

Válasz Dr. Simon Péter egyetemi tanár opponensi véleményére

Ezúton szeretném megköszönni Professzor Úrnak, hogy alaposan áttanulmányozta a „Számítógéppel segített bizonyítások és optimalizálási modellek dinamikai és fizikai feladatokra” című MTA doktori értekezésemet, valamint részletes opponensi véleményében értékelte a dolgozat szerkezetét, az új tudományos eredményeket, továbbá a kutatás használhatóságát és jelentőségét. Köszönöm azt is, hogy az általam megfogalmazott új tudományos eredményeket elfogadta.

Professzor Úr teljes joggal kifogásolta, hogy az elért eredmények bemutatása helyenként túl nagy vonalakban történt, ami különösen az utolsó fejezetekre igaz. E fejezetekben a GLOBAL algoritmus fejlesztéseit igyekeztem bemutatni, és hangsúlyozni, hogy ezt az eljárást számos területen alkalmaztam, illetve több eredményem is kapcsolódik hozzá. Az eredmények részletes ismertetését ugyanakkor tudatosan próbáltam rövidre fogni, ami sajnálatos módon valóban a megérthetőség rovására ment.

Az alábbiakban a bíráló kérdéseire adott válaszokat sorolom fel. A kérdéseket és észrevételeket *dőlt betűvel* jelölöm, míg a válaszok normál szedésben szerepelnek.

1. kérdés: *Az 1. fejezet eredményei rendkívül technikai jellegűek. Mennyire alkalmazható a kifejlesztett módszer általánosabb kontextusban, pl. más típusú differenciálegyenletekre?*

Az elért eredmények valóban erősen technikai jellegűek, azonban tapasztalataim alapján a bemutatás jelenlegi részletessége indokolt. A megbízhatóság szempontjából elengedhetetlen, hogy minden apró részlet pontosan rögzítésre kerüljön, hiszen ezeket az eredményeket matematikai erejű bizonyításként értékeljük. A részletek pontos dokumentálása biztosítja, hogy az eljárások és következtetések teljes mértékben reprodukálhatók és ellenőrizhetők legyenek, ami a tudományos hitelesség alapfeltétele.

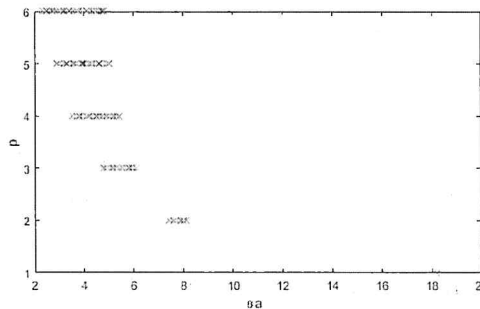
A jelen dolgozatban alkalmazott technikát később a Jones-sejtés esetében is sikerrel használták. Az alkalmazott korlátozó módszer a periodikus megoldások kizárására általánosan alkalmazható bármely késleltetett differenciálegyenlet esetében. Jelen problémában a nehézséget a nem fix periódushossz okozta, azonban az erre kidolgozott eljárás más, hasonló szerkezetű probléma esetében is ígéretesen használhatónak tűnik. Véleményem szerint a technikai részletek jó eséllyel átültethetők más, fix késleltetésű differenciálegyenletek vizsgálatára is.

2. kérdés: *Mi a 2.2 és 2.3 szakasz konklúziója a 2. fejezet kiinduló kérdése kapcsán? Állíthatjuk, hogy például $p > 3$ esetén stabilizálható a felső egyensúlyi állapot?*

Korábban erre vonatkozóan is végeztünk kísérleteket. A p paraméter a 2π időintervallum alatt bekövetkező rezgések számát jelöli, és mivel 2π -periodikus viselke-

déseket vizsgálunk, ezért a p értékének egész számnak kell lennie. Természetesen más, nem egész értékek esetén is előfordulhat stabilizálódás, azonban az általunk alkalmazott eljárás elméletileg is csak olyan esetekben működik helyesen, amikor a periodikus megoldás periódusa a 2π egész többszöröse.

Az a paraméter értékére ilyen megkötés nem vonatkozik, az elvileg tetszőleges lehet. Néhány egész p és konkrét a érték mellett megvizsgáltuk, hogy tapasztalható-e stabilizálódás. A sikeres paraméterértékek az 1. ábrán láthatók.



1. ábra. Stabil viselkedések különböző a és p értékekre.

Ezek az eredmények korábban nem kerültek publikálásra, mivel nem találtunk bennük különösebb tudományos újdonságot vagy általánosítható következtetést. Az itt bemutatott esetek elsősorban az általunk alkalmazott eljárás működését illusztrálják, ezért inkább demonstrációs jellegűek, semmint önálló elméleti eredmények.

3. kérdés: A 3.5 fejezetben bemutatott eredmények mesterségesen generált példákra vonatkoznak. Van-e a jelöltnek tapasztalata az algoritmus alkalmazhatóságáról nagy méretű fedési feladatok megoldása tekintetében, különösen valamilyen gyakorlati kérdéssel kapcsolatban?

A technikát megpróbáltuk alkalmazni az egységnégyzet hat egybevágó körrel történő fedésének problémájára. Bár részleges eredményeket sikerült elérnünk, sajnos a jelenleg legjobb ismert eredményt nem tudtuk felülmúlni.

Emellett egy ipari projekt keretében kisebb szenzorhálózatokon is kipróbáltuk a módszert, mint részfeladat. Itt egy adott gépre körülbelül 10–12 szenzort kellett elhelyezni. A gépen előre meghatározottak voltak azok a pozíciók, ahová szenzor kerülhetett, azonban nem volt kötött, hogy ezek közül pontosan mely helyeket választjuk. Az adott helyek kiválasztásánál célunk az volt, hogy az egyes szenzorok által lefedett területek közel azonosak legyenek, vagyis a gép felületét minél egyenletesebben fedjük le. Ennek a problémának egy részfeladata jelen fejezetben tárgyalt feladat.

Ennek ellenére egyik vizsgált eset sem tekinthető nagy méretű feladatnak.

Tapasztalataink szerint a módszer nem skálázódik jól nagyobb problémákra, ami sajnos általánosan jellemző minden intervallumos megoldásra.

- 1. észrevétel:** *Az 1.1 Állítás bizonyítása nincs bemutatva. Ennek nyilvánvalónak kellene lennie az állítás utáni ábrák alapján, vagy az irodalomban valahol megtalálható? Az 1.2 Ábra (b) részében alfa előtt nem kellene a negatív előjel.*

Wright eredeti cikkében ez szintén megtalálható, de úgy gondoltam, hogy az ábra jelentősen megkönnyíti a megértést. A bizonyításnak két lényegi pontja van:

- a zéruspont után 1 egységgel található a maximum,
- a zéruspont előtti, 1 hosszúságú szakaszon a szélsőértékekkel vett integrál adja a korlátokat.

Ezt szemlélteti az 1.3-as ábra (c) része. Az 1.2-es állítás feltételei hasonlóak, azonban ezeknél már az is lényeges, hogy a függvény hogyan viselkedik a zéruspont előtt. Wright az eredeti tanulmányában ezeket több oldalon keresztül részletesen bizonyítja, de az egységes forma érdekében itt mindkettőt csak ezen az összefoglaló szinten mutattam be.

Köszönöm az észrevételt, valóban, az ábrán szereplő képletben a negatív előjel nem helyes.

- 2. észrevétel:** *Az (1.6) egyenlőtlenség az ábrán illusztrálva van, de jó lenne látni az elméleti levezetését is.*

Wright eredeti tanulmánya lényegében az adott eset, valamint az 1,5-ös eset részletes vizsgálatára épül. A levezetések részletes ismertetését nem tartottam szükségesnek, mivel úgy éreztem az illusztrációk önmagukban is megfelelően szemléltetik, hogy Wright módszerében nincs további tartalmi többlet – az általa bemutatott eredmények tehát élesek. Célom az volt, hogy az olvasóban kialakuljon az a kép, miszerint e gondolatmenet segítségével kizárólag az 1,5-ös eset bizonyítható.

Mivel az algoritmusomban ezeket a képleteket közvetlenül felhasználom, a bemutatásukat ezen az összefoglaló szinten mindenképpen indokoltnak tartottam.

- 3. észrevétel:** *Az 1.6 Ábra aláírásából nem derül ki, hogy mely függvényeket mutatja. Az 1.2 Állítás bizonyítását az ábra alapján nyilvánvalónak tekintjük, vagy az irodalomban a könnyen követhető bizonyítás elérhető?*

Az 1.6-os ábrán szereplő függvény a dolgozatban képletszerűen nem jelenik meg; csupán a képzésének leírása szerepel. Egyébként a függvény a következőképpen írható fel:

$$-\alpha \left(e^{-\left(\alpha(e^M-1)-M\frac{e^M}{e^M-1}+1\right)} - 1 \right) + \left(-\alpha(e^M-1) - M\frac{e^M}{e^M-1} + 1 \right) \frac{e^{-\left(\alpha(e^M-1)-M\frac{e^M}{e^M-1}+1\right)}}{e^{-\left(\alpha(e^M-1)-M\frac{e^M}{e^M-1}+1\right)} - 1} - 1.$$

A képlet láttán indokolt, hogy ne szerepeljen a dolgozatban teljes terjedelmében.

Egy további megfelelő megoldás lehetett volna a teljes képlet közlése és a képzési módszer pusztán szöveges leírása közötti átmeneti megközelítés, amelyben a két korlátozó függvényt jelöléssel vezettem be, és ezek segítségével adom meg a formulát. Ennek megfelelően az 1.2-es állításban szereplő (1.7)-es és (1.9)-es képleteket egységesen $G(x)$ -szel jelölöm, ahol

$$G(x) = \alpha(e^x - 1) - x \frac{e^x}{e^x - 1} + 1.$$

Ekkor a (1.7)-es és (1.9)-es képletek rendre az alábbi alakot öltik:

$$M \leq -G(-m) \text{ és } m \leq G(M)$$

Így az 1.6-os ábrán szereplő kifejezés

$$-G(-G(M))$$

alakban adható meg.

Továbbá a bizonyítás bemutatását itt sem tartottam szükségesnek a korábban ismertetett szempontok miatt. A két esetet igyekeztem egységesen bemutatni, amennyire ez lehetséges. Érdeemes megjegyezni, hogy a bizonyítás nem egyszerű: az eredeti levezetés nem tisztán késleltetett alakban történik, míg a dolgozatban kizárólag ezt a formát alkalmazzuk, ami további nehézségeket okozott volna a bemutatás során.

4. észrevétel: A 13. oldal alján a függvény argumentumában az intervallum szerepel. Ennek a jelölésnek a magyarázata fontos lenne a képlet bevezetése előtt.

A szakterületünkön ez a jelölés teljesen megszokott az intervallum-aritmetikában. Formálisan:

Legyen $F : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ befoglaló függvénye $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -nek az \mathbf{X} intervallumon, ha minden $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ -re

$$f(\mathbf{Y}) = \{z : z \in \mathbb{R} \mid z = f(y) \text{ és } y \in \mathbf{Y}\} \subseteq F(\mathbf{Y})$$

teljesül.

Ugyanakkor teljesen igaz, hogy hasznos lett volna a definíciót explicit módon megadni, mivel a dolgozatot más szakterületekről érkező olvasók is olvashatják. Általában

a művek elején szokott szerepelni egy rövid összefoglaló a jelölésekről és alapfogalmakról, de ez jelen esetben sajnálatos módon kimaradt.

5. észrevétel: *A 2.1 fejezetben miért választjuk a $\gamma=0.1$ értéket?*

Valójában ez a választás nem az én döntésem volt, hanem John H. Hubbard nevéhez fűződik. Feltehetően teljesen önkényes volt a részéről. Egy lehetséges magyarázat az lehet, hogy Hubbard elsősorban a rendszer kaotikus viselkedésének illusztrálására törekedett, és ez a viszonylag nagy érték jól láthatóvá tette a bemutatni kívánt jelenségeket.

6. észrevétel: *Jó lenne iránymutatást látni a 32. oldal alján levő becslés levezetésére.*

Ennek a lemmának a levezetése nem az én eredményem, ezért nem részleteztem. Korábban azonban én egy jóval nagyobb konstanszt vezettem le, amely természetesen csak a periodikus megoldásokat kereső algoritmus futási idejére volt hatással, az eredményt nem befolyásolta. Ezzel a nagyobb konstansssal további régiókat is vizsgálni kellett, ahol periodikus megoldás nem létezik, és az algoritmusom ezekben természetesen nem talált megoldást. A részletes levezetés a válaszomhoz csatolt mellékletben található.

7. észrevétel: *Mi indokolja a 2.4 szakaszban az $a=0.5$, $p=4$ választást? Lehet-e elméleti úton ilyen értékhez jutni, illetve megadható-e ezen paraméterekre egy intervallum, amelyben a megfelelő értékek vannak?*

Én előnyben részesítem a 2 hatványokat, és az ismeretlen számok keresése során ez gyakorlati szempontból is előnyös lehet. Jelen esetben pedig a p paraméter esetében részben szükséges is (egésznek kell lennie), mivel a 2π periodicitás megtartása elengedhetetlen. Az általam elindított algoritmus 2 hatványokon próbálkozott, és az első érvényes paraméter, amit találtam ez volt. Később ábrát is készítettünk a megfelelő paraméterekről, de az eredményt nem találtuk különösebben érdekesnek.

Nem ismert számomra, hogy elméleti úton hogyan lehetne ilyen eredményekre jutni. A p paraméter esetében csak egész értékekre lehet könnyen bizonyítani; más értékek esetén a rendszer nem marad 2π periodikus. Az a paraméter esetében a megfelelő értékek automatikusan is kereshetők, illetve a stabilitás bizonyítható, akár intervallumokra is. Hasonló eljárásokat alkalmaztam a Hénon-leképezés kaotikus paramétereinek keresése során is.

8. észrevétel: *A 4. fejezet eredményei nagyrészt számítógépes vizsgálatokon alapulnak, így az olvasó, aki a programok futását nem látta, a szöveges leírásból nehezen tudja követni a gondolatmenetet.*

Jelenleg ezzel a területtel foglalkozom a legtöbbet, és egyre világosabban látom, hogy

rendkívül nehéz jól érthetően leírni az eredményeket. Több cikkünk bírálati eljárása során tapasztaltuk, hogy ami számunkra nyilvánvaló, az mások számára gyakran egyáltalán nem az, és fordítva. Úgy tűnik, hogy ennek a területnek a kommunikálása jelentősen eltér az eddig általam megszokott tudományos stílustól. A további munkásságom során igyekszem majd a fentiek figyelembe vételével publikálni.

9. észrevétel: *A 4. fejezetben a (4.1) feltétel átfogalmazása a (4.2) és (4.3) egyenlőtlenségekre részletesebb magyarázatot igényel.*

Az előző észrevételhez kapcsolódhat ez is, számomra viszonylag gyorsan érthető, hogyan lehet az optimalizálási modellek között áttérni, viszont a témában nem jártas olvasó számára ez nem triviális. Már látom, hogy részletesebb magyarázat lett volna jobb a teljes megértéshez.

10. észrevétel: *A 4.6 Ábra aláírásában segítené magyarázat, hogy mihez tartozik a felső és az alsó sor.*

A neuronok A, B, C és D jelölést kaptak, és kimeneteik az alsó sorokban láthatók x függvényében, mind a valós, mind a numerikus környezetben. Úgy gondoltam, hogy a fő szöveg részletesen magyarázza az ábrát; természetesen bővebb, részletes ábraaláírás is készíthető lett volna a könnyebb értelmezés érdekében.

11. észrevétel: *Az 5.1 szakasz elején a minimalizálandó függvény nem a valós számok halmazán, hanem az n -dimenziós vektorok halmazán van értelmezve és valós értékű.*

Utólag visszatekintve sajnálattal látom, hogy ezen a ponton a dolgozatban némi zavar maradt, amit az áttekintés során sem vettem észre. Őszintén sajnálom, hogy ez a rész ilyen formában került a végleges változatba.

12. észrevétel: *Az 5.1 Tételben a jelöléseket ismertetni kellene, így nem követhető az állítás.*

Eredetileg az alábbi kétdimenziós tartományokat definiálta Piotr Zgliczyński:

$$E = \{x \in X \mid 1 \leq |x_1| \leq 2, |x_2| \geq 2\},$$

$$\mathcal{O}_L = \{x \in X \mid x_1 < -2\}, \quad \mathcal{O}_C = \{x \in X \mid |x_1| \leq 1\}, \quad \mathcal{O}_R = \{x \in X \mid x_1 > 2\},$$

$$L = \{x \in X \mid -2 \leq x_1 \leq -1, |x_2| \leq 2\}, \quad R = \{x \in X \mid 1 \leq x_1 \leq 2, |x_2| \leq 2\},$$

$$a = L \cap \mathcal{O}_L, \quad b = L \cap \mathcal{O}_C, \quad c = R \cap \mathcal{O}_C, \quad d = R \cap \mathcal{O}_R.$$

A későbbi vizsgálatok során ezeket a tartományokat módosítottuk, illetve elmozdítottuk. A legfontosabb szempont azonban az egymáshoz viszonyított helyzetük, amelyet a kapcsolódó ábrán szemléltettem. Természetesen célszerű lett volna ennek

az információnak a doktori műben való egyértelmű közlése is, hiszen ez hozzájárult volna az eredmények pontosabb értelmezéséhez.

- 13. észrevétel:** *Az 5.4 Definícióban és az 5.5 Ábrán szereplő jelöléseket nem vezeti be a szerző, így a hozzájuk tartozó magyarázat nem érthető.*

A korábban tett megállapításnak megfelelően az 5.1-es Tételben definiált régiókat módosítani kellett. Ennek során az L és R régiókat egyszerű négyszög alakzatokként határoztuk meg, és ezek koordinátáit tüntettük fel az eredmények között. Ez a megközelítés lehetővé tette a modell egyszerűsítését, valamint az eredmények áttekinthetőbb és egyértelműbb bemutatását. A V -k a megfelelő régiók adott csúcsainak koordinátáit jelölik. Természetesen célszerű lett volna ezen információt a műben is egyértelműen közölni, mivel ez hozzájárult volna a bemutatott módszer és eredmények pontosabb értelmezéséhez.

- 14. észrevétel:** *Az 5.10 szakaszban nincs értelmezve az adott kontextusban az entrópia jelentése, sem a karakterisztikus polinomok származtatása. Így az 5.10 Ábrán összefoglalt eredmény nem értelmezhető.*

A topologikus entrópia $h(\varphi)$ egy folytonos leképezés, $\varphi : X \rightarrow X$ esetén azt méri, hogy a rendszer pályái (trajektóriái) mennyire különböznek egymástól az idő előrehaladtával – vagyis milyen gyorsan nő a dinamikai rendszer komplexitása.

Formálisan:

$$h(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon),$$

ahol $s_n(\varepsilon)$ az (n, ε) -szeparált pontok maximális száma, azaz azoké a pontoké, amelyek n iteráción keresztül legalább ε -nyira eltérnek egymástól valamely időpillanatban.

Egyszerűbben fogalmazva az $s_n(\varepsilon)$ megadja, hány különböző pályát tudunk megkülönböztetni n lépés után legalább ε pontossággal, míg az entrópia $h(\varphi)$ ennek az exponenciális növekedési ütemét méri n -hez képest. Ha $h(\varphi) = 0$, akkor a rendszer *rendezett*, azaz kis eltérések nem vezetnek lényegesen különböző viselkedéshez. Ha $h(\varphi) > 0$, akkor a rendszer kaotikus, vagyis a pályák gyorsan szétválnak – a kezdeti feltételekre való érzékenység magas. Minél nagyobb a topologikus entrópia, annál „erősebb” a káosz.

- 15. észrevétel:** *Az 5.11 szakaszban bemutatott fizikai problémák verbális leírásából nem lehet a vizsgált matematikai feladatot azonosítani, így nem értékelhető a dolgozatban szereplő leírás alapján az eredmény. A szakasz végén idézett [82] cikkben sem mutatják be a vizsgált matematikai modellt.*

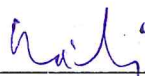
Matematikai értelemben nem beszélhetünk konkrét modellről. A COMSOL egy fizikai folyamatokat szimuláló szoftver, amely a vizsgált objektumokon hajtja végre

a kívánt szimulációkat. A szimulációk háttérében olyan képletek állnak, amelyek sok esetben beépített, illetve összetett fizikai folyamatokat leíró összefüggések. Ezek részletes ismertetését feleslegesnek éreztem, mivel a képletek jellemzően egy-egy mesh pontra vonatkoznak. Így a teljes objektum viselkedésére vonatkozó közvetlen következtetés nehézkes.

Az optimalizálás célja ezzel szemben olyan mennyiségek meghatározása, amelyek az objektum egészére jellemzők. Az optimalizáló algoritmus ezen objektumok paramétereit módosítja annak érdekében, hogy a célfüggvény értéke a lehető legkedvezőbb legyen.

A dolgozat ezen részét újraolvasva úgy látom, hogy a COMSOL szerepét részletesebben és pontosabban kellett volna kifejtenem.

Nagyrá értékelem Professzor Úr részletes és tárgyyszerű észrevételeit és kérdéseit. Az opponensi véleményben foglalt pozitív értékelés – miszerint az értekezés megfelel az MTA doktora cím elnyeréséhez szükséges tudományos követelményeknek – számomra különösen megtisztelő. Végezetül szeretném még egyszer megköszönni Professzor Úr alapos munkáját és tisztelettel kérem válaszaim elfogadását!



Bánhelyi Balázs

Melléklet

Az alábbiakban a 6. észrevétel teljes bizonyítását megadom.

Lemma. Ha $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ egy 2π -periodikus megoldása a

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\sin x_1 - 0.1 x_2 + \cos t, \end{cases}$$

rendszernek, akkor

$$|x_2(0)| \leq 10.1.$$

Bizonyítás.

A második egyenletet írjuk a standard elsőrendű inhomogén alakra:

$$x_2'(t) + 0.1 x_2(t) = -\sin x_1(t) + \cos t.$$

Alkalmazzuk a variation of constants (integráló tényezős) eljárást: az integráló tényező $\mu(t) = e^{0.1t}$, így

$$\frac{d}{dt}(e^{0.1t} x_2(t)) = e^{0.1t} (-\sin x_1(t) + \cos t).$$

Integráljunk 0-tól t -ig:

$$e^{0.1t} x_2(t) - x_2(0) = \int_0^t e^{0.1s} (-\sin x_1(s) + \cos s) ds.$$

Átrendezve:

$$x_2(t) = e^{-0.1t} x_2(0) - e^{-0.1t} \int_0^t e^{0.1s} (\sin x_1(s) - \cos s) ds.$$

Mivel x_2 2π -periodikus, felírhatjuk a fenti egyenletet $t + 2\pi$ -re is, és összevetve a periódicitás miatt kapjuk (konkrétan a t -tól független relációt):

$$(e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1)x_2(0) = - \int_0^{2\pi} e^{0.1s} (\sin x_1(s) - \cos s) ds. \quad (1)$$

Vegyük (1) abszolútértékét és alkalmazzuk a háromszög-egyenlőséget:

$$|(e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1)x_2(0)| \leq \left| \int_0^{2\pi} e^{0.1s} \sin x_1(s) ds \right| + \left| \int_0^{2\pi} e^{0.1s} \cos s ds \right|.$$

Most becsüljük a két integrált külön-külön.

(i) A $\sin x_1$ -es tagra trivális becslés:

$$\left| \int_0^{2\pi} e^{0.1s} \sin x_1(s) ds \right| \leq \int_0^{2\pi} e^{0.1s} |\sin x_1(s)| ds \leq \int_0^{2\pi} e^{0.1s} ds.$$

Az utóbbi zárt alakban:

$$\int_0^{2\pi} e^{0.1s} ds = \frac{1}{0.1} (e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1) = 10(e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1).$$

(ii) A $\cos s$ -es integrált pontosan ki tudjuk számolni az ismert $\int e^{as} \cos(bs) ds$ formula segítségével:

$$\int e^{as} \cos(bs) ds = \frac{e^{as}}{a^2 + b^2} (b \sin(bs) + a \cos(bs)) + C.$$

Esetünkben $a = 0.1$, $b = 1$. Tehát

$$\int_0^{2\pi} e^{0.1s} \cos s ds = \frac{e^{0.1s}}{0.1^2 + 1} (\sin s + 0.1 \cos s) \Big|_0^{2\pi} = \frac{0.1}{1.01} (e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1).$$

(Ez utóbbi pozitív szám; abszolút értéke megegyezik a jobb oldalával.)

(iii) Összevonva az (i) és (ii) összefüggéseket:

$$|(e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1)x_2(0)| \leq 10(e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1) + \frac{0.1}{1.01}(e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1).$$

Faktor kiemelésével:

$$(e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1) |x_2(0)| \leq (e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1) \left(10 + \frac{0.1}{1.01} \right).$$

Mivel $e^{0.1 \cdot 2\pi} - 1 > 0$, oszthatunk vele, így kapjuk a kívánt korlátot:

$$|x_2(0)| \leq 10 + \frac{0.1}{1.01} \approx 10.0990 \dots$$

Ennek kerekített formája 10.1. \square

Megjegyzés. A domináns lépés a bizonyításban az, hogy a $\sin x_1$ -t egyszerűen 1-gyel (azaz $|\sin x_1| \leq 1$ -gyel) helyettesítjük, ez a becslést konzervatívabbá teszi, de nyilván helyes a korlát. A \cos -tagot viszont pontosan integráljuk, ezért az adódó konstans $\frac{0.1}{1.01}$ is megjelenik a végső korlátban. Sajnos az (1)-es képletet akartam a doktori műbe beleírni ezzel a gondolattal, hogy mégis utaljak a bizonyítás lényegi részére, de így több ponton is helytelen lett.