

Bírálat
Barát János

Decomposition of graphs and applications
című MTA doktori értekezéséről

Témaválasztás

Az értekezés a jelölt 8 publikációjára épül, melyek közül 1 egy szerzős, a többi 2-3 szerzővel közös munka. A társ szerzők között több kiemelkedő nemzetközi hírű kutató is van. A cikkek témája 5 különálló problémakörrel kapcsolatos, túlnyomórészt gráfelméleti problémák, több esetben geometriai vonatkozásokkal. Valamennyi aktívan kutató, érdekes kérdésekkel foglalkozik. Ugyanakkor a jelölt talált egy közös vezérfonalat ezen témák között, minden téma kapcsolatba hozható a gráffelbontásokkal.

Eredmények

Az első, bevezető fejezet a szükséges fogalmak és jelölések bevezetése után röviden összefoglalja a többi fejezet tartalmát.

A 2. fejezet gráfok irányszámával és geometriai vastagságával kapcsolatos eredményeket ismerteti, amelyek a jelölt 2 különböző 2-2 társszerzővel írt cikkében találhatók. Az 1. tétel karakterizálja a 2-irányú gráfokat, a 2. tétel pedig kimondja, hogy az outerplanar gráfok irányszáma legfeljebb 3. Egy további eredmény, hogy minden $\Delta \geq 5$ esetén egy Δ -reguláris gráf irányszáma tetszőlegesen nagy lehet. A 7. tétel ennek analógja geometriai vastagság esetére, ami Eppstein kérdését válaszolja meg. Ezek az eredmények elég nagy hatásúnak bizonyultak, több mint 60 független hivatkozást kaptak.

A 3. fejezet szintén 2 cikk eredményeire épül. A Thomassennel közös cikkben megfogalmazták a Barát-Thomassen néven ismertté vált sejtést: Minden T fára létezik egy k_T természetes szám úgy, hogy a következő teljesül: Ha G egy k_T -szeresen elősszefüggő gráf, melyre $|E(G)|$ osztható $|E(T)|$ -vel, akkor G élhalmaza felbontható T -vel izomorf részgráfokra. A fejezet a sejtéssel kapcsolatos számos Thomassennel közös eredményt tartalmaz, valamint 2 Gerbnerrel közös tétel. A 24. tételben belátják, hogy a sejtést elég páros gráfokra bizonyítani. Ezek a jelölt legnagyobb hatású eredményei, a két cikk összesen több, mint 80 hivatkozást kapott. A sejtést végül 2017-ben igazolta Bensmail, Harutyunyan, Le és Thomassé.

A 4. fejezet egy Wanlessel közös cikk eredményei tartalmazza kockák felbontásával kapcsolatban: Egy nagy $k \times k \times k$ -as kockából elvehetünk egy kis egységkockát, ha pontosan 3 szomszédja van. Meddig lehet ezt folytatni? Milyen konfiguráció lehet a maradék? A fejezet több érdekes eredményt is tartalmaz, de ezek megfogalmazása csak számos definíció után lenne érthető, ezért kimondásuktól eltekintek. Különösen érdekes, hogy a problémát a kombinatorika több másik területével is kapcsolatba hozzák.

Az 5. fejezet egy Tóth Gézával közös cikkekre épül, amely Albertson sejtésével kapcsolatos tételeket tartalmaz: Ha egy G gráf kromatikus száma r , akkor a metszési száma legalább annyi, mint az r pontú teljes gráf metszési száma. A sejtést már korábban bizonyították $r \leq 12$ esetén. A jelölt társszerzőjével $r \leq 16$ esetén is belátta. Ezt a bizonyítást találtam az egyik legérdekesebbnek az értekezésben, számos különböző érdekes eszközt vetettek be.

A 6. fejezet egy egyszerzős és egy két társszerzős cikk eredményeit tartalmazza. Egy G gráf csúcsainak piros és kék színnel való színezését morzsás színezésnek nevezzük, ha a kék csúcsok által feszített részgráf független élekből és izolált csúcsokból áll, a piros rész pedig nem tartalmaz 3 élű utat, de a minimum fok 1. Thomassen sejtése szerint minden 3-összefüggő 3-reguláris gráfnak van ilyen színezése. A 38. és 39. tétel szerint az általánosított Petersen gráfnak van morzsás színezése, a 40. tétel szerint a legfeljebb 3 maximális fokú fáknak is. A 41. tétel szerint még akkor is, ha egy 2 fokú csúcs színét előírjuk (kivéve P_3). A 46. tétel pedig olyan gráfokra mutatja meg a morzsás színezés létezését, amit 3-reguláris gráfokból úgy kapunk, hogy minden élet egy 2 hosszú úttal helyettesítünk.

Formátum

Az értekezés túlnyomó része a fejezetekhez tartozó cikkeken alapszik. Barát János ugyanakkor eléggé alapos és pontos munkát végzett a bevezető megírásakor és a cikkek tartalmának összehangolásakor. A fejezetek végén pedig összefoglalja az eredmények hatását, az azóta született témába vágó eredményeket. Sajtóhibát mindössze kettőt találtam, illetve a bevezetőben van két pontatlanul megfogalmazott mondat. A téziszfüzet szintén jól van összeállítva, tartalmazza a legfontosabb információkat az értekezésből.

Az értekezés szerkesztésével kapcsolatban azonban van néhány észrevételem.

- Hiányoltam, hogy az egyes fejezetekben legtöbb esetben nem derül ki, hogy az eredmények pontosan melyik cikkekből származnak, általában a saját tételeknél sincs hivatkozás a megfelelő cikkekre. Ez némileg nehezítette a bíráló munkáját.
- A 26. tétel egy valamivel gyengébb állítás, mint ami a vonatkozó cikkben megjelent. Nem találtam magyarázatot ennek okára.
- A kb. 1 oldal hosszú 3.7. szakasz a Barát-Thomassen sejtéssel kapcsolatos eredmények hatását, utóéletét foglalja össze. Ez a szakasz lényegében szó szerinti idézete Bensmail és társszerzői cikkének bevezetőjének, amelyben bizonyítják a sejtést. Szerencsésebb lett volna ezt a tényt jelölni az értekezésben.
- A 4.1. szakasz eredményeinek egy része is eltérnek a megfelelő cikk eredményeitől. Az értekezésben csak a 3 dimenziós esetről van szó, míg a cikkben tetszőleges dimenzióról. Ennek sem láttam magyarázatát. Az is zavaró, hogy kimaradt az értekezésből a Q_n jelölés definíciója.

Értékelés

Barát János értekezés jelentős munkásságot mutat be a gráfelmélet különböző területein. Az eredmények között több is nagy jelentőségű, számos hivatkozást kapott, neves kutatók foglalkoztak a felvetett kérdéssel. Egyes bizonyításai technikásak, érdekes kapcsolatokat mutatnak be a matematika más területeivel. Véleményem szerint a dolgozat bőven kielégíti a doktori értekezés követelményeit.

Ezek alapján javaslom a nyilvános vita megtartását és a doktori cím odaítélését.

Kérdés

Mi az oka, hogy két esetben is a cikkekben megjelenteknél gyengébb állítások kerültek az értekezésbe?

Budapest, 2025. október 6.



Katona Gyula Y.