

Válasz Dr. Horváth Zoltán egyetemi tanár opponensi véleményére

Ezúton szeretném megköszönni Professor Úrnak, hogy alaposan áttanulmányozta a „Számítógéppel segített bizonyítások és optimalizálási modellek dinamikai és fizikai feladatokra” című MTA doktori értekezésemet, valamint részletes opponensi véleményében értékelte a dolgozat szerkezetét, az új tudományos eredményeket, továbbá a kutatás használhatóságát és jelentőségét. Köszönöm azt is, hogy az általam megfogalmazott új tudományos eredményeket elfogadta.

Professor Úr észrevétele – miszerint a dolgozatban több helyen pontatlan vagy hiányos megfogalmazások, illetve kisebb indoklási hibák találhatóak – alapvetően jogos. A dolgozat készítése során a tapasztalatom és a célkitűzésem az volt, hogy egy olyan, alapvetően érthető szöveget készítsek, amely nem törekszik minden részlet teljes mélységű és formálisan precíz bemutatására, és amelyben a hangsúly elsősorban a saját eredményeimen van. A korábbi tapasztalatom az volt, hogy az általában ismert információkról elegendő ilyen részletességgel beszélni.

A 4. fejezet az, amellyel manapság a legtöbbet foglalkozom. Ezzel kapcsolatban most inkább az a tapasztalatom, hogy sokkal részletesebb és finomabban kidolgozott bevezetőket készítünk. Gyakran az az érzésem, hogy mindenki úgy gondolja, ért a mesterséges intelligenciához, miközben ez a terület olyan hatalmasra nőtt, hogy valójában senki sem látja át teljes egészében. Például sokan azt mondják, hogy tudják, mi az adverzaris viselkedés, ugyanakkor ennek is több különböző értelmezése létezik és emiatt gyakran előfordul, hogy valójában elbeszélünk egymás mellett. Talán ez is hozzájárult ahhoz, hogy ebben a részben a szükségesnél részletesebb bemutatásra törekedtem.

Utólag azonban indokolt lett volna egyértelműen jelezni azt is, hogy az eredmények elhelyezését szolgáló, áttekintő jellegű részek több esetben szándékosan rövidebbek és kevésbé részletezettek. Emellett arra is törekedtem, hogy terjedelmüket tekintve a saját eredményeim legyenek túlsúlyban. Ugyanakkor egyetértek azzal, hogy egy ilyen jellegű dolgozat esetében nem feltétlenül a mennyiségi szempontnak kell elsődlegesnek lennie, különösen akkor, ha a háttér bemutatásának rövidegsége az olvasó számára félreérthető vagy pontatlan értelmezéshez vezethet. Ezzel szemben a 4. fejezet inkább már a túlzott részletesség irányába tolódott el.

Mindenesetre bízom benne, hogy az érdemi kutatási eredményeimben szakmai hiányosságot vagy pontatlanságot nem talált. Arra mindenkor törekedtem, hogy a munka maga precíz és alaposan körüljárt legyen, még akkor is, ha a bemutatás nem tartalmaz minden részletet, és helyenként csak utal azokra a megfontolásokra, amelyek ezt a precizitást biztosítják.

Az alábbiakban a bíráló kérdéseire adott válaszokat sorolom fel. A kérdéseket és észrevételeket *dőlt betűvel* jelölöm, míg a válaszok normál szedésben szerepelnek.

1. kérdés: *A mai matematikai kutatások egyik élvonala a mesterséges intelligencia által támogatott autoformalizálás és a formális tételbizonyító rendszerek (pl. Lean, Coq, Isabelle) alkalmazása; ebben a témában a közelmúltban akadémiai székfoglaló előadás is elhangzott Szegedy Krisztián által. Beilleszthetők-e a dolgozatban (1–3. tézis) alkalmazott megbízható intervallumanalitikus módszerek ebbe a modern keretrendszerbe? Lát-e lehetőséget arra, hogy az intervallumos optimalizálás ne csupán megbízható numerikus eredményt adjon, hanem egy olyan formális tanúsítványt (certificate) is kiállítson, amelyet egy egzakt tételbizonyító szoftver automatikusan le tud ellenőrizni?*

Úgy gondolom a mai mesterséges intelligencia alapvetően a jelenlegi tudásunk rendszerezésére és újrakombinálására képes. Amire véleményem szerint jelenleg kevésbé alkalmas, az a valódi kreativitás, azaz teljesen új dolgok létrehozása. Ami sokszor kreatitásnak tűnik, az gyakran inkább a meglévő tudás nagymértékű kombinációjából adódik. Mivel ez a tudás rendkívül kiterjedt, egy egyén számára sokszor mégis újszerűnek hat. Éppen ezért úgy gondolom, hogy a kreativitást igénylő feladatok – például a művészet – azok közé tartoznak, amelyekben az ember szerepét a mesterséges intelligencia még hosszú ideig nem fogja teljes mértékben helyettesíteni.

Az általam kidolgozott algoritmusokra is bizonyos értelemben alkotásként tekintek, ezért jelenleg nehezen tudom elképzelni, hogy az ilyen jellegű eljárásokat egy mesterséges intelligencia önállóan találja ki. Véleményem szerint például az olyan típusú bizonyítások, mint amilyeneket mi alkalmazunk, a jelenlegi rendszerektől – például a Szegedy Krisztián által fejlesztett rendszerektől – még nem várhatók el. Különösen arra gondolok, hogy egy rendszer önállóan generáljon egy olyan algoritmust vagy programkódot egy problémára, amelynek lefuttatása ténylegesen megoldja az adott problémát. Előadásában is hasonló nehézségre utal, például arra, hogy a valódi probléma és annak formális leírása közötti kapcsolat megteremtése az egyik legnehezebb lépés. Ezt különösen a Wright-sejtéssel kapcsolatos eljárásom esetében érzem így; a többi dolgozatban említett módszernél talán kevésbé markáns ez a különbség.

A kérdésre válaszolva: ebben a formában a módszer véleményem szerint nem illeszthető be közvetlenül egy ilyen rendszerbe. Ha azonban a futási eredményeket egyenként adjuk át, akkor már beilleszthető lehet. Ugyanakkor a kódban szerepel egy olyan optimalizált rész, amely a részproblémák számát még kezelhető tartományban tartja. Ennek elhagyása esetén már komoly nehézségek adódhatnak a probléma méretének kezelhetőségével kapcsolatban.

2. kérdés: *A 4. tézisben bemutatott, a MIPVerify sebezhetőségét kihasználó támadás alapvetően a lebegőpontos kerekítési hibák felerősítésén alapul. Megvédhető lenne-e a rendszer ezen támadások ellen, ha a hardveres lebegőpontos kiértékelés során hagyományos összeadás helyett kompenzált összegzési eljárásokat (például Kahan- vagy Neumaier-féle összegzést) alkalmaznának? Milyen hatással lenne egy ilyen védekezési stratégia a hálózat predikciós (inference) futásidejére?*

A dolgozatban tárgyalt példánk éppen az ellenkező jelenségen alapul. Jelen esetben tudjuk és mérésekkel is igazoltuk, hogy több megvalósításban az adott neuron kimenete helyes, azaz pontos értéket ad (1-et). A verifikáló eljárás azonban erre pontatlan becslést ad, és 0-nak tekinti az eredményt, ezért jut arra a következtetésre, hogy azt később nem lehet felerősíteni. Gyakorlatilag az a különbség, hogy míg a kiértékelők általában a végén adják hozzá a bias-t, addig a verifikálóban használt Gurobi az elején.

Természetesen a verifikáció is alkalmazhatna pontosabb összegzési módszert. Ebben az esetben a kidolgozott példánk „megbukna”, vagyis a verifikáció során kiderülne, hogy a rendszer valójában nem robusztus.

Sajnos az említett kompenzált összegzési eljárások sem teljesen mentesek a numerikus hibáktól. Ebben az esetben a neuronháló paramétereit kifejezetten ezen numerikus hibák figyelembevételével kellene megválasztani.

A dolgozatban tárgyalt sebezhetőséggel kapcsolatban – a dolgozat beadását követő két évben – több eredményünk is publikálásra került. Ezekben bemutatjuk, hogy a neuronhálók matematikai modellje által adott eredmény, valamint a konkrét megvalósítás során kapott eredmény jelentősen eltérhet egymástól. Ha egy implementáció véletlenszerű jellegű elemeket tartalmaz – például a számok összeadási sorrendje nem determinisztikus egy párhuzamos számítás során –, akkor akár ugyanaz a neuronháló is eltérő eredményeket adhat ugyanabban a környezetben adott inputra. Másképp fogalmazva: a verifikáció problémája valójában csak egy adott futtatási környezettel együtt értelmezhető.

Természetesen minél pontosabb és minél determinisztikusabb egy kiértékelési eljárás, annál kevesebb ilyen problémával találjuk szembe magunkat a verifikáció során. Ugyanakkor ez a neuronhálók kiértékelési idejének növekedésével járhat. Például egy gyors, párhuzamos NPU-n történő kiértékelés helyett a Kahan- vagy Neumaier-féle kompenzált összegzés alkalmazása egy egyszálú CPU-n akár kezelhetetlen mértékű futásidő-növekedést is okozhat.

Jelenleg, ha teljesen megbízható rendszert szeretnénk, akkor fixpontos aritmetikán alapuló megvalósításban lehet gondolkodni, amely esetben ez a probléma nem jelentkezik. Ugyanakkor értelemszerűen más jellegű nehézségek merülnek fel, és nem véletlen, hogy ez a megközelítés nem terjedt el széles körben.

3. kérdés: *Az 5. tézisben bemutatott párhuzamosított GLOBAL algoritmus kapcsán kérem, fejtse ki részletesebben a szoftver implementációs stratégiáját. A dolgozatban említett többszálúság (multi-threading) szigorúan megosztott memóriájú (pl. OpenMP) architektúrát jelent, vagy elosztott memóriájú (pl. MPI) fürtőkön is képes futni a kód? Milyen a rendszer párhuzamos hatékonysága, és hol látja a jelenlegi implementáció skálázhatóságának elvi, illetve fizikai korlátait a CPU-magok vagy node-ok számának növelése esetén?*

Az 5. tézisben bemutatott párhuzamosított GLOBAL algoritmus jelenlegi implementációja megosztott memóriájú architektúrára készült, és többszálúságot (*multi-threading*) alkalmaz. A megvalósítás során a párhuzamosítás célja az volt, hogy a célfüggvény kiértékelése és az egyes részfeladatok feldolgozása több szálon történjen, miközben a központi adatszerkezetek megosztott memóriában érhetőek el. Ennek megfelelően a jelenlegi implementáció elsősorban többmagos CPU-kon fut hatékonyan.

Elosztott memóriájú architektúrákra (például MPI-alapú klaszterekre) a jelenlegi kód közvetlenül nem készült fel. Egy ilyen kiterjesztés elvileg megvalósítható lenne, azonban ehhez a globális keresési tér és az algoritmus által fenntartott központi adatszerkezetek kezelését újra kellene tervezni, különös tekintettel a kommunikációs költségekre és a szinkronizációra.

A rendszer fejlesztésének alapvető motivációját olyan feladatok jelentették, amelyekben a célfüggvény kiértékelése nagyságrendekkel költségesebb, mint maga a GLOBAL algoritmus teljes futási költsége, ha a célfüggvény kiértékeléseit nem vesszük figyelembe. Ebben az esetben inkább az a kérdés, hogy mennyi párhuzamos függvénykiértékelésnek van egyáltalán haszna. Például léteznek olyan problémák, ahol a mintavételezés túlzott növelése már nem hoz további előnyt. Természetesen ez a szám általában jóval nagyobb, mint egy átlagos – akár szerver – gépben rendelkezésre álló CPU-magok száma. Korábbi tapasztalataink szerint, még a vizsgálataink során használt standard tesztfüggvények esetében is, ez az érték inkább az ezres nagyságrendbe esett.

Az már a dolgozatban bemutatott példán is látszik, hogy könnyebb feladatok esetén – ahol a célfüggvény kiértékelése is gyors – már viszonylag kevés CPU használata mellett sem hatékony az algoritmusunk. Ugyanakkor a másik irányba haladva a maximális hatékonyság elérhető, ezért elvi szinten nem látok korlátot a módszer alkalmazhatóságára.

1. észrevétel: *Az értekezés címében a „dinamikai és fizikai” szerkezet egy általános érdeklődő számára zavaró, hiszen a dinamika a fizika része.*

Ez a gondolat alapvetően helytálló; valóban rámutat egy potenciálisan zavaró összefüggésre. A matematikában is létezik egy terület, amelyet szintén dinamikának neveznek. Például az általam vizsgált Wright-rendszer is ide sorolható. Az inga esete érdekes, ezt is dinamikai jelenségnek tekinteném, noha már a fizikából származik. A dolgozat végén azonban olyan fizikai feladatok is szerepelnek, amelyek nem tartoznak szorosan a fizika dinamikai körébe. Mindezek alapján egyetértek azzal, hogy a dolgozat témáinak lefedése nem volt szerencsés a címben.

2. észrevétel: *A fizikai inga egyenletében a 30. oldalon $g = l$ és $A = I$ egyenlőségek két oldalán a fizikai dimenzió nem egyezik, óvatosabban kellene kitűzni a vizsgált feladatot.*

Igen, ebben a kérdésben a bírálónak teljes mértékben igaza van, és kezdetben engem is zavart ez a megfogalmazás. Ugyanakkor a témában olvasott szakirodalomban több helyen talákoztam hasonló jellegű leegyszerűsítésekkel. Például az eredeti Hubbard-féle cikkben is szerepel az a megfogalmazás, hogy „... both mass m and length l equal 1”. Az ilyen jellegű állítások természetesen impliciten a megfelelő mértékegységek megválasztását jelentik. Ezeket látva idővel az én hozzáállásom is lazult ezen a ponton. Ugyanakkor a bíráló észrevétele jogos abban az értelemben, hogy egy értekezésben célszerű lett volna ezt pontosabban és egyértelműbben megfogalmazni.

3. észrevétel: *„Ez a Poincaré-leképezés x -ben 2π -periodikus, mivel az inga szöge is 2π -periodikus, és egyik erő sem függ a körbefordulások számától. De amíg a hagyományos inga szimmetrikus x -ben is, a mi rendszerünk nem az, mivel a kényszererő nem szimmetrikusan hat az inga szimmetrikus szögeiben.” — ez ebben a formában a bíráló számára nem érthető.*

A mondatban azt szerettem volna kifejezni, hogy a legkisebb Poincaré-leképezés minden i egész számra azonos az $[i \cdot 2\pi, (i + 1) \cdot 2\pi)$ intervallumokon. Ez abból következik, hogy az inga szöge 2π -periodikus, és a rendszer dinamikája sem függ a teljes körbefordulások számától.

Továbbá az inga szögének terében további egyszerűsítéssel nem élhetünk. Ez utóbbi megjegyzésnek a beemelése a dolgozatban szereplő mondatot feleslegesen bonyolítja.

4. észrevétel: *A 3. fejezetben formálisan végig a nyílt körfedéseket tárgyalja, de például a [37]-tel a zárt körfedésekre adja, valamint a 3.4. ábra is a zárt körfedéseket sugallja. Mi a látszólagos ellentmondás feloldása?*

Az algoritlussal kapcsolatos tételünk formálisan csak nyílt körök esetén igaz. Zárt körök esetén ugyanis előfordulhat, hogy két kör metszetének egy pontjának nem

létezik olyan kis környezete, amely teljes egészében egyetlen körben helyezkedik el: a pont teljes környezete csak több kör együttesében van benne. Az alkalmazott algoritmusunk bizonyítása azonban kizárólag egyetlen körrel való tartalmazási viszonyra épül, és nem több kör uniójára.

Ugyanakkor az ilyen pontok esetén a szóban forgó környezet elvileg tetszőlegesen kicsire választható, ezért határesetben a zárt körökre vonatkozó eredményekkel konzisztens viselkedést kapunk. A példákban a zárt körökkel való szemléltetés nem változtat az eredmények lényegén, bár a tétel formális állítása valóban a nyílt körök esetére vonatkozik.

A bírálónak igaza van abban, hogy ez az összefüggés sajnos nincs részletesen kifejtve a dolgozatban, pedig indokolt lett volna ennek pontosabb magyarázata.

5. észrevétel: *Rossz ragozás, elírás többször előfordul a műben, pl. „Ebben a fejezetben az általam megkonstruált kontroll rendszert fogunk bemutatni”, a 4.7 alfejezet címében rossz a MIPVerify neve, „... mert ekkor a körvonal határpontjaira nem lenne teljesül, hogy ...”.*

Valóban előfordulnak magyartalan megfogalmazások a dolgozatban. Sajnálom, ha ezek helyenként az olvashatóság vagy az érthetőség rovására mentek.

6. észrevétel: *„... míg a kiértékelések száma a szálak számától függetlenül megegyezik a GLOBAL értékeivel, a futási sebességek a probléma nehézségétől függően jelentős javulást mutatnak. Mivel a függvények nehezítése nem arányos a kiértékelési idővel, a GLOBAL 1000-szeres futási idő helyett csak 15-szörös emelkedést mutat” — kérjük az állítás további magyarázatát.*

A kísérletek során két paraméter hatását vizsgáltuk: egyrészt a célfüggvény kiértékelési idejét, másrészt a párhuzamos futtatás során használt szálak számát. Amennyiben a célfüggvény kiértékelése például 1000-szer lassabbá válik, akkor a szekvenciális GLOBAL algoritmus futási ideje is közel 1000-szeresére nő. Ennek oka, hogy a teljes futási időt döntően a célfüggvény kiértékelése határozza meg, nem pedig az algoritmus egyéb járulékos számítási költsége.

A párhuzamos változat esetében két szélső esetet mutattam be: egy olyat, amikor a párhuzamosítás gyakorlatilag nem jelent előnyt, és egy olyat, amikor a párhuzamosítás közel optimális körülmények között működik. Még ebben az optimális esetben sem érjük el a maximálisan lehetséges gyorsulást, tehát például 16 szál használata mellett a gyorsulás nem lesz pontosan 16-szoros, csak 15-szörös.

7. észrevétel: *„Mivel egy hatványfüggvény sosem lehet negatív” (1.7 állítás bizonyításában a 21. oldalon) — ez így nyilván nem igaz, de nem is ezt a feltételt kell alkalmazni.*

Valóban, a megfogalmazás ebben a formában nem helyes, és a bíráló észrevétele jogos. Az adott fejezetben azonban végig az e alapú hatványfüggvények szerepelnek, ezért a gondolatmenetben implicit módon ezekre koncentráltam. Mivel az exponenciális függvény e^x minden valós x esetén pozitív, a bizonyításban ezt a tulajdonságot használtam.

8. észrevétel: *Az 1.6. ábrákon mindegyik tengelyen M van, helytelenül. Kérjük a javítást.*

Valóban, az ábrán szereplő tengelyjelölés nem helyes, köszönöm az észrevételt. A doktori értekezésben sajnálatos módon nem definiáltam külön jelölést a korlátozó képletekre. Így utólag belátom, hogy még az is jobb lett volna, ha inkább nem szerepel ott semmilyen jelölés.

9. észrevétel: *„A futási idők megfelelő skálázása mellett még jobb eredményeket várhatunk.” — ez mit jelent?*

A legszélsőségesebb esetben sem érjük el a maximálisan lehetséges gyorsulást, tehát például 16 szál használata és célfüggvény 1000-szeres lassítása mellett sem lesz a gyorsulás 16-szoros.

Ugyanakkor, ha tovább növelnénk a célfüggvény kiértékelési idejét, vagyis ha a számítás egyre inkább a célfüggvény kiértékelésének költsége által lenne meghatározva, akkor határesetben a gyorsulás egyre inkább megközelítené a 16-szoros értéket. A bíráló észrevétele jogos abban az értelemben, hogy ezt az összefüggést a dolgozatban szereplő mondat valóban nem fogalmazta meg kellően egyértelműen.

10. észrevétel: *„A feladat duálisának tekinthető probléma a körfedés.” — milyen értelemben duális?*

A dualitás általános értelemben azt jelenti, hogy egy matematikai elméletben vagy problémában két különböző fogalomrendszer kölcsönösen megfeleltethető egymásnak, és az egyikben megfogalmazott állítások szisztematikusan átfordíthatók a másikba. A két leírás gyakran „tükörképe” egymásnak: ha bizonyos elemeket és relációkat felcserélünk, ugyanazok a törvények vagy tételek érvényesek maradnak.

A körpakolás és a körfedés közötti kapcsolat ilyen értelemben tekinthető duálisnak. A két probléma ugyanazon geometriai struktúrához kapcsolódik és az optimalizálási szempontok is egymás természetes párjainak tekinthetők. A végtelen sík esetében ráadásul mindkét problémában ugyanaz a hexagonális rácsszerkezet jelenik meg optimális elrendezésként. Ebben az értelemben a két feladat szorosan összefügg, és a szakirodalomban is gyakran egymás természetes párjaként jelennek meg. Erre a kapcsolatra utaltam a dolgozatban a „duális” megfogalmazással.

11. észrevétel: *„A harmadik egy periodikus külső erő, amely hat az inga sebességére az inga minden pozíciójában.” — az erő nem a sebességére hat, hanem a testre; befolyásolja a sebességet, de a pozíciót és a gyorsulást is.*

Tény, hogy fizikai értelemben egy erő nem a sebességre, hanem a testre hat. A megfogalmazásomban arra a jelenségre szerettem volna utalni, hogy az adott külső erő a mozgásegyenletben a gyorsuláshoz adódik hozzá, és ezen keresztül közvetlenül befolyásolja a sebesség időbeli változását. Természetesen ebből következően a rendszer pozíciójára is hatással van.

Nagyra értékelem Professzor Úr részletes és tárgyyszerű észrevételeit és kérdéseit. Az opponensi véleményben foglalt pozitív értékelés — miszerint az értekezés megfelel az MTA doktora cím elnyeréséhez szükséges tudományos követelményeknek — számomra különösen megtisztelő. Végezetül szeretném még egyszer megköszönni Professzor Úr alapos munkáját és tisztelettel kérem válaszaim elfogadását!



Bánhelyi Balázs