



Bírálat Bánhelyi Balázs MTA doktori értekezéséről

A doktori mű célkitűzése megbízható számítások és optimalizáló eljárások alkalmazása differenciálegyenletek vizsgálatára, kaotikus pályák létezésének igazolására, fedési eljárások ellenőrzésére, valamint neurális hálók megbízhatóságának eldöntésére.

A disszertáció öt fejezetben mutatja be a szerző eredményeit, melyekből kettőben matematikai elméleti kutatásokról, kettőben optimalizálással kapcsolatos algoritmusokról az utolsóban pedig egy globális szélsőértékkereső módszer elsősorban programozási vonatkozású eredményeiről olvashatunk.

Az 1. fejezet a szerző Wright-sejtés megoldásához való hozzájárulását mutatja be. A sejtés szerint a $z'(t) = -\alpha z(t-1)(1+z(t))$ differenciálegyenlet megoldásai nullához tartanak $\alpha \leq \pi/2$ esetén. A sejtést a prímszámtétel bizonyítása motiválja, Wright belátta, hogy bizonyos véletlenszerűséget feltételezve a prímek eloszlásáról, a prímszámtétel következik abból, hogy a differenciálegyenlet -1 -nél nagyobb megoldásai mind nullához konvergálnak $\alpha = \log(2)$ esetén. A szerző bemutatja, hogy a sejtés hogyan igazolható $\alpha \leq 1.5$ esetén, majd ismerteti a sejtés teljes bizonyításának menetét $\alpha = \pi/2$ -ig. A fejezet fő eredménye egy megbízható numerikus algoritmus kidolgozása a Wright-sejtés véges dimenziós változatának a megoldására. Ennek egyik lényeges eleme egy intervallum aritmetikán alapuló trajektória követő eljárás, mely szükséges volt a trajektória pontosabb korlátainak levezetéséhez. Ezek segítségével és az algoritmus párhuzamosításával sikerült a szerzőnek a sejtést igazolnia $\alpha \leq 1.57065$ értékekre. Ezen eredményekre építve a sejtést $\pi/2$ -ig más szerzők igazolták.

A 2. fejezetben egy fékezett inga kényszerrezgéseit leíró másodrendű közönséges differenciálegyenlet, $x''(t) = \cos(t) - \sin(x(t)) - 0.1x'(t)$ kaotikus megoldásait vizsgálja a szerző. Hubbard sejtése szerint tetszőleges L, R, M sorozathoz megadható olyan kezdeti feltétel, amelyből induló megoldás a sorozat szerint balra, jobbra, illetve nem halad át az alsó egyensúlyi helyzeten az egymást követő 2π hosszúságú időintervallumokban. A szerzőnek intervallumaritmetikát alkalmazó módszerrel sikerült igazolnia ezt a sejtést, amely lényegében kaotikus megoldások létezését jelenti. Ezután az instabil periodikus megoldás (amely a gerjesztés nélküli esetben a felső instabil egyensúlyi helyzetnek felel meg) stabilizálhatóságát (kontrollját) mutatja meg olyan külső erő segítségével, amely a felfüggesztési pontot periodikusan mozgatja. Ehhez lényegében egy hat változós differenciálegyenlet-rendszer adott periodikus megoldás körüli linearizálásában a sajátértékek valós részének negativitását kell megbízható numerikus számítással igazolni.

A 3. fejezet intervallumaritmetika alapú megbízható fedési algoritmusok létrehozásáról és optimalizálásáról szól. A feladat egy síkbeli korlátos, zárt és összefüggő halmaz fedése adott középpontú körökkel. A körök sugarának meghatározása a feladat. Ehhez először az adott halmazt kell a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapokkal fedni, majd intervallumaritmetikai számításokkal igazolni, hogy adott sugarak választásával minden téglalap fedve lesz valamelyik körlappal. Az alkalmazások szempontjából fontos lehet, hogy a körsugarak négyzetösszege minimális legyen, ezért a megengedett megoldások közül az algoritmusnak az optimális megoldást kell kiválasztania. A szerző bebizonyította, hogy az általa



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

kidolgozott algoritmus előírt pontossággal megtalálja az globálisan optimális megoldást tetszőleges kompakt összefüggő halmaz lefedésére.

A dolgozat 4. fejezetében a megbízható számításokra vonatkozó ismereteit arra alkalmazza a szerző, hogy mesterséges neurális hálózatok pontosságát osztályozási feladatokban tesztelje. Ismert, hogy az osztályozásban drasztikus hiba léphet fel, nevezetesen a bemenet kis perturbációját más osztályba sorolja a háló. (A látványos képosztályozási példákban az emberi szem által lényegében azonosnak értékelt képet a háló két különböző osztályba sorol, ezt nevezik ellenséges példának, vagy adverziális támadásnak.) Ezek kiküszöbölésére bizonyos feltételek teljesülését kell ellenőrizni, hogy egy bemenet egy bizonyos környezetében azonos kimenetet ad-e a háló. Ez egészértékű lineáris programozási feladatra vezet és a neurális háló verifikálásának nevezik. Erre több algoritmus ismert. A szerző ezek közül az egyiket vizsgálta, és konstruált egy olyan neurális hálót, melyet más hálókba beépítve képes a verifikáló eljárást félrevezetni. Ezen részháló létrehozása során a verifikálási technika ismeretén túl szükség volt az optimalizálás és megbízható számítások során szerzett tapasztalatai ötvözésére.

A dolgozat 5. fejezete a GLOBAL algoritmus párhuzamosításának és alkalmazásainak bemutatásával foglalkozik. A GLOBAL eljárás egy alapvető fontosságú feladatot, n -változós, valós értékű függvények globális szélsőértékének kiszámítását, oldja meg. A fejezet első szakaszai az algoritmust mutatják be nagy vonalakban, amely a témával foglalkozó szakértőknek szól. Az 5.4-5.6 szakaszokban a párhuzamosítás nehézségeit és megvalósíthatóságát tárgyalja a szerző, majd két elméleti példán illusztrálja a hatékonyságát. Az eljárás fontos eleme, hogy a nehezen kiszámítható optimalizálandó függvény minél kevesebb hívásával megtalálható legyen a szélsőérték. Az 5.9 és 5.10 fejezetekben a Hénon-leképezés esetében a Smale-patkóhoz hasonló tartomány keresésével illusztrálja a GLOBAL alkalmazhatóságát. Végül az 5.11 szakaszban fizikai modellekre alkalmazza az eljárást.

Az értekezéssel kapcsolatos kérdéseim a következők.

- Az 1. fejezet eredményei rendkívül technikai jellegűek. Mennyire alkalmazható a kifejlesztett módszer általánosabb kontextusban, pl. más típusú differenciálegyenletekre?
- Mi a 2.2 és 2.3 szakasz konklúziója a 2. fejezet kiinduló kérdése kapcsán? Állíthatjuk, hogy például $p > 3$ esetén stabilizálható a felső egyensúlyi állapot?
- A 3.5 fejezetben bemutatott eredmények mesterségesen generált példákra vonatkoznak. Van-e a jelöltnek tapasztalata az algoritmus alkalmazhatóságáról nagy méretű fedési feladatok megoldása tekintetében, különösen valamilyen gyakorlati kérdéssel kapcsolatban?

A dolgozatban elírások alig találhatók, de a megértést a pontatlan megfogalmazás több helyen nehezíti. Ezekkel kapcsolatos észrevételeim a következők.



Az 1.1 Állítás bizonyítása nincs bemutatva. Ennek nyilvánvalónak kellene lennie az állítás utáni ábrák alapján, vagy az irodalomban valahol megtalálható? Az 1.2 Ábra (b) részében alfa előtt nem kellene a negatív előjel.

Az (1.6) egyenlőtlenség az ábrán illusztrálva van, de jó lenne látni az elméleti levezetését is.

Az 1.6 Ábra aláírásából nem derül ki, hogy mely függvényeket mutatja. Az 1.2 Állítás bizonyítását az ábra alapján nyilvánvalónak tekintjük, vagy az irodalomban a könnyen követhető bizonyítás elérhető?

A 13. oldal alján a függvény argumentumában az intervallum szerepel. Ennek a jelölésnek a magyarázata fontos lenne a képlet bevezetése előtt.

A 2.1 fejezetben miért választjuk a $\gamma=0.1$ értéket?

Jó lenne iránymutatást látni a 32. oldal alján levő becslés levezetésére.

Mi indokolja a 2.4 szakaszban az $a=0.5$, $p=4$ választást? Lehet-e elméleti úton ilyen értékhez jutni, illetve megadható-e ezen paraméterekre egy intervallum, amelyben a megfelelő értékek vannak?

A 4. fejezet eredményei nagyrészt számítógépes vizsgálatokon alapulnak, így az olvasó, aki a programok futását nem látta, a szöveges leírásból nehezen tudja követni a gondolatmenetet.

A 4. fejezetben a (4.1) feltétel átfogalmazása a (4.2) és (4.3) egyenlőtlenségekre részletesebb magyarázatot igényel.

A 4.6 Ábra aláírásában segítené magyarázat, hogy mihez tartozik a felső és az alsó sor.

Az 5.1 szakasz elején a minimalizálandó függvény nem a valós számok halmazán, hanem az n -dimenziós vektorok halmazán van értelmezve és valós értékű.

Az 5.1 Tételben a jelöléseket ismertetni kellene, így nem követhető az állítás.

Az 5.4 Definícióban és az 5.5 Ábrán szereplő jelöléseket nem vezeti be a szerző, így a hozzájuk tartozó magyarázat nem érthető.

Az 5.10 szakaszban nincs értelmezve az adott kontextusban az entrópia jelentése, sem a karakterisztikus polinomok származtatása. Így az 5.10 Ábrán összefoglalt eredmény nem értelmezhető.

Az 5.11 szakaszban bemutatott fizikai problémák verbális leírásából nem lehet a vizsgált matematikai feladatot azonosítani, így nem értékelhető a dolgozatban szereplő leírás alapján az eredmény. A szakasz végén idézett [82] cikkben sem mutatják be a vizsgált matematikai modellt.

A fent ismertetett eredmények azt mutatják, hogy a jelölt kutatásai során komoly technikai eszközkészlet segítségével erős és mély elméleti eredményeket ért el, és a gyakorlati alkalmazásokban is hasznosítható sikeres vizsgálatokat végzett. A doktori mű magyar nyelven készült, az elért eredmények bemutatása sajnos sokszor nagy vonalakban történik meg, az olvasó, aki maga nem futtatta az algoritmusokat, nem érti meg a leírásból a megoldás gondolatmenetét. A magyarul írt tézisfüzet összefoglalja az elért eredményeket, amelyeket új tudományos eredménynek ismernek el. A doktori munka mintegy 100 hivatkozást tartalmaz, jelezve a szerző tájékozottságát kutatási területén.



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet
Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

A jelölt közleményei túlnyomórészt folyóirat cikkek formájában jelentek meg, mintegy 30 publikációja szerepel a hivatkozási listában. Néhány publikációja igen rangos nemzetközi folyóiratban jelent meg. Több dolgozata neves hazai kutatókkal közös munka, mutatja, hogy aktívan részt vesz a tudományos életben

Összefoglalva, az értekezés egy fontos, aktuális témában mutat be értékes új eredményeket, amelyek eléréséhez új módszerek kidolgozására, jelentős technikai nehézségek legyőzésére volt szükség. Bánhelyi Balázs a megbízható számítások, valamint az optimalizálási eljárások vizsgálatának elismert hazai képviselője. Számos új eredményt publikált a téma folyóirataiban. Munkásságával lényegesen hozzájárult e terület további fejlődéséhez.

Az értekezésben bemutatott eredmények megfelelnek az MTA doktori disszertációkkal szemben támasztott követelményeknek, ezért javaslom az értekezés nyilvános vitára bocsátását, és sikeres védelem esetén az MTA doktora fokozat odaítélését.

Budapest, 2025. szeptember 26.

Simon Péter
egyetemi tanár
ELTE, TTK, Matematikai Intézet
Alkalmazott Analízis és
Számításmatematikai Tanszék