

Bírálói vélemény
Bánhelyi Balázs „Számítógéppel segített bizonyítások és optimalizálási modellek dinamikai és fizikai feladatokra” című MTA doktori értekezéséről

Az értekezés Bánhelyi Balázs két kutatási területén, a megbízható számítások és az optimalizálási eljárások területén végzett kutatásaiból mutat be néhány kiemelt feladatot és eredményt.

Az első fejezetben a Wright-sejtés bizonyításában használt alapötleteket, illetve szerzőtársaival elért eredményeket mutatja be. A Wright-sejtés a funkcionál-differenciálegyenletek területének egyik ismert, fél évszázada nyitott kérdése volt. Tekintsük a

$$y'(t) = -\alpha(e^{y(t-1)} - 1)$$

egyenletet. A Wright-sejtés azt állítja, hogy az egyenlet zéró megoldása globálisan attraktív, ha $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Fontos lépés volt a sejtés bizonyításához annak igazolása, ami Bánhelyi Balázs, Csentes Tibor, Krisztin Tibor és Arnold Neumaier 2014-ben megjelent dolgozatának egyik elméleti eredménye volt, hogy az egyenlet zéró megoldása pontosan akkor globális attraktív, ha nincs lassan oszcilláló periodikus megoldása. Ebben a dolgozatban a szerzők az $\alpha \in [1.5, 1.5706]$ értékekre igazolták megbízható számítások módszerét használva, hogy az egyenletnek nincs lassan oszcilláló periodikus megoldása. A cikkben bemutatott eredmények elismeréseként a szerzők a Reliable Computing folyóirat által alapított rangos Moore-díjat vehették át 2016-ban. Egy másik dolgozatukban az eredményüket az $[1.5, 1.57065]$ intervallumra sikerült kiterjeszteni párhuzamos számítási módszert használva. A fejezetben a jelölt ismerteti az általuk használt megbízható számítási módszer alapötleteit, annak matematikai hátterét, illetve a periodikus megoldás létezését kizáró algoritmust.

A második fejezetben a fékezett inga kényszerrezgései kaotikus viselkedésének problémáját vizsgálja. Hubbard 1999-ben fogalmazta meg sejtését a rendszer kaotikusságáról. Megbízható számításokat használva ezt 2008-ban igazolták Csentes Tibor, Garay Barna és Hatvani Lászlóval közös cikkükben. 2020-ban megjelent cikkükben a fékezett inga stabilizálását vizsgálták. Az értekezésben bemutatja a konroll módszer ötletét. A periodikus megoldás stabilitásának igazolásához a Poincaré leképezés deriváltját kell kiszámolni, ami a variációs egyenlet megbízható módon történő megoldásával, és a kapott márix sajátértékei meghatározásával ellenőrizhető.

A harmadik fejezetben egy általános sokszögekkel határolt véges zárt tartomány körökkel történő lefedését vizsgálja megbízható számítási módszerek alkalmazásával. Részletesen bemutatja a kétdimenziós intervallumokat használó korlátozás és szétválasztás alapú algoritmusait a lefedés ellenőrzésére. Ezután megfogalmaz egy optimalizálási feladatot, ahol a körök száma és a középpontjai adottak, de a lefedő körök sugarait keressük, ahol a sugarak négyzetösszege minimális. A feladatot a Magyarországot lefedő rádióadó-tornyok sugárzási energiájának meghatározása motiválta. A globális optimumot adott pontossággal közelítő módszert mutatott be, és igazolta annak korrektségét is. Példákon illusztrálta a bemutatott módszer használhatóságát.

Az értekezés negyedik fejezete neurális hálók megbízhatóságának vizsgálatával foglalkozik. A neurális hálók és a probléma általános ismertetése után a napjainkban elterjedt MIPVerifyer nevű, vegyes egészértékű lineáris programozás módszerén alapuló verifikációs módszer sebezhetőségét igazolta. Bemutat egy olyan módszert, amivel módosítva egy adott neurális hálót, szándékosan elrontható annak osztályozó kimenetele, de azt az ellenőrző módszer nem fogja érzékelni.

Az értekezés ötödik fejezete a GLOBAL programcsomag újraszervezésével, továbbfejlesztésével kapcsolatos tevékenységével, és annak alkalmazásaival foglalkozik. Az értekezésben számos algoritmust bemutat, amelyekre az újjászervezett GLOBAL programcsomag épül, és részletesen foglalkozik a párhuzamosítás egyes részleteivel. A fejezet végén néhány alkalmazást említ, amelyek megoldásához a GLOBAL algoritmust használta. Az első ilyen példában a Hénon-leképezés iteráltjaira kaotikus régió keresését egy (a dolgozatban egyébként nem bemutatott) optimalizációs módszer segítségével oldották meg több különböző esetben is. Egy másik idézett munkában a Hénon-leképezés entrópiája alsó becslését vizsgálták, szintén optimalizációs technikával. Végül a plazmonika területén felmerült néhány problémát említ meg, ahol szintén nagy számítási időt igénylő optimalizációs feladatot kellett megoldani.

Néhány konkrét kritikai megjegyzés:

A 7., 8. és 10. oldalon az 1.2., 1.4. és 1.6. ábrák tengelyeinek feliratai nem korrektek. A függőleges tengely feliratát inkább el lehetett volna hagyni. Az 1.2. (b) ábrán a függvény képletében α kell $-\alpha$ helyett.

A 9. oldalon az $y_{(dec,n)}^{(upper)}(t)$ képletét a $t'_0 - p_m \leq t \leq t'_0$, az $y_{(inc,n)}^{(lower)}(t)$ képletét a $t''_0 - p_m \leq t \leq t''_0$ esetre kellene értelmezni.

A 33. oldalon a $P(I_i)$ gondolom a Poincaré-leképezés (de ezt nem mondta ki), amit egyébként a 31. oldalon \mathcal{P} -vel jelölt.

A 63. oldalon írja: „azt szeretnénk, ha a $G(x) \cap X_{valid}$ tartomány minden egyes pontja ugyanazt az osztályozási címkét kapná, mint az x ”. Ez nem világos megfogalmazás, hiszen a $G(x)$ halmaz definíció szerint pontosan az ilyen elemekből áll, azaz ez automatikusan teljesül.

A 71. oldal alján a globális optimalizálási probléma definíciójában szereplő $F(x)$ függvényről azt írja, hogy „ $F(x)$ a valós számok halmazán értelmezett, n -dimenziós”, de utána rögtön azt írja, hogy az x változó egy vektor.

A 80. oldalon az 5.1. tétel megfogalmazásában a használt halmazok nincsenek definiálva, csak az 5.4. ábráról lehet kitalálni a jelölést. Az sem világos, hogy az 5.1. tétel saját vagy az irodalomból vett eredmény.

Az értekezés egy összefoglalást kívánt adni Bánhelyi Balázs megbízható számítások és optimalizáció témakörében végzett kutatási eredményeiről. Mivel a kiválasztott projektek eredményeinek részletes bemutatása nyilván meghaladta az értekezés terjedelmi korlátait, az értekezésbe általában a probléma bemutatása, a megoldáshoz

szükséges módszerek ötletei, és néhány technikai részlet fért bele. Másrészt az eredmények minden esetben egy kutatócsoport együttműködése révén születtek. Itt is korrekt módon Bánhelyi Balázs igyekezett egyértelműen kiemelni a saját munkáját. Úgy gondolom, hogy az elkészült munka ilyen szempontból jól sikerült. A korábban említett egy-két kritikai észrevételtől eltekintve az értekezés szép kivitelű, jó stílusban készült, és a használt módszerek, ötletek érthetően vannak leírva, a egyébként technikai részleteket pedig az értekezés nem mutatja. Bánhelyi Balázs hozzájárulása az eredményekhez jól azonosítható.

Az értekezés alapján megállapítható, hogy Bánhelyi Balázs a megbízható számítások és az optimalizáció területén jelentős eredményeket ért el. Kiemelkedőnek tartom a dinamikai rendszerek területén a megbízható számítások módszerével végzett munkákat, ahol elméleti módszerekkel jelenleg nem kezelhető matematikai kérdéseket az informatikai eszközök segítségével tudnak megoldani. A legnagyobb figyelmet nyilván a Wright-sejtés bizonyításában végzett munkája keltette, de az értekezésben bemutatott, a fékezett inga és a Hénon-leképezés témakörében publikált eredményeit sem tudjuk manapság a megbízható számítások eszköztára nélkül igazolni. Nagyon értékesnek tartom a GLOBAL programcsomag megújításában végzett kezdeményező és szervező szerepét is. Az értekezésben egy sok szálon futó, nemzetközi visszhangot is kiváltó kutatások eredményeit ismerhettünk meg.

Kérdéseim a jelölthöz:

- Az 1. fejezetben a megbízható számítási módszer alkalmazásakor hogyan választotta meg t_0 értékét?
- Differenciálegyenletek megoldásai megbízható számítással történő követése módszerénél milyen korlátok vannak a gyakorlatban a feladatok körére? Van-e módszer például időtől függő vagy akár állapotfüggő késleltetést tartalmazó funkcionál-differenciálegyenlet megoldásainak megbízható követésére? Vagy két konstans késleltetést tartalmazó funkcionál-differenciálegyenlet esetében, ahol a késleltetések irracionálisak, és a hányadosuk is irracionális?
- A körökkel történő lefedés módszerénél mutatott olyan futási példát, ahol a kétdimenziós intervallumokat generáló algoritmus olyan felosztást eredményezett, ahol az előre megadott ϵ méretnél kisebb intervallumra nem tudta a lefedést igazolni. Az optimalizálási algoritmus determinisztikus, azaz ebben az esetben nem ad nyilván megoldást. Feltételezem, hogy a kezdeti befoglaló intervallum illetve az ϵ értékének megváltoztatásával lehet ilyenkor próbálkozni az algoritmus újrafuttatásakor. Ha jól értem, más paraméter nincs az algoritmusban, ha a körök száma és a középpontjuk rögzített. Mennyire érzékeny a módszer ezen értékek „helyes” megválasztására?

A doktori munka tudományos eredményeit elegendőnek tartom az MTA doktori cím megszerzéséhez, javaslom a nyilvános vita kitűzését és a cím odaítélését.

Veszprém, 2025. szeptember 5.

A handwritten signature in blue ink, consisting of stylized initials and a surname.

Hartung Ferenc
az MTA doktora