. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2018.11.009
    - A tanulmány kimutatja, hogy az ingergyakoriság nemcsak az új szimbólumok, hanem az arab számok esetében is befolyásolja az összehasonlítási nagysághatást.
- Krajcsi, A., Kojouharova, P., & Lengyel, G. (2022). Processing Symbolic Numbers: The Example of Distance and Size Effects. In J. Gervain, G. Csibra, & K. Kovács (Eds.), A Life in Cognition: Studies in Cognitive Science in Honor of Csaba Pléh (pp. 379–394). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66175-5_27
    - A tanulmány a DSZR modellt alátámasztó bizonyítékokat tekinti át, főként az összehasonlítási távolsághatás példáján.
- Krajcsi, A., & Kojouharova, P. (2023). Stimulus frequency alone can account for the size effect in number comparison. Acta Psychologica, 232, 103817. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2022.103817
    - A munka azt mutatja, hogy az egyetlen ülés során alkalmazott különböző ingergyakoriság mintázatokat a DSZR képes összegezni.
- Krajcsi, A., & Kojouharova, P. (2024). Different sources of the numerical comparison size effect [Submitted].
    - A dolgozat azt vizsgálja, hogy az ingerstatisztikák befolyásolhatják-e a nem szimbolikus összehasonlítást, és megállapítja, hogy míg bizonyos esetekben az ingerstatisztikák nem befolyásolják a nem szimbolikus összehasonlítást, más esetekben befolyásolják azt, de minőségileg másképp, mint ahogyan a szimbolikus összehasonlítást befolyásolják.
- Lengyel, G., & Krajcsi, A. (2024). SNARC effect emerges only with symbolic numbers [Submitted].
    - A munka azt mutatja be, hogy a SNARC hatás a szimbolikus számhoz kapcsolódik, és nem figyelhető meg a nem szimbolikus ingereknél, ahol a szimbolikus összetevőket elkerüli a feladat.

Az ASZR szerepét más numerikus megismerési jelenségekben vizsgáló tanulmányok

- Krajcsi, A., Szabó, E., & Mórocz, I. Á. (2013). Subitizing Is Sensitive to the Arrangement of Objects. Experimental Psychology, 60(4), 227–234. https://doi.org/10.1027/1618-3169/a000191

    - A tanulmány azt mutatja, hogy a szubitizáció (kis halmazok mennyiségének gyors és pontos megállapítása) függ a halmaz térbeli elrendezésétől; ezért a szubitizáció az ASZR-rel (amely nem érzékeny az ingerek térbeli elrendezésére) nem magyarázható, hanem sokkal inkább egy mintázatfelismerő mechanizmus lehet a háttérben.
- Krajcsi, A. (2020). Ratio effect slope can sometimes be an appropriate metric of the approximate number system sensitivity. Attention, Perception, & Psychophysics, 82(4), 2165–2176. https://doi.org/10.3758/s13414-019-01939-6
    - A szimuláció bemutatja, hogy a távolsághatás meredeksége mint az ASZR Weber állandójának közelítése csak speciális körülmények között használható, és általában megfelelőbb a Weber állandót szigmoid illesztéssel kiszámítani.
- Krajcsi, A., Fedele, M., & Reynvoet, B. (2023). The approximate number system cannot be the leading factor in the acquisition of the first symbolic numbers. Cognitive Development, 65, 101285. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2022.101285
    - Kibővített matematikai modellünk azt mutatja, hogy az ASZR nem lehet a fő mozgatórugója az első számszavak kezdeti megértésének az óvodáskorú gyermekeknél.
- Krajcsi, A., Chesney, D., Cipora, K., Coolen, I., Gilmore, C., Inglis, M., Libertus, M., Nuerk, H.-C., Simms, V., & Reynvoet, B. (2024). Measuring the acuity of the approximate number system in young children. Developmental Review, 72, 101131. https://doi.org/10.1016/j.dr.2024.101131
    - Az áttekintés összefoglalja az ASZR Weber állandó mérésének megoldatlan módszertani kérdéseit. Azt jelzi, hogy a korábbi munkák többsége érvénytelenül és/vagy megbízhatatlanul mérte az ASZR Weber állandóját gyermekeknél, ami megkérdőjelezi e tanulmányok következtetéseinek érvényességét.

Hivatkozások

Algom, D. (2021). The Weber–Fechner law: A misnomer that persists but that should go away. *Psychological Review, 128*(4), 757–765. https://doi.org/10.1037/rev0000278

Brannon, E. M., & Merritt, D. J. (2011). Chapter 14—Evolutionary Foundations of the Approximate Number System. In S. Dehaene & E. M. Brannon (Eds.), *Space, Time and Number in the Brain* (pp. 207–224). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385948-8.00014-1

Butterworth, B. (1999). *The mathematical brain*. Macmillan.

Cantlon, J. F., Platt, M. L., & Brannon, E. M. (2009). Beyond the number domain. *Trends in Cognitive Sciences, 13*(2), 83–91. https://doi.org/10.1016/j.tics.2008.11.007

Cleland, A. A., & Bull, R. (2019). Automaticity of access to numerical magnitude and its spatial associations: The role of task and number representation. *Journal of Experimental*

Psychology: Learning, Memory, and Cognition, *45*(2), 333–348. https://doi.org/10.1037/xlm0000590

Cleland, A. A., Corsico, K., White, K., & Bull, R. (2020). Non-symbolic numerosities do not automatically activate spatial–numerical associations: Evidence from the SNARC effect. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *73*(2), 295–308. https://doi.org/10.1177/1747021819875021

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.

Dehaene, S. (2007). Symbols and quantities in parietal cortex: Elements of a mathematical theory of number representation and manipulation. In P. Haggard, Y. Rossetti, & M. Kawato (Eds.), *Sensorimotor foundations of higher cognition: Vol. XXII* (pp. 527–574). Harvard University Press.

Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and mental number magnitude. *Journal of Experimental Psychology: General*, *122*, 371–396. https://doi.org/10.1037/0096-3445.122.3.371

Dehaene, S., & Mehler, J. (1992). Cross-linguistic regularities in the frequency of number words. *Cognition*, *43*, 1–29. https://doi.org/10.1016/0010-0277(92)90030-L

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. S. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences*, *8*, 307–314.

Garcia-Retamero, R., Sobkow, A., Petrova, D., Garrido, D., & Traczyk, J. (2019). Numeracy and Risk Literacy: What Have We Learned so Far? *The Spanish Journal of Psychology*, *22*. https://doi.org/10.1017/sjp.2019.16

Halberda, J., Mazzocco, M. M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature*, *455*(7213), 665–668. https://doi.org/10.1038/nature07246

Hines, T. M. (1990). An odd effect: Lengthened reaction times for judgments about odd digits. *Memory & Cognition*, *18*(1), 40–46. https://doi.org/10.3758/BF03202644

Kojouharova, P., & Krajcsi, A. (2018). The Indo-Arabic distance effect originates in the response statistics of the task. *Psychological Research*. https://doi.org/10.1007/s00426-018-1052-1

Kojouharova, P., & Krajcsi, A. (2019). Two components of the Indo-Arabic numerical size effect. *Acta Psychologica*, *192*, 163–171. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2018.11.009

Krajcsi, A. (2017). Numerical distance and size effects dissociate in Indo-Arabic number comparison. *Psychonomic Bulletin & Review*, *24*(8), 927–934. https://doi.org/10.3758/s13423-016-1175-6

Krajcsi, A., & Kojouharova, P. (2017). Symbolic Numerical Distance Effect Does Not Reflect the Difference between Numbers. *Frontiers in Psychology*, *8*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.02013

Krajcsi, A., & Kojouharova, P. (2023). Stimulus frequency alone can account for the size effect in number comparison. *Acta Psychologica*, *232*, 103817. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2022.103817

Krajcsi, A., & Kojouharova, P. (2024). *Different sources of the numerical comparison size effect* [Submitted].

Krajcsi, A., Lengyel, G., & Kojouharova, P. (2016). The Source of the Symbolic Numerical Distance and Size Effects. *Frontiers in Psychology*, *7*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.01795

Krajcsi, A., Lengyel, G., & Kojouharova, P. (2018). Symbolic number comparison is not processed by the analogue number system: Different symbolic and nonsymbolic numerical distance and size effects. *Frontiers in Psychology*, *9*. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.00124

Krajcsi, A., Lengyel, G., & Laczkó, Á. (2018). Interference between number magnitude and parity: Discrete representation in number processing. *Experimental Psychology*, *65*(2), 71–83. https://doi.org/10.1027/1618-3169/a000394

Krajcsi, A., & Szűcs, T. (2022). Symbolic number comparison and number priming do not rely on the same mechanism. *Psychonomic Bulletin & Review*, *29*(5), 1969–1977. https://doi.org/10.3758/s13423-022-02108-x

Lengyel, G., & Krajcsi, A. (2024). *No observable SNARC effect with nonsymbolic numbers* [Submitted].

Leth-Steensen, C., & Marley, A. A. J. (2000). A model of response time effects in symbolic comparison. *Psychological Review*, *107*(1), 62–100. https://doi.org/10.1037/0033-295X.107.1.162

Libertus, M. E., & Brannon, E. M. (2010). Stable individual differences in number discrimination in infancy. *Developmental Science*, *13*(6), 900–906. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2009.00948.x

Libertus, M. E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011). Preschool acuity of the approximate number system correlates with school math ability. *Developmental Science*, *14*(6), 1292–1300. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2011.01080.x

Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time required for Judgements of Numerical Inequality. *Nature*, *215*(5109), 1519–1520. https://doi.org/10.1038/2151519a0

Odic, D., & Starr, A. (2018). An Introduction to the Approximate Number System. *Child Development Perspectives*, *12*(4), 223–229. https://doi.org/10.1111/cdep.12288

Park, J., & Brannon, E. M. (2013). Training the Approximate Number System Improves Math Proficiency. *Psychological Science*, *24*(10), 2013–2019. https://doi.org/10.1177/0956797613482944

Park, J., & Brannon, E. M. (2014). Improving arithmetic performance with number sense training: An investigation of underlying mechanism. *Cognition*, *133*(1), 188–200. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2014.06.011

Parrish, A. E., & Beran, M. J. (2022). Approximate Number System (ANS). In J. Vonk & T. K. Shackelford (Eds.), *Encyclopedia of Animal Cognition and Behavior* (pp. 381–386). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-55065-7_1068

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, *116*(1), 33–41. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2010.03.012

Proctor, R. W., & Cho, Y. S. (2006). Polarity correspondence: A general principle for performance of speeded binary classification tasks. *Psychological Bulletin*, *132*(3), 416–442. https://doi.org/10.1037/0033-2909.132.3.416

Ratcliff, R., Gomez, P., & McKoon, G. (2004). A Diffusion Model Account of the Lexical Decision Task. *Psychological Review, 111*(1), 159–182. https://doi.org/10.1037/0033-295X.111.1.159

Ratcliff, R., & McKoon, G. (2008). The Diffusion Decision Model: Theory and Data for Two-Choice Decision Tasks. *Neural Computation*, *20*(4), 873–922. https://doi.org/10.1162/neco.2008.12-06-420

Ratcliff, R., Smith, P. L., Brown, S. D., & McKoon, G. (2016). Diffusion Decision Model: Current Issues and History. *Trends in Cognitive Sciences*, *20*(4), 260–281. https://doi.org/10.1016/j.tics.2016.01.007

Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Susan Schmidt, S., Stricker, J., & De Smedt, B. (2017). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: A meta-analysis. *Developmental Science*, *20*(3). https://doi.org/10.1111/desc.12372

Shinn, M., Lam, N. H., & Murray, J. D. (2020). A flexible framework for simulating and fitting generalized drift-diffusion models. *eLife*, *9*, e56938. https://doi.org/10.7554/eLife.56938

Spearman, C. (1904). The proof and measurement of association between two things. *The American Journal of Psychology*, *15*(1), 72–101. https://doi.org/10.2307/1412159

Spearman, C. (1910). Correlation Calculated from Faulty Data. *British Journal of Psychology, 1904-1920*, *3*(3), 271–295. https://doi.org/10.1111/j.2044-8295.1910.tb00206.x

Szkudlarek, E., & Brannon, E. M. (2017). Does the Approximate Number System Serve as a Foundation for Symbolic Mathematics? *Language Learning and Development*, *13*(2), 171–190. https://doi.org/10.1080/15475441.2016.1263573

Verguts, T., & Fias, W. (2004). Representation of Number in Animals and Humans: A Neural Model. *Journal of Cognitive Neuroscience*, *16*(9), 1493–1504. https://doi.org/10.1162/0898929042568497

Verguts, T., & Van Opstal, F. (2014). A Delta-Rule Model of Numerical and Non-Numerical Order Processing. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *40*(3), 1092–1012. https://doi.org/10.1037/a0035114

Vigliocco, G., Vinson, D. P., Damian, M. F., & Levelt, W. (2002). Semantic distance effects on object and action naming. *Cognition*, *85*(3), B61–B69. https://doi.org/10.1016/S0010-0277(02)00107-5

Voss, A., Nagler, M., & Lerche, V. (2013). Diffusion Models in Experimental Psychology. *Experimental Psychology*, *60*(6), 385–402. https://doi.org/10.1027/1618-3169/a000218

Walsh, V. (2003). A theory of magnitude: Common cortical metrics of time, space and quantity. *Trends in Cognitive Sciences*, *7*(11), 483–488. https://doi.org/10.1016/j.tics.2003.09.002