

banhelyi.balazs_224_24

Számítógéppel segített bizonyítások és
optimalizálási modellek dinamikai és fizikai
feladatokra

„MTA Doktori Értekezés Tézisei”

Bánhelyi Balázs

Szegedi Tudományegyetem
Szeged, 2024

banhelyi.balazs_224_24

Bevezetés

Az értekezés két témakörben elért eredményeket tárgyal. Ezek a témakörök a megbízható számítások, illetve az optimalizálási eljárások fejlesztése és alkalmazása. Az első eredményeket a klasszikus Hénon-leképezés kaotikus régióinak vizsgálatával értem el [4, 14]. Ezekben a munkákban az optimalizálást kaotikus régiók bizonyításához szükséges geometriai alakzatok keresésére használtam. A megbízható számítások területét tovább erősítette a Hatvani László által megismertetett probléma, mely a kényszerrezgéses fékezett inga kaotikus viselkedésének a bizonyítása. Az eredeti cikkben John Hubbard csak egy sejtést fogalmazott meg, matematikailag elfogadható teljes bizonyítást nem tudott adni [21]. A társszerzőimmel együttműködve a sejtésre sikerült teljes értékű bizonyítást adni [5, 13].

Az értekezésben az első kiemelkedő eredményemnek a Wright-sejtés [41] igazolásához vezető eredményünk rám eső részét tartom. A problémát Krisztin Tibor által ismertem meg. Ezen a területen már a doktori képzés alatt is értem el kisebb eredményeket, melyek akkor még nem igazán tűntek ígéretesnek [2]. Az áttörés 2010-ben történt, mikor már látszódtott, hogy a sejtés egy jó részét tudjuk bizonyítani, jóval továbbmenve a Wright által feltételezhetően megoldott tartományon. A probléma nehézségét és számítási igényét jelzi, hogy a teljes munkánk közel 5 évbe telt [7]. A megoldás értékét jól illusztrálja a cikkel elnyert, az intervallum analízis alkalmazásáért odaítélt nagy presztízsű nemzetközi Moore-díj, melyet a társszerzőimmel 2016-ban vehettünk át.

A kényszerrezgéses fékezett inga kaotikus régiója létezésének megbízható bizonyításán túl több kérdés nyitva maradt ezzel a rendszerrel kapcsolatban. Ilyen például a régió kaotikus trajektóriáinak megkeresése, illetve a rendszer lehetséges kontrolljai. Az előbbit megoldó eljárást doktorandusz hallgatómmal, Lévai Balázssal közösen publikáltuk [23], melyhez úgyszintén a megbízható számítások és az optimalizálás kellettek. Az utóbbit Csendes Tibor és Hatvani László társszerzőimmel publikáltuk [6]. Lévai Balázssal és Palatinus Endrével közös munkánk az optimális körfedés területén elért eredményünk is [10]. Itt ismét az optimalizálásnak és a megbízható számításoknak van fontos szerepe.

A következő részben a jelenleg is aktívan kutatott területemet mutatom be, ami a mesterséges neuronhálók verifikálása. Első hallásra ez a probléma csak távolról csatlakozik a korábbi kutatási területeimhez, de a verifikálás során több megbízható eljárást, illetve a gyorsításhoz optimalizálást alkalmazunk. Az első nagyobb eredményünk ezen a területen kimondottan a tapasztalataimon alapult, miszerint az MIT kutatói ál-

tal megbízhatónak mondott verifikáló [32] sebezhetőségére hívtuk fel a szakmai közösség figyelmét [43]. Ennek a hiányosságnak a teljes értékű kimutatásában nagy szerepe volt doktorandusz hallgatónak, Zombori Dánielnek.

A kutatások során először még a - mások által fejlesztett - GLOBAL algoritmust használtam, mely C nyelven íródott. Már ekkor láttam, hogy ez az algoritmus mely területeken lehet hatékony, de észrevettem azt is, hogy a kor szoftverfejlesztési szellemének ez már nem tesz eleget. Az algoritmus implementációja elavult volt, az egyedi igényekre való hangolása pedig sok esetben nehézkes, vagy inkább lehetetlen volt. Az évek során több esetben is nagy számításigényű feladattal találkoztam, így a párhuzamosításra is egyre nagyobb hangsúlyt fektettem, mellyel kapcsolatban jelentek meg publikációim [1, 3, 11]. Az eredeti GLOBAL optimalizáló algoritmus egy erősen szekvenciális eljárás, de a problémákon elért eredmények miatt általam rengeteget használt eljárás lett. Ennek a párhuzamosítására több megoldást is elkészítettünk Zombori Dániel doktorandusz hallgatómmal [9, 42]. A fejezet végén több olyan eredményt is bemutatok, melyet a GLOBAL-lal értem el, illetve pár olyan értékes eredményt is, amelyek véleményem szerint a GLOBAL párhuzamos változata nélkül nem jöttek volna létre azok extrém nagy számítási igénye miatt. Ezeknek a feladatoknak a nagy részét fizikus társ szerzőim vetették fel, melyekhez sok esetben a párhuzamosításon kívül további módosítások is szükségesek voltak a GLOBAL-ban. Ezek a változtatások ebben az új elméleteken alapuló implementációban könnyedén megvalósíthatók voltak.

1. A Wright-sejtés bizonyításával kapcsolatos eredmények

Az 1940-es években sok matematikus foglalkozott a prímszámtétel elemi bizonyításának lehetőségével. Hadamard és de la Vallée-Poussin francia matematikusok 1896-ban már megmutatták, hogy $\pi(n)$, ami a prímszámok számát jelenti n -ig, aszimptotikusan $n/\log(n)$. Elemi bizonyítást Erdős [17] és Selberg [26] adtak 1949-ben, de az egyik legbiztatóbb elképzelés egy valószínűségi számítási megközelítés volt. Lord Cherwell felvetését követve Wright feltételezte a prímszámok eloszlásának bizonyos véletlenszerű tulajdonságát, és belátta, hogy ekkor a prímszámtétel éppen azt jelentené, hogy a

$$z'(t) = -\alpha z(t-1)(1+z(t)), \alpha \in \mathbb{R}^+$$

differenciálegyenlet -1-nél nagyobb megoldásai mind nullához konvergálnak az $\alpha = \log(2)$ esetben. Ez az egyenlet később a Wright-féle késleltetett differenciálegyenlet néven terjedt el.

A megfelelő átalakításokkal a Wright-féle késleltetett differenciálegyenlet egy másik, vele ekvivalens, de a jobb oldalon már csak késleltetést tartalmazó alakra hozható. Ha $z(t) \geq -1$ (számunkra csak ez az eset érdekes), akkor tekintsük a $z(t) = e^{y(t)} - 1$ helyettesítést. Ezzel $z'(t) = e^{y(t)}y'(t)$ és $z(t-1) = e^{y(t-1)} - 1$. Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$e^{y(t)}y'(t) = -\alpha \left(e^{y(t-1)} - 1 \right) \left(1 + e^{y(t)} - 1 \right),$$

melyből egyszerűsítés után:

$$y'(t) = -\alpha \left(e^{y(t-1)} - 1 \right). \quad (1)$$

Tetszőleges indulófüggvény és $\alpha \leq 1.5$ esetén ismert [41], hogy a trajektória oszcillálva konvergál a nullához.

Wright azt is állította, hogy a módszerét tovább folytatva $\alpha \leq \frac{37}{24}$ is elérhető, és esetleg még $\alpha \leq 1.567$ is. Ma már azt is tudjuk, hogy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ -ben a nulla megoldás elveszti a stabilitását (úgynevezett bifurkáció történik), és megjelennek periodikus megoldások, melyekhez tartanak a megoldások. Az 1955-ös eredeti Wright-sejtés azt mondja ki, hogy az összes megoldás nullához konvergál az $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ értékre, mely a korábbi numerikus eredmények alapján sejthető volt, hogy igaz is.

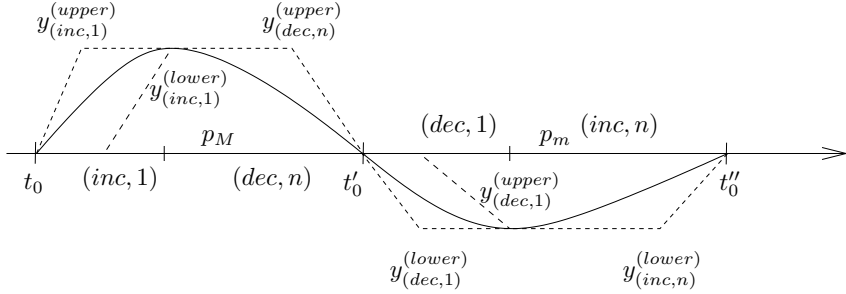
Bár maga az egyenlet látszólag egyszerű, de a késleltetési $z(t-1)$ -es tagja miatt, valamint a nemlinearitás miatt a sejtés továbbra is nyitott volt. Annak ellenére, hogy az ilyen differenciálegyenletekkel foglalkozó kutatók mindegyike előtt nagyon jól ismert volt a probléma, még a Wright által állított $\alpha \in [\frac{3}{2}, \frac{37}{24}]$ esetet sem sikerült igazolni. Sőt a 80-as években még hibás bizonyítások is megjelentek.

1.1. A sejtés bizonyítása

Megmutatunk új és a korábbinál erősebb korlátfüggvényeket, amelyek alkalmasak a periodikus megoldások szélsőértékeinek korlátozására.

Ez a technika követi Wright eredeti ötletét, de egyben új ötleteket is felhasznál. Tekintsünk egy periodikus megoldást és legyen a három egymás utáni zéruspontja t_0 , t'_0 és t''_0 . Defináljunk ezen periodikus megoldáshoz korlátfüggvényeket, melyeket az 1. ábrán láthatunk.

Ebből a hat korlátfüggvényből levezetünk erősebb, hasonló korlátfüggvényeket. Az újonnan kapott korlátfüggvényeket és az eredetieket



1. ábra. A trajektóriát korlátozó függvények, melyeket szaggatott vonallal jelöltünk.

összevetve erősebb korlátfüggvényt kaphatunk. Majd ezen összefüggéseket egy iteratív eljárásba ötvözzük, melyben először jobb korlátfüggvényeket adunk az $(inc, 1)$ szakaszra az (inc, n) szakasz korlátjaiból, majd az $(inc, 1)$ -ből a (dec, n) -re és így tovább. Mivel periodikus megoldást vizsgálunk, így az eredmény korlátokat használhatjuk ebben az iterációban indulási korlátokként is. Ezen új korlátfüggvények megkonstruálásakor alkalmazhatjuk Wright eredeti ötletét. Kezdetben a felső korlátfüggvények lehetnek konstans M -ek, míg az alsó korlátok konstans $(-m)$ -ek, kivéve az $y_{(inc,1)}^{(lower)}$ és az $y_{(dec,1)}^{(upper)}$ függvényeket, melyek 0-ák. Minden iterációs lépés után ellenőrizzük az alábbi feltételeket:

$$y_{(inc,1)}^{(upper)}(t_0 + 1) \geq M \text{ és } -m \geq y_{(dec,1)}^{(lower)}(t'_0 + 1),$$

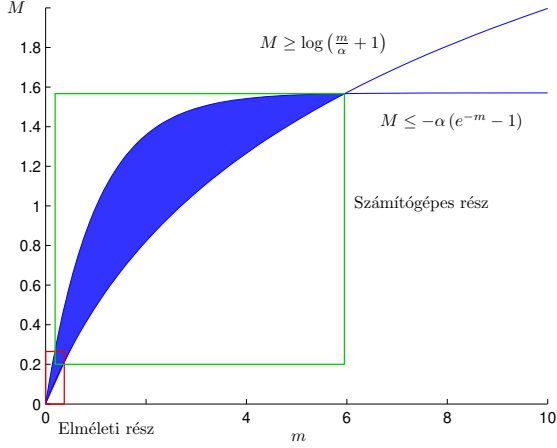
és ha valamelyik nem teljesül, akkor mondhatjuk, hogy az adott α , M és $(-m)$ paraméterekkel nem létezik periodikus pálya.

Krisztin Tibor eredményét az alábbi tételben foglalhatjuk össze:

1. Tétel. *Léteznek olyan $K_M(\alpha)$ és $K_m(\alpha)$, függvények, melyekhez nem létezik periodikus pálya egyik $M \in [0, K_M(\alpha)]$ és $m \in [0, K_m(\alpha)]$ szélsőértékekkel sem.*

Ezen eredmény elegendő lenne a bizonyításhoz, ha minden α -ra $K_M(\alpha)$ és $K_m(\alpha)$ elegendő nagyok lennének, de sajnos ezen függvényekre

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} K_M(\alpha) = 0 \text{ és } \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} K_m(\alpha) = 0.$$



2. ábra. A számítógépes és elméleti rész kapcsolata a bizonyításban.

A Wright féle eredményekből könnyen levezethető, hogy elegendő az alábbi intervallumot vizsgálni számítógéppel:

$$M \in [K'_M(\alpha), \pi/2] \text{ és } m \in [K'_m(\alpha), 6],$$

ahol

$$K'_M(\alpha) = \min \left\{ K_M(\alpha), \log \left(\frac{K_M(\alpha)}{\pi/2} + 1 \right) \right\}$$

és

$$K'_m(\alpha) = \min \left\{ K_m(\alpha), -\log \left(\frac{K_M(\alpha)}{-\pi/2} + 1 \right) \right\}.$$

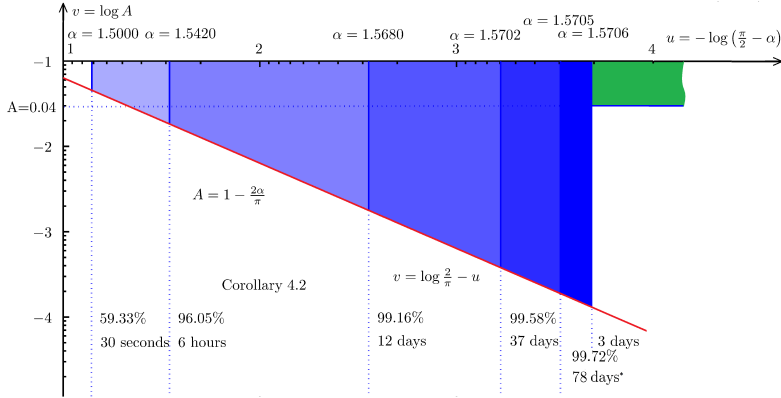
Az előzőekből következően elegendő az alábbi intervallumot vizsgálni számítógéppel az $1.5 \leq \alpha \leq \pi/2$ értékekre (a 2. ábra illusztrálja a két rész kapcsolatát):

$$M \in [K'_M(\alpha), \pi/2] \text{ és } m \in [K'_m(\alpha), 6].$$

1.2. Eredmények

A megoldáshoz implementáltunk egy új párhuzamosított korlátozás és szétválasztás eljárást, mellyel hatékonyan tudtunk részeket bizonyítani a sejtésből. A korábbi számítási kapacitásainkkal az $\alpha \leq 1.5706$ -ra

teljesen sikerült bizonyítani a Wright-sejtést [7]. Az eredményekről a 3. ábra ad egy összefoglalót. Később a maradék tartományra is készítettünk numerikus eredményeket [8]. Ezekből a numerikus eredményekből látható, hogy bár elvi szinten határértékben a sejtés a teljes tartományon bizonyítható lenne, a számítási igények drasztikus növekedése miatt a $\pi/2 = 1.5707963267\dots$ értéke kivárható időben elérhetetlen.



3. ábra. Az elért eredmények összefoglalása.

A tisztán számítógépes eredmények segítségével az is bizonyítható, hogy nincs periodikus megoldás egyetlen $\alpha \leq \pi/2$ értéknél, ha

$$m \geq 0.04 \text{ és } M \geq 0.04.$$

Természetesen ez a 0.04-es érték csökkenthető a számítási igény növekedésével és elvi szinten a 0 is tetszőlegesen megközelíthető. Azaz bizonyításunk egyetlen problémás része a $\pi/2$ közeli a 0 körüli szélsőértékekkel rendelkező periodikus megoldások nem létezésének a bizonyítása.

Megjegyzendő, hogy pont ezt a részt és csak ezt a részt tudta Jan Bouwe és Jonathan Jaquette [37] tisztán matematikai eszközökkel bizonyítani. Ezt a bizonyítást ki tudták terjesztetni a 0.04-es értékig, így az általunk kifejlesztett számítógépes résszel, illetve az általuk megalkotott matematikai bizonyítással teljessé vált a Wright-sejtés bizonyítása. Továbbá a számítógépes részben megtalálható módszert felhasználták a Jones-sejtés bizonyítása során is [22].

2. Kaotikus mozgások vizsgálata az inga kényszerrezgése során

J. H. Hubbard 1999-ben publikálta cikkét [21], amelyben behatóan tanulmányozta a fékezett inga kényszerrezgését, mint egyszerűnek tekinthető dinamikai rendszert. Vizsgálatai egy sejtés megfogalmazására sarkalták, miszerint az általa bemutatott inga periodikus mozgáspályái mellett kaotikusak is vannak. Bár az írás megjelenése után több publikáció is született a témában, azonban az úgynevezett kaotikus trajektóriák létezésének formális bizonyítása [5] csak jóval később, majd tíz évvel a sejtés közlése után került publikálásra. Hubbard az eredeti cikkében a kaotikus viselkedésen felül azt is tárgyalta, hogy érdekes lenne egy kaotikus rendszer kontrollját megkonstruálni. Ingával kapcsolatos kontrollok már korábban is léteztek, de jelen rendszerre nem létezett ilyen módszer.

A kényszerrezgéses fékezett inga egy 1 szabadsági fokkal rendelkező mechanikai rendszer. Egy m tömegű pontszerű test lóg egy l hosszú súlytalan, merev rúdon. A vizsgált ingára három erő hat. Az egyik a gravitáció, amelynek nagysága g és függőlegesen lefelé hat. A másik a légellenállás, amelynek nagysága a test sebességétől függ, és iránya ellentétes a pontszerű test mozgásának irányával. A forgási sebesség és ezen erő hányadosa legyen konstans, és jelöljük ezt $(-\gamma)$ -val, ahol $\gamma > 0$. A harmadik egy periodikus külső erő, amely hat az inga sebességére az inga minden pozíciójában. Ez az erő legyen $A \cos t$, ahol A egy konstans és t az idő. Ekkor a rendszer felírható egy másodrendű differenciálegyenlettel:

$$mlx''(t) = -mg \sin x(t) - \gamma lx'(t) + A \cos t,$$

ahol x az inga függőlegessel bezárt szöge, és x' az inga forgási sebessége. A tömeget egységnyinek választva és az inga hosszával (l) leosztva az előző egyenletet, az alábbi egyenlethez jutunk:

$$x''(t) = -\frac{g}{l} \sin x(t) - \gamma x'(t) + \frac{A}{l} \cos t.$$

A további szabad paraméterek megválaszthatók úgy ($g = l$ és $A = l$), hogy az alábbi egyenletet kapjuk:

$$x''(t) = -\sin x(t) - 0.1x'(t) + \cos t.$$

Ez az egyenlet fogja vizsgálataink tárgyát képezni.

2.1. A kényszererős fékezett inga stabilizálása

A klasszikus inga stabilizálásának analógiájára, a kaotikus inga stabilizálásával próbálkozunk. Legyen a fékezett inga kényszerrezgésének a felső instabil periodikus megoldásának a szöge az idő függvényében $\hat{x}(t)$. Az előző eredmények alapján sejthető, hogy egy $\hat{x}(t)$ irányú és $\frac{8ap^2}{l} \sin(pt)$ értékkel gyorsuló felfüggesztési ponttal rendelkező fékezett inga kényszerrezgésének stabilizálódik a felső instabil egyensúlyi pályája valamely a és p paraméterek mellett. Ebben az esetben a középpont függőleges irányú gyorsulása:

$$\cos(\hat{x}(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) = \omega_f,$$

a vízszintes irányú gyorsulása pedig:

$$\sin(\hat{x}(t)) \frac{8ap^2}{l} \sin(pt) = \omega_v.$$

Ekkor az alábbi formában írható fel a differenciálegyenlet:

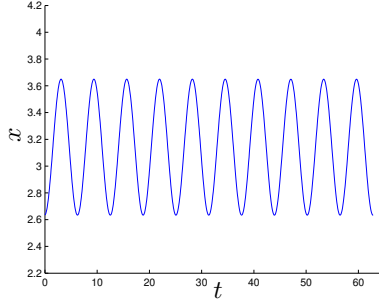
$$x''(t) = (-1 - \omega_f) \sin(x) + \omega_v \cos(x(t)) - 0.1x' + \cos(t).$$

Az $a = 0.5$ és $p = 4$ paraméterekkel következett be egy stabilizálódás. Ezt mutatja a 4. ábra. A 4(a) ábrán az inga szögének alakulását láthatjuk az idő függvényében a felső instabil állapotban. A kontrollal ezt az állapotot szeretnénk stabilizálni. Egy közeli állapotból indított inga szögének alakulását láthatjuk a 4(b) ábrán. Majd ugyanezen állapotból a kontrollal ellátott rendszer alakulását mutatja a 4(c) ábra. Sejthető, hogy a kontrollált inga szöge tart a felső pályához és ez a kontroll stabilizálja a tekintett pályát.

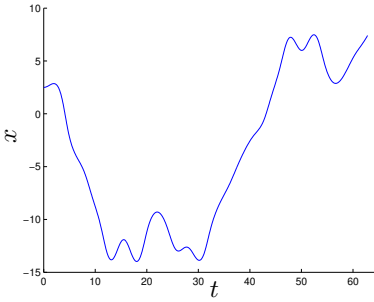
A bizonyításhoz a Poincaré-metszeteken alkalmazott multiplikátor módszert alkalmaztuk [6].

Kétféle stabilizálási eljárást ismertet a szakirodalom. Az egyik az, amikor a dinamikai rendszer állapotától függően befolyásoljuk a rendszert. Ezt vagy folytonosan, vagy diszkrét időközönként tehetjük meg. Ez a típusú kontroll, melyet „visszacsatolásos technikának” is neveznek, a kezdő állapotok sokkal szélesebb körére stabilizálja a kívánt állapotot. A másik eljárás az, amikor a dinamikai rendszer éppen aktuális állapotától nem függ a rendszerre ható erő. Ebben az esetben a kezdő állapotok sokkal kisebb halmazára tapasztalható a stabilizálódás.

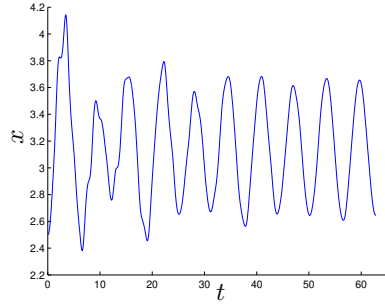
Vegyük észre, hogy az ω_f és az ω_v gyorsulások nem függnak az éppen aktuális inga állapotaitól – sem a sebességétől, sem a szögétől. Ezen függvényekben csak a felső instabil pálya megoldása szerepel, melyet akár



(a) Felső instabil pálya.



(b) Kontroll nélküli kaotikus mozgás.



(c) Kontrollált mozgás.

4. ábra. Az inga kényszerrezgésének stabilizálódása.

előre kiszámíthatunk és eltárolhatunk. Tehát a jelen problémán alkalmazott kontroll a nem visszacsatolós technikák körébe tartozik.

3. Optimális körfedés megtalálása sokszögeken

A pakolási problémákat régóta nagy figyelem övezi, ezeket még napjainkban is sokat vizsgálják. Egyik népszerű feladat ebben a témakörben a körpakolás [28]. Ennek célja adott számú egybevágó, páronként diszjunkt körnek az egységnyezetbe való legsűrűbb elhelyezésének megadása.

A feladat duálisának tekinthető probléma a körfedés. Ez a probléma sokkal nehezebbnek bizonyul, melyet a témában elért eredmények mennyisége is tükröz. Ebben az esetben adott számú egybevágó körrel az egységnyezet legritkább lefedését keressük, ahol legritkább alatt azt értjük,

hogy a lehető legkisebb sugarú körökkel fedjük le a négyzetet.

3.1. Az ellenőrző eljárás

A tekintett körfedési feladatban a körök középpontjait adottnak vesszük. A köröket jelöljük $O_i = (x_i, y_i, r_i)$ -vel, melyek középpontja x_i, y_i és a sugara r_i . A köröket tartalmazó halmazt jelölje $\mathcal{O} = \{O_i\}$ ($i = 1 \dots n$). A vizsgálataink során csak a sugarak nagyságára koncentrálunk, melyek nem feltétlenül azonosak minden körre.

Az eljárásunk alkalmas minden zárt, véges és összefüggő területfedési probléma megoldására. A megbízhatóság elérése érdekében a számítógéppel segített bizonyítás során intervallum-aritmetikát fogunk használni. Az ellenőrzést egy intervallumos korlátozás és szétválasztás alapú eljárással végezzük. Az ellenőrizendő feltétel az, hogy minden $p = (x, y) \in \mathbf{T}$ pont valamely O_i körben benne van, azaz $d((x, y), (x_i, y_i)) < r_i$. Ezt a tulajdonságot jelöljük a későbbiekben $\mathcal{T}$ -vel. Ezen tulajdonság intervallumos kiterjesztésén azt értjük, hogy $P = (X, Y)$ kétdimenziós intervallum minden egyes pontjára teljesül a $\mathcal{T}$ tulajdonság.

Az eljárás helyességét és végeességére vonatkozó tulajdonságait a következő tételekben foglaljuk össze.

2. Tétel. *Tegyük fel, hogy rendelkezésre áll a $\mathcal{T}$ tulajdonság intervallumos kiterjesztésére egy ellenőrző eljárás, továbbá az ellenőrző rutin azt az eredményt adja, hogy a $\mathbf{T}$ minden pontjára teljesül a $\mathcal{T}$ tulajdonság. Ekkor az ellenőrző rutin az ellenőrizendő tartomány köré írt (I) kiindulási intervallumnak egy olyan felosztását állítja elő, hogy minden részintervallumra teljesül, hogy*

1. *vagy ennek a részintervallumnak nincs közös pontja a vizsgált $\mathbf{T}$ tartománnyal,*
2. *vagy ennek a részintervallumnak minden pontja benne van valamely inputként kapott körben.*

Ez a tétel azt jelenti, hogy az algoritmus helyes. Ezek után nézzük meg, hogy az algoritmus valóban képes-e eldönteni, hogy a $\mathbf{T}$ tartomány rendelkezik-e a teljes lefedési tulajdonsággal.

3. Tétel. *Tegyük fel, hogy rendelkezésre áll $\mathcal{T}$ tulajdonság egy intervallumos kiterjesztése, mely minden pontra és annak valamely kis méretű környezetére képes eldönteni, hogy teljesül-e a $\mathcal{T}$ tulajdonság, továbbá az*

algoritmus ϵ paramétere nulla, és a $\mathcal{T}$ tulajdonság fennáll. Ekkor az ellenőrző rutin véges sok iterációs lépés után megáll pozitív eredménnyel.

A fent említett eljárás működéséhez fontos egy olyan algoritmus megvalósítása, mely képes megbízhatóan eldönteni egy v kétdimenziós intervallumról, hogy

- van-e közös pontja a $\mathbf{T}$ tartománnyal, és
- teljesül-e minden pontjára a $\mathcal{T}$ tulajdonság.

Az első kérdés eldöntése egyszerű azokban az esetekben, amikor az indulási intervallum minden egyes pontja benne van a tekintett tartományban, azaz az olyan 2 dimenziós intervallumok esetén, amiknek az oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. Ekkor minden, az algoritmus által generált v kétdimenziós intervallumnak van közös pontja a $\mathbf{T}$ tartománnyal. Általános esetben szükségünk van egy olyan eljárásra, mely képes eldönteni egy tetszőleges zárt, véges és összefüggő területről, hogy van-e közös pontja a v intervallummal. Ez gyakorlatilag a "pont a poligonban" algoritmus intervallumos kiterjesztése. A $\mathcal{T}$ tulajdonságot, azaz, hogy a körök uniója lefedi-e a vizsgált v tartományt, úgy tudjuk eldönteni, hogy megvizsgáljuk, hogy a kétdimenziós intervallum minden pontja benne van-e valamely körben, azaz minden pont távolsága valamely kör középponttól kisebb, mint az adott kör sugara.

3.2. Az optimalizáló eljárás

Az optimum megtalálása céljából itt egy korlátozás és szétválasztás alapú eljárást alkalmazunk. A szétválasztás során azon konfiguráció halmazok kerülnek be a listába, melyek alsó sarka nem megfelelő konfiguráció, míg a felső sarka megfelelő konfiguráció. A hatékony keresés miatt mindig azt a halmazt vesszük ki, mely a legjobb alsó korlátot adja a halmazon lévő célfüggvény értékére. Ha a felhasználó által megadott pontossággal megtaláltuk a globális optimumhoz közeli megoldást, akkor megállunk és kiíratjuk azt. A bemutatott eljárás a hagyományos intervallumos globális optimalizáló algoritmus ötletén alapszik [24, 25]. Sajnos az ott kifejlesztett gyorsító technikák nagy része nem alkalmazható, mert azok többsége (pl. az intervallumos Newton-módszer) a célfüggvény deriváltjának ismeretén alapszik, mely jelen esetben nem áll rendelkezésünkre [40].

Azt, hogy valóban a globális optimum egy közelítését találjuk meg, az alábbi tétel mondja ki.

4. Tétel. *Tételezzük fel, hogy rendelkezésünkre áll egy ellenőrző eljárás, mely megbízhatóan eldönti, hogy egy konfiguráció megfelelő-e. Ekkor az algoritmus mindig olyan eredménnyel tér vissza, amely egy megfelelő konfiguráció, továbbá nincs másik, az ellenőrző eljárás által megfelelőként értékelt konfiguráció, mely $\epsilon\%$ -kal jobb célfüggvényértékkel rendelkezne.*

A megvalósítás során a célfüggvény értékekre vonatkozó alsó korlátot úgy kapjuk meg, hogy intervallum aritmetikával kiszámoljuk a célfüggvény értékét. Az alkalmazott technika révén így egy garantált befoglalást kapunk a célfüggvény értékre. Ennek az alsó szélét használhatjuk megbízható alsó korlátként, ami alapján rendezhetjük a konfiguráció halmazainkat. Mivel mindig a legkisebb alsó korláttal rendelkező konfiguráció halmazt vizsgáljuk, ennek hatékony megtalálása érdekében a halmazokat prioritási sorban tároljuk, mely mindig a legkisebb elemet tartalmazza a lista elején.

Az algoritmus bizonyos százalékos pontossággal találja meg az optimális megoldást. Azért választottuk a relatív, százalékos megoldást, mert bár a kicsinyítésre és nagyításra az optimális megoldás és a százalékos eltérés sem érzékeny, de az abszolút eltérés már igen.

4. Neurális hálók megbízhatóságának vizsgálata

A mesterséges neuronhálók tanítása során köztudottan használnak optimalizálást. De van egy másik terület is a neuronhálókkal kapcsolatban, ami a mai szakirodalomban egyre nagyobb hangsúlyt kap, és melyben úgyszintén megtalálható az optimalizálás. Ez a neuronhálók verifikálása, robusztusságuk vizsgálata. Ez a témakör egyre hangsúlyosabbá fog válni, köszönhetően a neuronhálók rohamos terjedésének és fejlődésének. A felhasználók elvárják, hogy minél megbízhatóbbak legyenek az alkalmazott neuronhálók, így a feladat kutatása fontos területté válhat. Mivel verifikálásról van szó, így a verifikálók megbízhatósága is kulcsfontosságú szerepet tölt be ezen a területen. Mutatok egy konstruktív módszert, mellyel kihasználjuk a jelenlegi legelfogadottabb verifikáló eljárás gyenge pontját, azaz „meghekkeljük” azt, ezzel rávilágítva a rendszer hiányosságára.

4.1. Adverzális támadások neuronhálók ellen

Az adverzális támadásokat, melyeket szokás ellenséges példáknak is nevezni, először 2013 környékén kezdték vizsgálni többek közt Szegedy és

társai [29]. Ahogy a cikkben leírják, ilyen példa alatt olyan perturbált, kicsit megváltoztatott bemenetet kell érteni, amely képes megtéveszteni a neurális hálót, azaz nem a kívánt osztályba sorolni az inputot. Ilyen esetben, ha például képfelismerő hálóról van szó, a módosítás egyáltalán nem látható.

Az adverzális támadást többféleképpen is lehet kategorizálni. Az egyik szempont, hogy a támadás célzott-e vagy nem. A nem célzott (untargeted) esetben a fő cél az, hogy a neurális háló rossz eredményt adjon az adott példára, vagyis másik osztályba sorolja be, mint amibe az érintetlen, nem perturbált bemenet eredetileg volt. A másik, azaz a célzott esetben pedig azt is el szeretnénk érni, hogy nem csak hogy rossz eredményt adjon a hálózat, hanem pont olyan osztályba sorolja be a példát, amit mi megadtunk. Alapvetően ez az eset tűnik veszélyesebbnek, de az előző sem elhanyagolható.

4.2. Neuronhálók verifikálása

Legyen egy lehetséges bemenet x . Jelölje $G(x)$ azoknak a bemeneteknek a halmazát, amelyeket hasonlóan tekintünk x -hez abban az értelemben, hogy $G(x)$ összes pontjára ugyanazt a címkét kapjuk, mint x -re. A $G(x)$ halmazt általában x körüli gömbként definiáljuk valamilyen megfelelő vektornorma által meghatározott metrikus térben.

Adott a bemeneti tartomány, amelyet figyelembe kell vennünk, mint $G(x) \cap X_{\text{valid}}$, ahol az X_{valid} az érvényes bemeneti pontokat jelöli. Például $X_{\text{valid}} = [0, 1]^m$, ha a bemenet egy m pixeles kép, ahol minden pixel a $[0, 1]$ intervallumból vesz fel értékeket. Meg kell fogalmaznunk azt a tulajdonságot, amelyet ebben a tartományban szeretnénk tartani. Valójában azt szeretnénk, ha a $G(x) \cap X_{\text{valid}}$ tartomány minden egyes pontja ugyanazt az osztályozási címkét kapná, mint az x .

Jelölje $\lambda(x)$ az x valódi címkéjét. Legyen $f(x; \Omega) : R^m \rightarrow R^n$, ahol Ω jelöli a paraméterezett neurális hálózatot. Ez a hálózat n kimenettel rendelkezik, amelyek minden x bemenetet n osztályba sorolnak. Az x címkéjét az $\arg \max_i f(x; \Omega)_i$ adja.

Mindezt összevetve a verifikálási probléma úgy fejezhető ki, hogy keressük azt a legbővebb $G(x)$ halmazt, amire igaz, hogy a

$$x' \in (G(x) \cap X_{\text{valid}}) \wedge (\lambda(x) \neq \arg \max_i f(x_0; \Omega)_i), \quad (2)$$

képlettel definiált x' ellenséges példát nem tartalmaz. Ha a (2) megszorítás megvalósítható, akkor van olyan x' , amely sérti a tulajdonságot. Ha

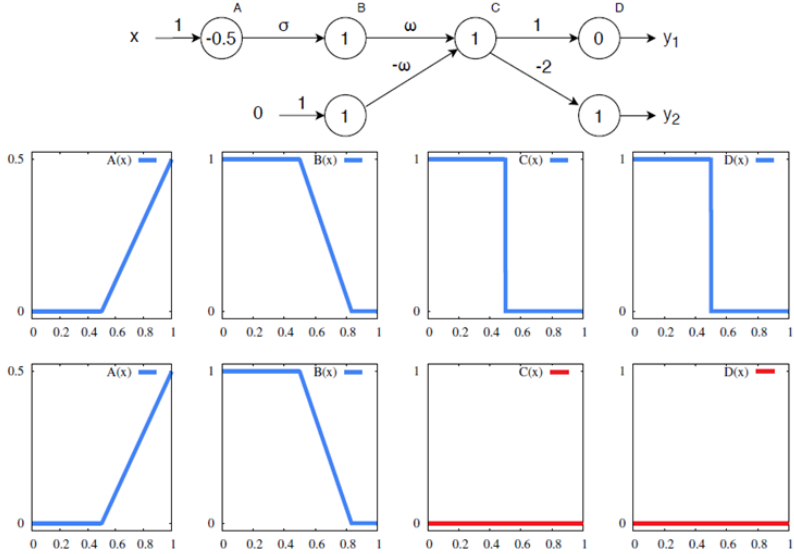
nem létezik ilyen x' (feltéve, hogy $G(x) \cap X_{valid}$ nem üres), akkor az x input $G(x)$ környezete robusztus.

4.3. Ellenséges háló

A MIPVerify megbízhatatlanságát igazoló ellenséges hálónkat a lehető legegyszerűbb formájában mutatjuk be. Lefrunk egy ellenséges hálózatot, melyre hibás kimenetet ad a MIPVerify. A vezérelvünk az, hogy kihasználjuk azt a tényt, miszerint a különböző nagyságrendű számok összeadása pontatlanná válhat a lebegőpontos aritmetikában. Támadásunk döntően attól függ, hogy milyen sorrendben adják össze a bemeneteket és a bias értékeket egy neuronon belül. Feltételezzük, hogy a kimenő értékek kiszámításakor mindig a bias értéket adják utolsóként hozzá.

Az ellenséges hálózatunk legegyszerűbb formája az 5. ábrán látható. Ez a hálózat bináris osztályozást hajt végre az $x \in [0, 1]$ bemeneten. A konstrukcióból tudjuk, hogy $y_1 \in [0, 1]$. A MIPVerify több osztályba soroló modellt és így legalább két kimenetet vár. Ezért hozzáadunk még egy y_2 technikai kimenetet, úgy, hogy az két osztályt $y_1 < y_2$ és $y_1 \geq y_2$ határozzon meg. Ezenkívül létrehozunk egy neuront állandó nulla bemenettel.

Az empirikus értékelés azt mutatja, hogy a támadás sikeres volt. A MIPVerify-t kísérletképpen több eszközzel is kiértékeljük. Többek között két kereskedelmi optimalizáló algoritmus: a Gurobi [20] és a CPLEX [12] használatával, valamint egy nyílt forrású megoldással, a GLPK-val [19]. Az értékelések során különböző ω és σ értékekkel kísérleteztünk, hogy megtudjuk, hogy az ellenséges hálózataink megtéveszthetik-e a MIPVerify megoldását. Véletlenszerűen 500 értéket generáltunk σ -ra a $[-15, -2]$ intervallumból és az összes általunk tesztelt mintavételi σ értékre az ω értékek rendre $2^{54}, 2^{55}, \dots, 2^{70}$ voltak. Minden paraméter beállításnál megvizsgáltuk, hogy ha a bemeneti pont $x = 0,75$, akkor van-e ellenséges példa az 1 sugarú körön belül. Emlékezzünk vissza, hogy az érvényes bemeneti tartomány $x \in [0, 1]$, így valójában a problémát a teljes érvényes bemeneti tartományban értékeltük. Egyértelmű, hogy a helyes válasz az hogy a (2) egyenletben szereplő feltétel megvalósítható. Mégis azt találtuk, hogy mindhárom megoldó számára a probléma megoldhatatlan az összes kipróbált paraméterkombinációra. Vagyis a mi egyszerű hálózatunk megbízhatóan becsapja a MIPVerify módszerét. Ezzel igazoltuk, hogy a MIPVerify mesterséges neuronháló verifikáló módszer nem minden esetben dönt helyesen.



5. ábra. Egy naiv ellenséges hálózat.

5. A GLOBAL algoritmus fejlesztése és alkalmazásai

Az optimalizáló szoftverek többnyire hasonló elven működnek. A már meglévő információk alapján lehetséges optimum pontot határoznak meg, kiértékelik a célfüggvényt, majd az eredménnyel bővítik a tudásbázist. A GLOBAL multistart típusú optimalizáló. Sztochasztikus módszert alkalmaz, a keresési térben egyenletes eloszlással véletlenszerű pontokat választ. A pontokból lokális kereséseket indít, amik az adott vonzáskörzet optimumába konvergálnak. Vonzáskörzet alatt azokat a pontokat értjük, amelyekből lokális keresést indítva az adott optimumba jutunk. Amennyiben több lokális keresés eredménye ugyanabba az optimumba vezet, a globális optimum megtalálásához nem jutunk közelebb, a redundáns számításokkal erőforrást pazarolunk. A rendelkezésre álló információk alapján a jelenséget mérsékelni tudjuk, a GLOBAL klaszterezés segítségével csökkenti az ilyen esetek számát. A klaszterezés lényege, hogy az ismert lokális optimumok vonzáskörzetét a véletlen minták segítségével feltérképezzük. Ha egy mintapont már ismert klaszterben található, abból nem

indítunk lokális keresést, mivel az nagy valószínűséggel az adott klaszter optimumába konvergálna.

5.1. Teljesen elosztott GLOBAL

A ParallelGlobal megmutatta, hogy a GLOBAL párhuzamosításának van létjogosultsága, ha az optimalizálási probléma mérete elég nagy [42]. A naiv megközelítés azonban nem teszi lehetővé a GLOBAL-ban implementált meglátások átvételét. A SerializedGlobal célja, hogy a GLOBAL-ban alkalmazott technikákat minél jobban megtartsa, miközben kihasználja a párhuzamosítás nyújtotta előnyöket is. Az új megközelítésnek támogatnia kell a mintavételezés, redukálás, klaszterezés, lokális keresés, újabb klaszter képzés folyamatokat. Ezzel a közös tárolók száma jelentősen bővül és a klaszterezési stratégia átgondolása is szükséges.

A GLOBAL folyamatai (mintavételezés, klaszter keresése, lokális keresés) közötti függetlenségnek továbbra is fenn kell állnia. Az új megközelítésben a követelmények miatt szükség van a GLOBAL fázisainak jóval nagyobb fokú átgondolására több szálas környezetben. Változást jelent az iterációk alkalmazása, a minták redukálása és a klaszterezés külön fázisként értelmezése. A szálak feladata egy mintapont feldolgozása helyett egy algoritmus elem végrehajtása lesz. Algoritmus elem alatt a fázisokban található munkaegységeket értjük, amelyekből egy fázison belül több is lehet. A feladatok munkaegységekre bontásával elérhető, hogy bonyolultabb algoritmusok is párhuzamosíthatók legyenek az eredetihez nagyon hasonló működéssel, relatíve egyszerű megoldásokat alkalmazva.

A SerializedGlobal eljárás implementálásához a felújított GLOBAL algoritmus egy működési elemét külön figyelemmel kell kezelnünk. A klaszterezés és a lokális keresés fázisok nagyon szoros kapcsolatban állnak egymással. A minél jobb hatékonyság érdekében a lokális keresések eredményei azonnal visszacsatolásra kerülnek a klaszterezőbe. A klaszterező azonnal feldolgozza az új információt, majd csak ezután indul újabb lokális keresés. Ez párhuzamos esetben konfliktushoz vezethet, mivel minden klaszterezés után csak egy mintán indulhatna lokális keresés, ami nem elfogadható. A konfliktust az információ egyidejűleg kétirányú áramlásának megszüntetésével érjük el. Alapesetben a lokális keresések eredményei folyamatosan visszakerülnek a klaszterezőbe, amit a klaszterezés azonnal fel tud dolgozni. Amikor nem maradt klaszterezési feladat, a minták egy része átkerül a lokális keresőbe. Ez a mechanizmus több szálon szimulálja a GLOBAL algoritmusának hatékony megoldását.

Természetesen a párhuzamos működés információvesztéssel járhat a

GLOBAL esetén is. Lehetséges, hogy két közeli minta egyszerre kerül be a helyi keresési modulba, miközben az egyiket majd klaszterezhetjük a környezetből indított másik keresés eredményének felhasználásával. Ez szükségtelen helyi keresésekhez vezethet, így a program több számítást végez, rontva a hatékonyságot. Ez a többlet erőfeszítés minimális lesz, ha a keresési terület mérete nagy a generált minták számához képest. Ez annak köszönhető, hogy két mintánál nagyon kicsi a valószínűsége, hogy kis környezetben kerüljenek be, azaz a távolságuk kisebb legyen a kritikus távolságnál. Függetlenül attól, hogy milyen nehéz a célfüggvény kiszámítása, a felesleges helyi keresésekre fordított futási idő jelentéktelen lesz, hacsak a végrehajtott iterációk száma nem rendkívül alacsony. Ha kevesebb iterációval foglalkozunk, akkor érdemes ugyanazt a mintát több iteráció között elosztani. Más szóval növelni kell az iterációk maximális számát.

Az algoritmus megállási kritériumainak túllépése a helyi keresésekben további veszteségekhez vezethet. Ezt a jelenséget az egyszerűsítés változatoknál is megfigyelhetjük, de párhuzamosításban ez halmozottabban előjöhethet a szálak számával arányosan növekedve.

5.2. GLOBAL hasznosulása egyéb területeken

A GLOBAL eljárást első ízben a kaotikus régiók keresésére használtuk. A káosz létezésének három geometriai feltétele hasonló részhalmaz vizsgálaton alapul. A korábban publikált [13] algoritmus képes eldönteni, hogy egy adott rendszer rendelkezik-e a fenti geometriai tulajdonságokkal. Rendelkeztünk egy teljesen automatizált ellenőrző eljárással, így lehetőségünk van azt egy optimalizáló eljárással kombinálni, mellyel együtt képes lehet új kaotikus tartományok keresésére. Ennek az optimalizáló eljárásnak a paraméterei általában a négyyszögek csúcspontjainak koordinátái, de lehetnek akár a leképezés paraméterei is. A célfüggvény pedig egy olyan nemnegatív büntetőfüggvény, mely megmutatja, hogy mennyire sérti meg az adott konstrukció a káosz létezésének feltételeit.

Ezzel az eljárással kapcsolatban két nehéz feladatot emelnék ki, amelyekről korábban nem volt fellelhető eredmény a szakirodalomban. Mind a kettő az Hénon-leképezéssel kapcsolatos. Az első esetben az Hénon-leképezés második iteráltját vizsgáltuk. Zgliczyński korábbi megközelítésével sikertelen volt – a klasszikus paraméterek mellett – a kaotikus régió keresése a második és negyedik iteráltakra. Ezért az előbb említett, általánosabban alkalmazható technikát próbáltuk meg használni ezekre az esetekre. Az eljárásunk a nehezebbnek vélt második iteráltra is az előzők-

höz hasonlóan mind a 8 csúcspont keresésével talált optimális megoldást.

A második esetben egy olyan Hénon-leképezést vizsgáltunk, amelyik területtartó, ekkor a B paraméternek 1-nek kell lennie. Az A paramétert szabadon megválaszthatjuk. A kísérleteinkben azt tapasztaltuk, hogy minél nagyobb ez a paraméter, annál laposabb az instabil sokaság, és így könnyebb befoglalni négyszögekkel a kaotikus régiót.

Később az Hénon-leképezés klasszikus paraméterek melletti összes iteráltjának kaotikus viselkedésével foglalkoztunk. Smale adott egy tisztán elméleti bizonyítást arra, hogy az Hénon-leképezés összes magasabb iteráltjainak létezik L - R típusú kaotikus tartománya [27]. A bizonyításban csak azt mondta ki, hogy egy elég nagy iterációs szám után biztosan létezik ilyen régió. De ezen iteráció nagyságára konkrét értéket nem adott meg. A GLOBAL eljárással a Smale bizonyításában szereplő feltételeknek megfelelő régiókat sikeresen megtaláltuk, mellyel bebizonyítottuk, hogy a tizenkettedik iteráltja után mindegyik rendelkezik L - R típusú káosszal.

Ez a módszer alkalmas volt az Hénon-leképezés entrópiájának vizsgálatára is. Galias és Zgliczyński 2001-ben publikált [18] egy rosszabb alsó korlátot az Hénon-leképezésre. A technikájuk teljes mértékben emberi beavatkozáson múlt, „kézzel történt”. A periodikus pontok és a stabil sokaság elhelyezkedésének ismeretében próbáltak elhelyezni olyan régiókat, melyek rendelkeznek az elvárt átfedési tulajdonságokkal. A periodikus pontok ismeretében több kísérletet is tettünk arra, hogy optimalizáló eljárásunkkal különböző átmenetmátrixoknak megfelelő négyszögeket keressünk. Az akkor publikált legjobbal azonos alsó korlátot tudtunk találni a teljesen automatizált eljárásunkkal.

Jelenleg a fizika területén több olyan probléma van, mikor egy-egy új ötlet önmagában nem elegendő, hogy a benne rejlő lehetőséget bemutassa. Sok esetben egy új struktúra amely jobb az elődjénél, alapesetben nem mutatja ezt a hatékonyságot. Többnyire a struktúra megfelelő paramétereinek a megtalálása is nagy feladat. Ezeket a problémákat, a korábbi. az elméleti matematika területén fellelt problémákhoz hasonlóan, optimalizálási problémákká konvertáltuk. A numerikus optimalizálás a GLOBAL eljárással, míg a célfüggvény kiértékelése, illetve a feltételek teljesülésének ellenőrzése a COMSOL Multiphysics program segítségével történt.

Az első fejlesztést igénylő feladatban az volt a cél, hogy maximalizáljuk a szupravezető nanovezetékes egyfotondetektorok (SNSPD) polarizációs kontrasztját [15]. Az SNSPD-k négy különböző nanoszál mintázatú, egydimenziós periodikus plazmonszerkezettel integrált rendszerek, melyek képesek a p-polarizált foton-szelektivitást közvetíteni a nióbbium-nitrid szupravezető felé. Ezen szupravezető segítségével képesek a detektálás tényét

rögzíteni. Optimalizálási szempontból a maximális arányú detektálás elérése mellett több különböző kritérium teljesülését kellett ellenőrizni. A cél szempontjából hasonló feladat volt, amikor három különböző homorú ezüst mag-héj nanorezonátor konfiguráció geometriáját optimalizáltuk. A cél az volt, hogy egyidejűleg javítsuk a beágyazott szilícium üresedési (SiV) gyémánt színpontok gerjesztését és kibocsátását [30]. A következő feladatban az optimalizálónak a fő célja nem egy maximális érték elérése volt, hanem egy olyan jelenség keresése, amelynek még az előfordulása sem volt bizonyított a szakirodalomban. Mint látható volt, korábban nem tudatosan, de ilyen jelenségeket találtunk más rendszereknél is. Bár akkor az eredeti célokat jobban teljesítő rendszerek kivételesen hoztak ilyen jelenségeket, nem tudatosan kerestük őket. De pont az optimalizáló, úgy-mond black-box-ként való alkalmazásának érdeme volt ez, mivel rátalált ezekre a ritka, kirívóan jól viselkedő rendszerekre [34].

De ezeken felül számos további cikk jött létre hasonló technikai megoldásokkal [16, 31, 33, 35, 36, 38, 39].

Hivatkozások

- [1] Bagóczki, Z. & Bánhelyi, B.: A Parallel Interval Arithmetic-based Reliable Computing Method on a GPU. *Acta Cybernetica*. **23**, pp. 491-501 (2017)
- [2] Bánhelyi, B.: Egy késleltetett differenciálegyenlet vizsgálata megbízható számítógépes eljárással. *Alkalmazott Matematikai Lapok*. **24**, pp. 131-150 (2007)
- [3] Bánhelyi, B., Biazini, M., Montresor, A. & Jelasity, M.: Peer-to-Peer Optimization in Large Unreliable Networks with Branch-and-Bound and Particle Swarms. *Applications of Evolutionary Computing, EvoWorkshops 2009: EvoCOMNET, EvoENVIRONMENT, EvoFIN, EvoGAMES, EvoHOT, EvoIASP, EvoINTERACTION, EvoMUSART, EvoNUM, EvoSTOC, EvoTRANSLOG, Tübingen, Germany, April 15-17, 2009. Proceedings*. **5484**, pp. 87-92 (2009)
- [4] Bánhelyi, B., Csendes, T. & Garay, B.: Optimization and The Miranda Approach in Detecting Horseshoe-type Chaos by Computer. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. **17**, pp. 735-747 (2007)
- [5] Bánhelyi, B., Csendes, T., Garay, B. & Hatvani, L.: A Computer-Assisted Proof of Σ_3 -Chaos in the Forced Damped Pendulum Equation. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. **7**, pp. 843-867 (2008)
- [6] Bánhelyi, B., Csendes, T. & Hatvani, L.: On the existence and stabilization of an upper unstable limit cycle of the damped forced pendulum. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **371**, 112702 (2020)
- [7] Bánhelyi, B., Csendes, T., Krisztin, T. & Neumaier, A.: Global Attractivity of the Zero Solution for Wright's Equation. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. **13**, pp. 537-563 (2014)
- [8] Bánhelyi, B., Csendes, T., Krisztin, T. & Neumaier, A.: A bounding scheme for proving the Wright conjecture on delay differential equations. *Acta Polytechnica Hungarica*. **15**, pp. 163-175 (2018)
- [9] Bánhelyi, B., Csendes, T., Lévai, B., Pál, L. & Zombori, D.: The GLOBAL Optimization Algorithm. Springer (Cham) (2018)

- [10] Bánhelyi, B., Palatinus, E. & Lévai, B.: Optimal circle covering problems and their applications. *Central European Journal of Operations Research*. **23**, pp. 815-832 (2015)
- [11] Biazizini, M., Bánhelyi, B., Montresor, A. & Jelasity, M.: Distributed hyper-heuristics for real parameter optimization. *Genetic and Evolutionary Computation Conference, GECCO 2009, Proceedings, Montreal, Québec, Canada, July 8-12, 2009*. pp. 1339-1346 (2009)
- [12] CPLEX: User's Manual for CPLEX,
<https://www.ibm.com/docs/en/icos/22.1.0>
- [13] Csendes, T., Bánhelyi, B. & Hatvani, L.: Towards a computer-assisted proof for chaos in a forced damped pendulum equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. **199**, pp. 378-383 (2007)
- [14] Csendes, T., Garay, B. & Bánhelyi, B.: A Verified Optimization Technique to Locate Chaotic Regions of Hénon Systems. *Journal of Global Optimization*. **35**, pp. 145-160 (2006)
- [15] Csete, M., Szenes, A., Marácz, D., Bánhelyi, B., Csendes, T. & Szabó, G.: Plasmonic Structure Integrated Single-Photon Detectors Optimized to Maximize Polarization Contrast. *IEEE Photonics Journal*. **9**, pp. 1-11 (2017)
- [16] Csete, M., Szenes, A., Vass, D., Bánhelyi, B. & Dombi, P.: Few-cycle localized plasmon oscillations. *Scientific Reports*. **10**, 12986 (2020)
- [17] Erdős, P.: On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. **35(7)**, pp. 374-384 (1949)
- [18] Galias, Z. & Zgliczynski, P.: Abundance of homoclinic and heteroclinic orbits and rigorous bounds for the topological entropy for the Hénon map. *Nonlinearity*. **14**, pp. 909-932 (2001)
- [19] GLPK: GNU Linear Programming Kit,
<https://www.gnu.org/software/glpk/>
- [20] Gurobi Optimization, LLC: Gurobi Optimizer Reference Manual
<https://www.gurobi.com>

- [21] Hubbard, J.: The Forced Damped Pendulum: Chaos, Complication and Control. *American Mathematical Monthly*. **106**, pp. 741-758 (1999)
- [22] Jaquette, J.: A proof of Jones' conjecture. *Journal of Differential Equations*. **266**, pp. 3818-3859 (2018)
- [23] Lévai, B. & Bánhelyi, B.: An optimization technique for verified location of trajectories with prescribed geometrical behaviour in the chaotic forced damped pendulum. *Central European Journal of Operations Research*. **21**, pp. 757-767 (2013)
- [24] Pál, L. & Csendes, T.: INTLAB implementation of an interval global optimization algorithm. *Optimization Methods and Software*. **24**, pp. 749-759 (2009)
- [25] Ratschek, H. & Rokne, J.: New Computer Methods for Global Optimization. Ellis Horwood (Chichester) (1988)
- [26] Selberg, A.: An Elementary Proof of the Prime-Number Theorem. *Annals of Mathematics*. **50(2)**, pp. 305-313 (1949)
- [27] Smale, S.: Differentiable dynamical systems. *Bulletin of The American Mathematical Society*. **73**, pp. 747-817 (1967)
- [28] Szabó, P., Markót, M., Csendes, T., Specht, E., Casado, L. & García, I.: New Approaches to Circle Packing in a Square – With Program Codes. Springer (Berlin) (2007)
- [29] Szegedy, C., Zaremba, W., Sutskever, I., Bruna, J., Erhan, D., Goodfellow, I. & Fergus, R.: Intriguing properties of neural networks. *2nd International Conference on Learning Representations, ICLR 2014, Banff, AB, Canada, April 14-16, 2014, Conference Track Proceedings*. (2014), <http://arxiv.org/abs/1312.6199>
- [30] Szenes, A., Bánhelyi, B., Szabó, L., Szabó, G., Csendes, T. & Csete, M.: Improved emission of SiV diamond color centers embedded into concave plasmonic core-shell nanoresonators. *Scientific Reports*. **7**, 13845 (2017)
- [31] Szenes, A., Vass, D., Bánhelyi, B. & Csete, M.: Active individual nanoresonators optimized for lasing and spasing operation. *Nanomaterials*. **11** (2021), <https://www.mdpi.com/2079-4991/11/5/1322>

- [32] Tjeng, V., Xiao, K. & Tedrake, R.: Evaluating Robustness of Neural Networks with Mixed Integer Programming. *International Conference on Learning Representations*. (2017), <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:47016770>
- [33] Tóth, B., Szenes, A., Maráczsi, D., Bánhelyi, B., Csendes, T. & Csete, M.: Polarization Independent High Absorption Efficiency Single-Photon Detectors Based on Three-Dimensional Integrated Superconducting and Plasmonic Patterns. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. **26**, pp. 1-9 (2020)
- [34] Tóth, E., Bánhelyi, B., Fekete, O. & Csete, M.: Metamaterial properties of Babinet complementary complex structures. *Scientific Reports*. **13**, 4701 (2023)
- [35] Tóth, E., Szalai, A., Somogyi, A., Bánhelyi, B., Csapó, E., Dékány, I., Csendes, T. & Csete, M.: Detection of biomolecules and bioconjugates by monitoring rotated grating-coupled surface plasmon resonance. *Opt. Mater. Express*. **7**, pp. 3181-3203 (2017)
- [36] Tóth, E., Ungor, D., Novák, T., Ferenc, G., Bánhelyi, B., Csapó, E., Erdélyi, M. & Csete, M.: Mapping fluorescence enhancement of plasmonic nanorod coupled dye molecules. *Nanomaterials*. **10** (2020), <https://www.mdpi.com/2079-4991/10/6/1048>
- [37] Van den Berg, J. & Jaquette, J.: A proof of Wright's conjecture. *Journal of Differential Equations*. **264**, pp. 7412-7462 (2018)
- [38] Vass, D., Szenes, A., Bánhelyi, B., Csendes, T., Szabó, G. & Csete, M.: Superradiant diamond color center arrays coupled to concave plasmonic nanoresonators. *Opt. Express*. **27**, pp. 31176-31192 (2019)
- [39] Vass, D., Szenes, A., Bánhelyi, B. & Csete, M.: Plasmonically enhanced superradiance of broken-symmetry diamond color center arrays inside core-shell nanoresonators. *Nanomaterials*. **12** (2022),
- [40] Vinkó, T. & Ratz, D.: A Multidimensional Branch-and-Prune Method for Interval Global Optimization. *Numerical Algorithms*. **37**, pp. 391-399 (2004)
- [41] Wright, E.: A non-linear difference-differential equation. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. **194**, pp. 66-87 (1955)

- [42] Zombori, D. & Bánhelyi, B.: Effects of Pooling in ParallelGlobal with Low Thread Interactions. *Informatica*. **45**, pp. 191-196 (2021)
- [43] Zombori, D., Bánhelyi, B., Csendes, T., Megyeri, I. & Jelasity, M.: Fooling a Complete Neural Network Verifier. *9th International Conference on Learning Representations, ICLR 2021, Virtual Event, Austria, May 3-7, 2021, Conference Track Proceedings*. (2021), <https://openreview.net/forum?id=4IwieFS44l>