

Opponensi vélemény

Barát János

Gráfok élfelbontása és alkalmazásai című

MTA doktori értekezéséről

Az első bevezető fejezet után a második fejezet speciális módon lerajzolható gráfokkal foglalkozik, amikor az élek csak adott irányúak lehetnek. A problémák érdekesek, de elég speciálisak, eredetileg a „királynő-gráfok” általánosításainak tekinthetők. Az alapkérdés, hogy mit lehet a maximális fok és az $sl(P)$ irányszám viszonyáról. Például elég könnyen bizonyítható, hogy ha G egy outerplanar gráf, melynek maximum foka 3, akkor az irányszám $sl(G)$ legfeljebb 3.

Fontosabb a Matousekkel és Wooddal bebizonyított tétel, hogy bár kicsi maximális fok esetén még csak n -ben lineárisan nő az irányszám, de általánosságban ez lehet majdnem négyzetes is. De még érdekesebb a kérdés, hogy mi történik adott maximális fok esetén. Sikerül belátniuk, hogy bármely $\Delta \geq 9$ esetén, létezik egy Δ -reguláris n csúcsú G gráf, melynek irányszáma lényegében legalább $\Delta n/4$. Világos, hogy az irányszám legfeljebb $n\Delta/2$, vagyis a bizonyított eredmény nagyságrendje optimális.

Még mindig a második fejezetben vizsgálja gráfok vastagságát: Egy G gráf vastagsága az a minimális k szám, amelyre G felbomlik k darab síkgráf uniójára. Gráfok vastagságáról egy negatív eredményt bizonyítanak be:

Tétel. Bármely $\Delta \geq 9$ és $\varepsilon > 0$, $n > n(\varepsilon)$ és $n \geq c\Delta$ esetén, létezik Δ -reguláris n -csúcsú gráf, melynek geometriai vastagsága legalább $c\sqrt{\Delta} n^{1/2-4/\Delta-\varepsilon}$ valamilyen abszolút c konstansra.

Kicsi maximális fok esetén a probléma még nyitott.

A harmadik fejezet tartalmazza – véleményem szerint - a legszebb eredményeket. Az alapkérdés gráfok élfelbontása adott fával izomorf részgráfokra. Pontosabban, a

Barát-Thomassen sejtés: Minden T fára létezik egy $k(T)$ természetes szám, hogy a következő teljesül: Ha G egy $k(T)$ -szeresen élösszefüggő gráf, melyre $|E(G)|$ osztható $|E(T)|$ -vel, akkor G -nek van T -felbontása.

A problémának szoros kapcsolata van az úgynevezett Tutte irányításokkal, amit most hadd ne definiáljak, megtalálható a disszertációban. Inkább a Barát-Thomassen sejtésről, ami mind a mai napig nyitott általában, de utakra és csillagokra Thomassennel közös cikkben sikerült bebizonyítani. Az első fa az egyetlen öt pontú kettős csillag, amire 287-élösszefüggő gráfokra sikerült a sejtést bebizonyítani (lásd 26. Tétel).

A negyedik fejezet egy érdekes, játékos, bár nem túl jelentős problémával foglalkozik: Tegyük fel, hogy egy nagy $k \times k \times k$ -as kockát építettünk fel egységkockákból. Elvehetünk egy kis kockát a kupacból, ha pontosan 3 szomszédja van. Meddig lehet ezt folytatni? Milyen konfiguráció lehet a maradék? A probléma közeli rokonságot mutat a klasszikus perkolációs problémával.

Mivel a szétbontás alatt a konfiguráció felszínének mérete változatlan, ezért a végén legalább n^2 kocka marad. Ha pontosan ennyi, akkor a maradék független csúcsoknak felel meg Q_n -ben. Ezért n^2 független csúcs halmazára a szerző bevezeti az alaphelyzet elnevezést. Jellemzi az alaphelyzet megoldásokat, és bebizonyítja, hogy a ciklikus alaphelyzet szintjeinek bármely ciklikus permutációja szintén megoldás. (A ciklikus alaphelyzetben a legfelső szint a négyzet átlójának csúcsait tartalmazza. Minden egyes további szint az előző szint eltolásával kapható meg.)

Az ötödik fejezet az Albertson-sejtéssel foglalkozik. Egy G gráf metszési száma $cr(G)$ a metsző élpárok minimális száma G bármely lerajzolásában. Albertson a következő sejtést fogalmazta meg: Ha egy G gráf kromatikus száma r , akkor a metszési száma legalább annyi, mint a K_r metszési száma. Albertson, Cranston, és Fox bizonyították a sejtést ha $r \leq 12$. A disszertációban illetve cikkükben ezt sikerült javítani, Barát János és Tóth Géza igazolták a sejtést, ha $r \leq 16$. Emellett a fejezetben érdekes megjegyzéseket találhatunk a lehetséges bizonyításról általános r esetén.

Az utolsó, hatodik fejezet a Wegner sejtéssel foglalkozik:

Sejtés. Legyen G egy 3-szorosan összefüggő, 3-reguláris gráf. Ekkor G csúcsai kiszínezhetők pirossalra és kékkel, a kék csúcsok által feszített részgráf független élekből és izolált csúcsokból áll, a piros pedig nem tartalmaz három élű utat, de a minimum fok 1.

A fejezet fő eredménye, hogy az általánosított Petersen gráfnak van morzsás színezése. Emellett a következő általánosítás sejtést mondták ki: Bármely legalább 7 csúcsú maximum 3 fokú gráfnak van morzsás színezése. Ezt sikerült fákra bebizonyítani.

Egy másik érdekes sejtés, hogy minden maximum harmadfokú páros gráfnak van morzsás színezése. Bizonyos speciális esetben ezt is sikerült bebizonyítani. Itt említeném meg azt a többször előforduló dolgot, hogy nem világos, hogy a kérdések mögött mi a koncepció azon túl, hogy ezekben sikerült (rész)eredményeket elérni.

A fenti felsorolásból is látható, hogy a jelölt számos érdekes, egymáshoz lazán kapcsolódó tételt bizonyított be. Az összekötő kapocs kulcsszava a dekompozíció. Nem tudom nem megemlíteni, hogy Barátnak még szebb eredményei nem kerültek bele a disszertációba. Így is elég színvonalas a disszertáció, de ezeknek az eredményeknek véleményem szerint szintén ott volna helye, még akkor is, ha csak lazán kapcsolódnak az ott szereplőkhöz. Szerencsére a választott eredmények elegendőek a doktori cím követelményeihez, de az igazán kiugró tétel hiányzik. Formai szempontból is megfelel a disszertáció az elvárásoknak.

Mindezeket összefoglalva véleményem szerint a disszertáció az MTA doktori követelményeknek eleget tesz, nyilvános vitára való kitűzését javaslom.

2025.12.08.

Győri Ervin
az MTA matematika tudományok doktora