Válasz Dr. Hartung Ferenc egyetemi tanár opponensi véleményére

Ezúton szeretném megköszönni Professzor Úrnak, hogy alaposan áttanulmányozta a „Számítógéppel segített bizonyítások és optimalizálási modellek dinamikai és fizikai feladatokra" című MTA doktori értekezésemet, valamint részletes opponensi véleményében értékelte a dolgozat szerkezetét, az új tudományos eredményeket, továbbá a kutatás használhatóságát és jelentőségét. Köszönöm továbbá, hogy az általam megfogalmazott új tudományos eredményeket elfogadta.

Az alábbiakban a bíráló kérdéseire és észrevételeire adott válaszokat találja. A kérdéseket és észrevételeket *dőlt betűvel* jelölöm, míg a válaszok normál szedésben szerepelnek.

1. kérdés: *Az 1. fejezetben a megbízható számítási módszer alkalmazásakor hogyan választotta meg* t_0 *értékét?*

Feltételezhető, hogy a periodikus megoldásnak több zéruspontja is van, azonban ezek a vizsgálat szempontjából ekvivalensek, ezért tetszőleges zéruspont választható. A bizonyítás során kizárólag a t_0 érték környezetében fogalmazunk meg állításokat, amely így viszonyítási pontként szolgál. Az érvelés lényegében független a t_i konkrét értékétől, ezért t_0 választása akár nulla is lehet.

Numerikus szempontból ugyanakkor nem közömbös, hogy a t_0 értékek hogyan kerülnek megválasztásra, mivel a $[t_i, t_{i+1}]$ intervallumok hossza szerepel a képletekben. A befoglalások numerikus pontossága és hatékonysága érdekében a t_i értékeket ábrázolható számokként választottuk meg úgy, hogy a közöttük lévő távolság is pontosan reprezentálható (kettő hatványa) legyen. Ezzel összhangban természetes választásnak bizonyul a $t_0 = 0$.

2. kérdés: *Differenciálegyenletek megoldásai megbízható számítással történő követése módszerénél milyen korlátok vannak a gyakorlatban a feladatok körére? Van-e módszer például időtől függő vagy akár állapotfüggő késleltetést tartalmazó funkcionál-differenciálegyenlet megoldásainak megbízható követésére? Vagy két konstans késleltetést tartalmazó funkcionál-differenciálegyenlet esetében, ahol a késleltetések irracionálisak, és a hányadosuk is irracionális?*

Kezdetben megpróbálkoztunk a Wright-egyenlet nem tisztán késleltetett alakjának vizsgálatával. Ekkor a kényszerrezgéses inga esetében alkalmazott módszereket igyekeztünk kiegészíteni a késleltetett tag kezelésével. Ehhez szükség volt a differenciálegyenlet korábbi megoldásainak tárolására, valamint a megfelelő befoglalás beillesztésére az adott időpillanatban.

Az alkalmazott algoritmusok egyik előnye a változó lépéshossz használatának lehetősége volt, ugyanakkor ez programozási nehézségeket is okozott: ha az aktuális lépéshossz nem illeszkedett a korábban tárolt értékekhez, akkor vagy le kellett mondani a változó lépéshosszról, vagy nagyobb, így kevésbé hatékony befoglalásokat kellett alkalmazni. Tapasztalataink szerint ez a numerikus többlet jelentősen megnehezítette a bizonyítást.

Az idő- és állapotfüggő késleltetést tartalmazó eset hasonló nehézségekkel jár. Tudomásom szerint jelenleg nincs semmilyen általános megbízható késleltetett megoldó eljárás, bár technikailag megvalósítható. A korábbi tapasztalatok alapján azonban az ilyen módszerek csak korlátozottan alkalmazhatók általános célra.

3. kérdés: *A körökkel történő lefedés módszerénél mutatott olyan futási példát, ahol a kétdimenziós intervallumokat generáló algoritmus olyan felosztást eredményezett, ahol az előre megadott ϵ méretnél kisebb intervallumra nem tudta a lefedést igazolni. Az optimalizálási algoritmus determinisztikus, azaz ebben az esetben nem ad nyilván megoldást. Feltételezem, hogy a kezdeti befoglaló intervallum, illetve az ϵ értékének megváltoztatásával lehet ilyenkor próbálkozni az algoritmus újrafuttatásakor. Ha jól értem, más paraméter nincs az algoritmusban, ha a körök száma és a középpontjuk rögzített. Mennyire érzékeny a módszer ezen értékek "helyes" megválasztására?*

A kezdeti intervallum lényegében a feladat meghatározott része, így valódi szabad paraméternek gyakorlatilag csak az ϵ értéke tekinthető. Az erre vonatkozó tételek elsősorban elméleti jellegűek, amelyek az algoritmusban rejlő lehetőségek szemléltetését szolgálják. Az ϵ értékét a gyakorlatban jellemzően igen kicsinek, az ábrázolhatóság határát megközelítő nagyságrendűnek választjuk. Ilyen esetben az algoritmus pozitív eredménnyel zárul, amennyiben az adott környezetben, a választott módszerrel a bizonyítás elérhető.

Ha azonban az ϵ így sem elég kicsi, akkor valószínűsíthető, hogy a feladat megoldásához lényegesen bonyolultabb technikákra lesz szükség, amelyek túlmutatnak a hagyományos ábrázolási módszereken. Az ilyen eljárások alkalmazása ugyanakkor várhatóan jelentősen növelné a futási időt. Természetesen a rendkívül kis ϵ értékek önmagukban is okozhatnak extrém hosszú futási időt, ez azonban részben ellensúlyozható párhuzamosítási eljárásokkal – ebben az irányban több kutatást is végeztem.

1. észrevétel: *A 7., 8. és 10. oldalon az 1.2., 1.4. és 1.6. ábrák tengelyeinek feliratai nem korrektek. A függőleges tengely feliratát inkább el lehetett volna hagyni. Az 1.2. (b) ábrán a függvény képletében α kell $-\alpha$ helyett.*

A doktori értekezésben sajnálatos módon nem definiáltam külön jelölést a korlátozó képletekre. Sajnos igaz, hogy a használt jelölés nem helyes, így utólag belátom, hogy jobb lett volna, ha nem szerepel ott semmilyen jelölés. Valóban, az ábrán szereplő képletben a negatív előjel nem helyes, köszönöm az észrevételt.

2. észrevétel: *A 9. oldalon az $y^{(upper)}_{(dec,n)}(t)$ képletét a $t'_0 - p_M \leq t \leq t'_0$, az $y^{(lower)}_{(inc,n)}(t)$ képletét a $t''_0 - p_m \leq t \leq t''_0$ esetére kellene értelmezni.*

Tulajdonképpen nem tekinthető teljesen helytelennek, hogy az eljárásban mindössze 1 db egy hosszú szakaszt jelölünk. Az adott módszer alkalmazása során ugyanis csupán erre van szükség, ez az egy hosszú szakasz is elegendő a későbbiekben következő szakaszok becsléséhez. Természetesen a számítás idejére ideiglenesen egy hosszabb tárolt szakasz kerül felhasználásra, azonban a korlátozó függvény összeállítását követően már csak az egy hosszúságú szakasz marad releváns. Kétségtelenül zavaró lehet ugyanakkor, hogy ez a jelölés nem minden esetben jelenik meg konzisztensen (például az 1.7. ábrán).

3. észrevétel: *A 33. oldalon a $P(I_i)$ gondolom a Poincaré-leképezés (de ezt nem mondta ki), amit egyébként a 31. oldalon $\mathcal{P}$-vel jelölt.*

Igen, a Poincaré-leképezést jelölné és valóban ebben a részben is $\mathcal{P}$-vel kellett volna jelölni ezt a leképezést.

4. észrevétel: *A 63. oldalon írja: "azt szeretnénk, ha a $G(x) \cap X_{valid}$ tartomány minden egyes pontja ugyanazt az osztályozási címkét kapná, mint az x". Ez nem világos megfogalmazás, hiszen a $G(x)$ halmaz definíció szerint pontosan az ilyen elemekből áll, azaz ez automatikusan teljesül.*

A megállapítás teljes mértékben megalapozott: a ténylegesen azonos címkéjű elemek, valamint azok a halmazok, amelyekről elvárható, hogy az x környezetében azonos címkét viseljenek, egységes jelölést kaptak. A doktori műben a továbbiakban ez a jelölés kizárólag az elvárt (vagyis a modell által feltételezett) címkézésre vonatkozik.

5. észrevétel: *A 71. oldal alján a globális optimalizálási probléma definíciójában szereplő $F(x)$ függvényről azt írja, hogy "$F(x)$ a valós számok halmazán értelmezett, n-dimenziós", de utána rögtön azt írja, hogy az x változó egy vektor.*

Utólag visszatekintve sajnálattal látom, hogy ezen a ponton a dolgozatban némi zavar maradt, amit az áttekintés során sem vettem észre. Őszintén sajnálom, hogy ez a rész ilyen formában került a végleges változatba. A helyes megfogalmazás az lenne, hogy $F(x)$ n-változós függvény.

6. észrevétel: *A 80. oldalon az 5.1. tétel megfogalmazásában a használt halmazok nincsenek definiálva, csak az 5.4. ábráról lehet kitalálni a jelölést. Az sem világos, hogy az 5.1. tétel saját vagy az irodalomból vett eredmény.*

Eredetileg az alábbi kétdimenziós tartományokat definiálta Piotr Zgliczyński:

$$E = \left\{ x \in X \;\middle|\; 1 \leq |x_1| \leq 2, |x_2| \geq 2 \right\},$$

$$\mathcal{O}_L = \{x \in X \mid x_1 < -2\}, \quad \mathcal{O}_C = \{x \in X \mid |x_1| \leq 1\}, \quad \mathcal{O}_R = \{x \in X \mid x_1 > 2\},$$

$$L = \{x \in X \mid -2 \leq x_1 \leq -1, |x_2| \leq 2\}, \quad R = \{x \in X \mid 1 \leq x_1 \leq 2, |x_2| \leq 2\},$$

$$a = L \cap \mathcal{O}_L, \; b = L \cap \mathcal{O}_C, \; c = R \cap \mathcal{O}_C, \; d = R \cap \mathcal{O}_R.$$

A későbbi vizsgálatok során ezeket a tartományokat módosítottuk, illetve elmozdítottuk. A legfontosabb szempont azonban az egymáshoz viszonyított helyzetük, amelyet a kapcsolódó ábrán szemléltettem. Természetesen célszerű lett volna ennek az információnak az értekezésben való egyértelmű közlése is, hiszen ez hozzájárult volna az eredmények könnyebb értelmezéséhez.

Összegezve nagyra értékelem Professzor Úr részletes és tárgyszerű észrevételeit. Külön öröm számomra, hogy az opponensi vélemény szerint az értekezés megfelel az MTA doktora cím követelményeinek. Végezetül szeretném még egyszer megköszönni alapos munkáját és tisztelettel kérem válaszaim elfogadását!

Bánhelyi Balázs