

keszegh.balazs_190_24

Geometriai hipergráfok és érintőgráfok

Keszegh Balázs

Doktori értekezés tézisei

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Geometriai hipergráfok	2
1.2. Érintőgráfok	5
2. Összefoglaló	6
2.1. Előzmények: körlapok, eltoltak, homotetikusok, tengelypárhuzamos alakzatok	7
2.2. Pszeudo-körlapok	9
2.2.1. Pszeudo-körlapok pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfja	10
2.2.2. Lineáris unió-bonyolultságú család pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfja	12
2.2.3. Egyenesek pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfja	13
2.3. ABA-mentes hipergráfok és általánosításai	14
2.3.1. ABA-mentes hipergráfok és pszeudo-félsík hipergráfok	14
2.3.2. ABAB-mentes hipergráfok	16
2.3.3. További eredmények	17
2.4. Érintőgráfok	18
2.4.1. Páronként metsző görbék családján belüli érintések	19
2.4.2. Egy görbecsaládon belüli érintések száma	20
2.4.3. Két görbecsalád közti érintések száma	21

1. Bevezetés

A geometriai objektumok illeszkedési és metszési struktúráinak kombinatorikai tulajdonságai a kombinatorikai geometria központi problémái közé tartoznak a kezdetek óta. A Sylvester-Gallai tétel kimondja, hogy ha adott n pont az euklideszi síkban, amelyek közül nem mindegyik fekszik egy egyenesen, akkor létezik olyan egyenes, amely pontosan két ponton halad át. Indukcióval ebből következik a de Bruijn–Erdős tétel, amely kimondja, hogy ha nem minden pont fekszik egy egyenesen, akkor a pontok legalább n egyenest határoznak meg, e problémák történetét lásd a [85] könyvfejezetben. Erdős egy kérdését megválaszolva a nagy hatású Szemerédi–Trotter tétel [105] megmutatja, hogy n pont és m egyenes között az illeszkedések maximális száma $O(n^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}} + n + m)$. Ennek az eredménynek számos változata létezik, többek között magasabb dimenziókban, egyenesek helyett általánosabb görbékkel. Ezeknek az eredményeknek a témái máig fontos kutatási területek.

Rengeteg kutatás foglalkozik olyan gráfokkal, amelyek valamilyen módon geometriai objektumokkal realizálhatók, ahol geometriai objektum alatt valamilyen tartalmazó tér, általában $\mathbb{R}^d$, részhalmazát értjük. Egyrészt megpróbálhatjuk jellemezni azokat a gráfokat, amelyek adott módon realizálhatók. Másrészt vizsgálhatjuk ezen gráfok egyes tulajdonságait.

A legtermészetesebb, ha egy gráfot úgy realizálunk a síkban, hogy a csúcsokat pontok, az éleket pedig összekötő görbék reprezentálják, majd további követelményeket támasztunk e görbék metszés-struktúrájával szemben. A síkbeli gráfok a legjellegzetesebb példák erre, ahol a görbék között nem engedélyezettek a metszéspontok. További példák a k -kvázi-sík gráfok illetve a k -sík gráfok. A matematikának azt az ágát, amely ilyen osztályokkal foglalkozik, gráflerajzoláshoz nevezzük.

Ha a csúcsokat és éleket más módon ábrázoljuk, további érdekes osztályokat kapunk. Ilyen gráfosztályok többek között a metszetgráfok, az érintőgráfok és a láthatósági gráfok.

Ezek közül a metszetgráfok talán a leginkább tanulmányozott gráfosztály. Adott egy n darab $\mathbb{R}^d$ -beli geometriai alakzattól álló halmaz, a *metszetgráfja* az a gráf, amelynek n csúcsa megfelel a geometriai alakzatoknak, és két csúcsot akkor kötünk össze éllel, ha a megfelelő alakzatok metszik egymást. Számos jól ismert gráfosztály a metszetgráfok egy osztályaként definiált vagy azzal ekvivalens: intervallumgráfok (azaz egyenesen adott intervallumok metszetgráfjai), egy fa részfájának metszetgráfjai (mely család ekvivalens az ún. húrgráfok családjával [43]), körgráfok (azaz egy kör húrjainak metszetgráfjai), belsőleg diszjunkt körlapok metszetgráfjai (amelyek a Koebe–Andreiev–Thurston tétel szerint éppen a síkgráfok), ún. string-gráfok avagy madzag-gráfok (síkbeli görbék metszetgráfjai), szakaszok metszetgráfjai, L-alakok metszetgráfjai, T-alakok metszetgráfjai, egységkörlapok metszetgráfjai, tengelypárhuzamos téglalapok illetve nagyobb dimenziós téglatestek metszetgráfjai. Egy metszetgráfcsalád jellemzése mellett az extrémális tulajdonságai (élek maximális száma bizonyos további feltételek mellett) és színezései a leginkább vizsgált témák. Központi kérdés egy gráf kromatikus száma, amelyet χ -vel jelölünk, ami a legkisebb színszám a gráf csúcsainak egy jó színezésében, azaz amelyben egyetlen él sem egyszínű.

Példaként említjük Scheinerman sejtését, amelyet Chalopin és Gonçalves [24] bizonyított, mely szerint minden síkgráf síkbeli szakaszok metszetgráfja. Ez utóbbi család azonban lényegesen bővebb, hiszen tartalmaz tetszőleges méretű teljes gráfot (míg az 5 csúcsú teljes gráf már nem síkgráf).

A metszetgráfok kromatikus számára koncentrálna, általában nem lehet univerzális korlátot adni egy adott család metszetgráfjainak kromatikus számára, ehelyett a központi kérdés e családok χ -korlátozottsága lett. Egy gráfcsalád akkor χ -korlátozott, ha létezik egy olyan függvény, hogy a család bármely gráfjának kromatikus száma nem nagyobb, mint ha a gráf maximális klikkméretét ezen függvénybe helyettesítjük. Geometriai alakzatok egy családjának metszetgráfjai gyakran χ -korlátozottak, Ilyen metszetgráfokat határoznak meg például a tengelypárhuzamos téglalapok (Asplund és Grünbaum [15], Chalermsook és Walczak [23]), a kör húrjai (Gyárfás [47], Davies [31]), síkban egy konvex alakzat homotetikussai (Kim, Kostochka és Nakprasit [99]), adott félsíkban fekvő görbék, amelyeknek a végpontja a félsík határán van (Rok és Walczak [96]). Sok esetben, bár sokkal nehezebb bizonyítani, az is

igaz, hogy a korlátozó függvény akár egy polinom is lehet, ezeket nevezzük polinomiálisan χ -korlátozott családoknak. Esperet [51] feltette a kérdést, hogy minden örökletes gráfcsalád (a metszetgráf osztályok általában ilyenek), amely χ -korlátozott, polinomiálisan χ -korlátozott is-e, de ezt nemrég Briński, Davies és Walczak [18] cáfolta. Másrészt léteznek olyan természetes családok, amelyek metszetgráfjai nem χ -korlátozottak, nevezetesen $\mathbb{R}^3$ -beli téglatestek (Burling [19]), a tengelypárhuzamos téglalapok határai és a síkbeli szakaszok (Pawlik et al. [91]). A témáról bővebben lásd Scott és Seymour [98] áttekintését.

1.1. Geometriai hipergráfok

A metszéseket valamelyest másképp is vizsgálhatjuk. Ha két alakzathalmazunk van, akkor tekinthetünk ezek páros metszetgráfjára, amelynek éleit olyan metsző alakzatpárok határozzák meg, melyek mindkét halmazból egy-egy alakzatot tartalmaznak. Ezt tekinthetjük egy hipergráf incidenciagráfjaként. E hipergráf csúcsai az első alakzathalmaznak, hiperélei pedig a második alakzathalmaznak felelnek meg, és egy hiperél tartalmaz egy csúcsot, ha a megfelelő alakzatok metszik egymást. Ezáltal természetes módon kiterjesztődik a vizsgálatunk tárgya olyan esetekre is, ahol a két alakzathalmaz különböző. Az így definiált hipergráfokat *metszethipergráfoknak* nevezzük. A *geometriai hipergráfok* kifejezéssel általában az ilyen metszethipergráfokra utalunk, hacsak másképp nem jelezzük. Adott két geometriai alakzathalmaz, $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$, legyen az $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ geometriai (metszet)hipergráf az a hipergráf, amelynek csúcsai $\mathcal{A}$ alakzatainak felelnek meg, és a csúcsok egy részhalmaza akkor és csak akkor hiperél, ha van olyan $\mathcal{B}$ -beli alakzat, amely éppen a csúcsok ezen részhalmazának megfelelő $\mathcal{A}$ -beli alakzatokat metszi. A kettőnél kisebb méretű hiperéleket elhagyjuk. Ezt az $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -t az $\mathcal{A}$ -nak $\mathcal{B}$ -re vonatkozó metszethipergráfjának nevezzük:

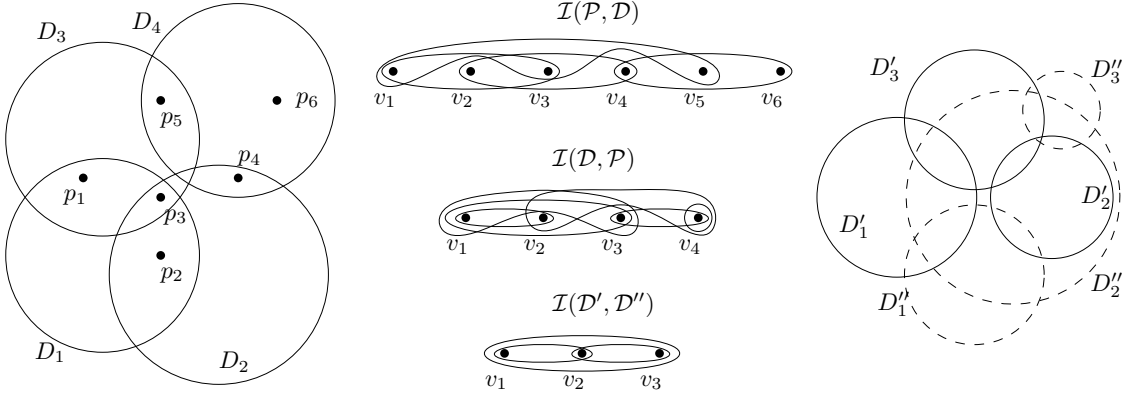
1.1. Definíció. *Adott egy $\mathcal{A}$ alakzatcsalád és egy $\mathcal{B}$ alakzatcsalád, az $\mathcal{A}$ -nak $\mathcal{B}$ -re vonatkozó metszet-hipergráfja az az $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ hipergráf, amelyben minden $A \in \mathcal{A}$ -nak megfelel egy v_A csúcs, és a csúcsok egy legalább kettő méretű H részhalmaza akkor és csak akkor hiperél, ha létezik egy $B \in \mathcal{B}$ úgy, hogy $H = \{v_A : A \cap B \neq \emptyset\}$ és ekkor azt mondjuk, hogy H B -nek felel meg.*

Egy $\mathcal{H}$ hipergráf Delaunay-gráfja az a gráf ugyanezen a csúcshalmazon, amely csak a $\mathcal{H}$ kettő méretű hiperéleit tartalmazza. A $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ Delaunay-gráfját az $\mathcal{A}$ -nak $\mathcal{B}$ -re vonatkozó Delaunay-gráfjának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ definíció szerint nem tartalmaz többszörös hiperélet. Így ha $\mathcal{A}$ véges, akkor még ha $\mathcal{B}$ végtelen is, $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -nak véges számú hiperéle van. Így például egy H hiperél a $\mathcal{B}$ több elemének is megfelelhet.

A legtermészetesebb két eset az, amikor a csúcsok pontoknak felelnek meg (azaz $\mathcal{A}$ egy pontthalmaz, az ilyen esetet *elsődleges* avagy *primál problémának* nevezzük) és amikor a hiperélek felelnek meg pontoknak (azaz $\mathcal{B}$ egy pontthalmaz, az ilyen esetet *duális problémának* nevezzük). Megjegyezzük, hogy ebben a két esetben a metszési reláció valójában megegyezik a tartalmazási relációval. Ez az oka annak, hogy a geometriai hipergráfok megnevezést előnyben részesítjük a metszethipergráfokkal szemben, kiváltképp ebben a két esetben, mivel az alakzat és pont metszetére való hivatkozás természetellenesnek hangzik, még ha formailag helyes is. Lásd az 1. ábrát.

A primál probléma (amikor a csúcsok pontoknak felelnek meg) kiváltképp természetes, mivel a gyakorlatban a hipergráfokat általában úgy ábrázoljuk, hogy a pontok megfelelnek a csúcsoknak, a hiperélek pedig olyan síkbeli alakzatoknak, amelyek pontosan azokat a pontokat tartalmazzák, amelyek megfelelnek a hiperél által tartalmazott csúcsoknak. Ilyen ábrázolás esetén az eredeti hipergráf pontosan az ezen pontok és alakzatok által meghatározott primál hipergráf. Így természetesen adódik, hogy főként az egyszerű alakzatokkal reprezentálható hipergráfokat vizsgáljuk, úgymint a körlapok, a tengelypárhuzamos téglalapok, vagy olyan alakzatok, amelyeknek a határai csak néhányszor metszik egymást, mint a pszedo-körlapok, stb. (e családok definícióit későbbre halasztjuk).



1. ábra. Adott pontok egy $\mathcal{P}$ családja és körlapok egy $\mathcal{D}$ családja, $\mathcal{I}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ az a hipergráf, amelyben a csúcsok a pontoknak és a hiperélek a körlapoknak, míg $\mathcal{I}(\mathcal{D}, \mathcal{P})$ -ben a csúcsok a körlapoknak és a hiperélek a pontoknak felelnek meg. Adott két körlapcsalád, $\mathcal{D}'$ és $\mathcal{D}''$, ekkor $\mathcal{I}(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ -ben a csúcsok a $\mathcal{D}'$ körlapjainak, a hiperélek pedig a $\mathcal{D}''$ körlapjainak felelnek meg.

Mint említettük, az extrémális kérdések mellett a legérdekesebbek az így definiált hipergráfok színezési problémái. Például egy pontthalmaz jól ismert Delaunay-gráfja nem más, mint a pontoknak a sík összes körlapjára vonatkozó Delaunay-gráfja. Ez köztudottan síkgráf, tehát mindig van jó 4-színezése. Látni fogjuk, hogy egy hipergráf Delaunay-gráfja általában önmagában is fontos fogalom számunkra, ugyanis egyik eredményünk szerint, ha a Delaunay-gráfnak csak lineáris számú éle van (például ha síkgráf), és ez öröklődően minden részgráfra is teljesül, akkor ez önmagában korlátot garantál a hipergráf éleinek számára és kromatikus számára.

Adott egy geometriai hipergráf (gondoljunk arra a példára, ahol a csúcsok halmaza pontok egy véges halmazának, a hiperélek halmaza pedig síkbeli körlapok egy véges halmazának felel meg), elsősorban a jó és polikromatikus színezései érdekelnek minket.

1.2. Definíció. Adott egy $\mathcal{H}$ hipergráf, csúcsainak jó k -színezése olyan k színnel való színezés, melyre a $\mathcal{H}$ minden hiperéle tartalmaz két különböző színű csúcsot. $\chi(\mathcal{H})$ a legkisebb lehetséges k , amelyre létezik jó k -színezés. A $\mathcal{H}$ csúcsainak egy színezése polikromatikus k -színezése, amennyiben minden hiperéle k páronként különböző színű csúcsot tartalmaz.

Megjegyezzük, hogy $k = 2$ esetén a jó 2-színezés és a polikromatikus 2-színezés fogalma egybeesik. Továbbá, egy jó k -színezés egyben egy jó $(k+1)$ -színezés is, míg két színt összevonva egy polikromatikus $(k+1)$ -színezésből egy polikromatikus k -színezést kapunk. Összefoglalva, ha növeljük k -t, akkor jól k -színezni fokozatosan könnyebbé válik, míg polikromatikus k -színezni egyre nehezebbé, így az így színezhető hipergráfcsaládok lineáris hierarchiáját kapjuk, amely közepén a jó és polikromatikus 2-színezéseknél találkozunk:

$$\dots \subseteq \text{polikrom. 3-színezhető} \subseteq \text{polikrom. 2-színezhető} = \text{jól 2-színezhető} \subseteq \text{jól 3-színezhető} \subseteq \dots$$

Fontos megjegyezni, hogy a geometriai hipergráfok definíciója miatt könnyen előfordulhatna, hogy egy hipergráf nulla vagy egy csúcsot tartalmaz (példánkban egy körlap például tartalmazhat csak egy pontot a pontthalmazból), ami mindig monokromatikus, ezért kellett a 2-nél kisebb méretű hipergráfokat figyelmen kívül hagynunk. Továbbá, polikromatikus színezések esetén nincs remény arra, hogy a k -nál kisebb méretű hiperélek k színt tartalmazzanak, ezért a k -nál kisebb méretű hiperéleket figyelmen kívül kell hagynunk, amikor polikromatikus k -színezéseket vizsgálunk.

Ezen megfigyelések által inspirálva kiderül, hogy természetesebb problémákat kapunk, ha megengedjük, hogy az m -nél kisebb méretű hiperéleket figyelmen kívül hagyjuk valamilyen, a geometriai alakzatok típusának megfelelően választott m fix értékre. A *primál geometriai hipergráf polikromatikus színezési probléma* a következő: adott egy k természetes szám, egy pontthalmaz és egy $\mathbb{R}^d$ alakzatcsalád,

a célunk az, hogy a pontokat úgy színezzük ki k színnel, hogy minden olyan alakzat, amely legalább $m(k)$ pontot tartalmaz, tartalmazzon egy pontot minden színből, ahol m valamilyen függvény, amelyet minimalizálni próbálunk. Az ilyen színezést *polikromatikus k -színezésnek* nevezzük. A *duális geometriai hipergráf polikromatikus színezési problémában* a célunk az, hogy az alakzatokat k színnel színezzük úgy, hogy minden olyan pontot, amelyet legalább $m(k)$ alakzat tartalmaz, azt mindegyik színű alakzat tartalmazza.

Készen állunk arra, hogy megfogalmazzuk az értekezés egyik központi fogalmát. Adott egy $\mathcal{H}$ hipergráf, legyen $\mathcal{H}_m$ az a hipergráf ugyanazon a csúcshalmazon, amely H legalább m méretű hiperéleit tartalmazza. Hasonlóképpen, egy $\mathcal{F}$ hipergráfcsalád esetén legyen $\mathcal{F}_m$ az a hipergráfcsalád, amely minden $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ esetén tartalmazza $\mathcal{H}_m$ -t. Végül legyen $\chi_m(\mathcal{F})$ a legkisebb k színszám, amelyre teljesül, hogy létezik olyan m érték, hogy minden $\mathcal{F}_m$ -beli hipergráf k színnel jól színezhető¹. Ha $\chi_m(\mathcal{F}) = 2$, akkor a legkisebb lehetséges ilyen m -t m_2 -vel jelöljük. Ebben az esetben van értelme polikromatikus k -színezéseket tekinteni $k > 2$ esetén is. Ekkor legyen m_k a legkisebb lehetséges m , hogy minden $\mathcal{F}_m$ -ben lévő hipergráfnak van polikromatikus k -színezése (ha ilyen m nem létezik, akkor $m_k = \infty$). Megjegyezzük, hogy m_k monoton növekszik k -ban.

Végtelen családok esetén a következő jelölést is sokszor használjuk a továbbiakban. Amikor geometriai alakzatok végtelen családjairól beszélünk, akkor azt mindig úgy értjük (hacsak másképp nem mondjuk), hogy elég nagy m esetén minden véges részcsalád rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Vagyis $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ végtelen alakzatcsaládok esetén azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ jól 2-színezhető $\mathcal{B}$ -re vonatkozóan, ha létezik olyan m érték, hogy $\mathcal{A}$ bármely véges $\mathcal{A}'$ részcsaládjára érvényes, hogy $\mathcal{I}_m(\mathcal{A}', \mathcal{B})$ jól 2-színezhető. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ -nak $\mathcal{B}$ -re vonatkozóan $m_k \leq f(k)$, ha $\mathcal{A}$ bármely véges $\mathcal{A}'$ részcsaládjára $\mathcal{I}_{f(k)}(\mathcal{A}', \mathcal{B})$ polikromatikus k -színezhető. A legkisebb lehetséges $f(k)$ -t m_k -val jelöljük. Például az, hogy ‘pontok 2-színezhetőek a félsíkokra vonatkozóan’ azt jelenti, hogy létezik olyan m , hogy minden véges ponthalmaz esetén a ponthalmaz 2-színezhető úgy, hogy minden olyan félsík, amely legalább m pontot tartalmaz, az 2-színű. Adunk egy duális példát is: ‘a félsíkok polikromatikus k -színezhetőek pontokra vonatkozóan’ azt jelenti, hogy minden k -ra létezik egy olyan $f(k)$, hogy minden véges félsíkhalmazra a félsíkok k -színezhetőek úgy, hogy minden olyan pont, amelyet legalább $f(k)$ félsík tartalmaz, azt mind a k színű félsík tartalmazza.

Geometriai metszethipergráf családokra a $\chi_m(\mathcal{F})$ értékét és az m_k létezésének vizsgálatát eredetileg fedés-szétszedési problémák motiválták [80], és a hangsúlyt arra helyezték, hogy $\chi_m(\mathcal{F}) = 2$ mikor teljesül, később pedig fontossá vált az úgynevezett konfliktusmentes színezési problémákkal [101] való kapcsolat is. E két problémának valóélet-beli motivációi vannak, a fedés-szétszedési problémáknak szenzorhálózatokban vannak alkalmazásai, míg a konfliktusmentes színezéseket többek között frekvenciakiosztási problémákban használják.

A fedés-szétszedési probléma a következő: adott a sík (vagy $\mathbb{R}^d$) (valamilyen részhalmazának) m -szeres fedése valamilyen geometriai alakzatokkal (pl. körlapokkal), fel tudjuk-e osztani ezt 2, vagy általánosabban k , 1-szeres fedésre? Ez egyenértékű az alakzatok k színezésével úgy, hogy a sík (valamilyen részhalmazának) minden pontját minden színű alakzat fedje. Ez pontosan a duális polikromatikus k -színezési probléma (vagyis amikor az alakzatokat pontokra vonatkozóan színezzük). Sőt, ha az alakzatok valamilyen adott alakzat eltoltjai, akkor kiderül, hogy ez szintén egyenértékű a primál polikromatikus k -színezési problémával (azaz amikor pontokat színezzük alakzatokra vonatkozóan).

Egy hipergráf konfliktusmentes színezése olyan színezés, amelyben minden egyes hiperélhez tartozik egy olyan szín, amely pontosan egyszer jelenik meg a hiperél csúcsain. Ha például egy egyenesen n pontot veszünk, és a hiperéleket az egyenes legalább két pontot tartalmazó intervallumai határozzák meg, akkor 2 színnel felváltva színezve a pontokat a hipergráf jó 2-színezését kapjuk, míg a konfliktusmentes színezéshez $\lceil \log n \rceil$ színre van szükség, és ez elég (a középső pontnak egyedi színt adunk, és a

¹Megjegyezzük, hogy az m a χ_m -ben egy betű és nem egy változó, kiváltképp nem ugyanaz az m , mint a definícióbeli érték.

két oldalon azonos színkészlettel rekurzívan színezzük). A két színezési fogalom között szoros kapcsolat van, az eltérés legfeljebb $\log n$ -szeres néhány természetes dolgot feltéve.

Egy példával szemléltetjük a színezések, a fedési-szétszedési problémák, a konfliktusmentes színezések és a valóélet-beli alkalmazások közötti kapcsolatot. Adott véges számú vevőkészülék és véges számú antenna. Minden egyes antenna vételi tartománya egy alakzat. Tegyük fel, hogy minden antennához egy frekvenciát akarunk rendelni úgy, hogy minden vevőnek legalább 3 különböző frekvenciájú antenna hatósugarában kell lennie. Ez egyenértékű az alakzatok polikromatikus 3-színezésével a vevőkészülékek helyének pontjaira vonatkozóan. Továbbá egyenértékű azzal is, hogy az alakzatokat ennek a pontthalmaznak 3 darab 1-szeres fedésére osztjuk fel. Másrészt, ha azt követeljük meg, hogy minden vevőhöz azon antennák között, amelyek vételi tartománya tartalmazza ezt a vevőt, legyen egy olyan antenna, amelynek frekvenciája egyedi ezek között, akkor az alakzatoknak a pontokra vonatkozó konfliktusmentes színezésével egyenértékű problémát kapunk.

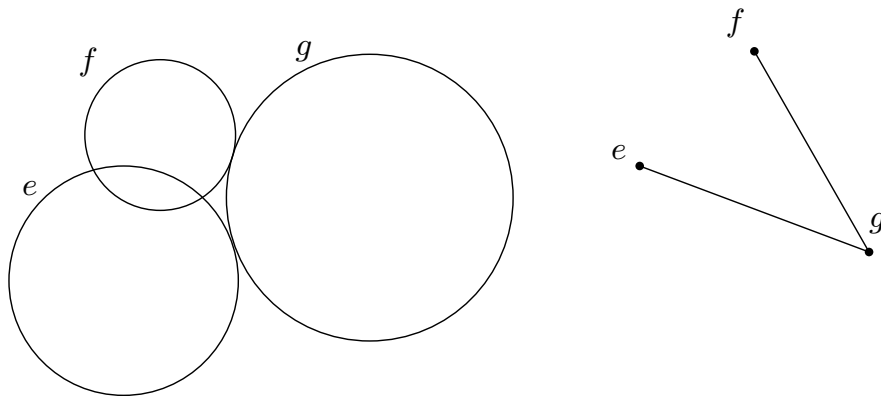
Az értekezés fő eredményei ebben a témában a következők (lásd később a hiányzó definíciókat). A 2.12. Tétel azt állítja, hogy egy pszeudo-körlap család egy másik pszeudo-körlap családra vonatkozó metszethipergráfra mindig színezzhető jól 4 színnel. Ez számos korábbi eredmény közös általánosítása. A 2.22. Tétel ezt az eredményt kiterjeszti az ún. lineáris unió-bonyolultságú alakzatok családjának egy pszeudo-körlap családra vonatkozó metszethipergrádjának konstans sok színnel való jólszínezésére. A 2.25. Tétel felső korlátot ad a t méretű hiperélek számára egy egyenes családnak egy pszeudo-körlap családra vonatkozó metszethipergrádjában. Ezután több absztrakt hipergráfcsaládot definiálunk, mint például ABA-mentes, pszeudo-félsík, ABAB-mentes, és ezekre bizonyítunk eredményeket, többek között a pszeudo-félsík hipergráfok polikromatikus színezéséről (2.29. Tétel és 2.30. Tétel) és az ABAB-mentes hipergráfok jólszínezéséről (2.32. Tétel és 2.33. Tétel). Azt is megmutatjuk, hogy ezek az absztrakt családok hogyan felelnek meg pontok pszeudo-félsíkokra vonatkozó metszethipergrádjainak, illetve pontok közös pontot tartalmazó pszeudo-körlapok családjára vonatkozó metszethipergrádjainak.

Az e területen elért eredményeket a 2.1, 2.2 és 2.3 fejezetekben tárgyaljuk.

1.2. Érintőgráfok

A metszési reláción kívül más természetes módon, az alakzatok más relációi alapján is definiálhatunk gráfot vagy hipergráfot geometriai alakzatok által, például ilyenek az ún. láthatósági gráfok. Jelen esetben a fő érdeklődési körünk az érintőgráfok, melyek csúcsai geometriai alakzatoknak felelnek meg, és két csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze éllel, ha a megfelelő alakzatok érintik egymást (lásd pl. a 2. ábrát). Érintőgráfok különböző, látszólag egymástól független területeken fordulnak elő, két kiemelkedő területet említünk. Először is, a neves Koebe-Andreiev-Thurston tétel [70] kimondja, hogy minden síkgráf diszjunkt belsejű körlapok érintőgráfa. Ennek az eredménynek számos meglepő alkalmazása van, a szerző és szerzőtársai például arra használták, hogy korlátokat bizonyítsanak a síkgráfok úgynevezett irányszámára [58], azaz hogy legkevesebb hány iránnyal párhuzamos szakaszokkal rajzolhatjuk síkba a gráfot. Egy másik figyelemre méltó példa az egységtávolság-probléma. Erdős azt a kérdést tette fel [33], hogy mi a sík n pontja által meghatározott egységnyi távolságok maximális száma. Ha minden pont középpontjába egy $1/2$ sugarú körlapot helyezünk, akkor azt kapjuk, hogy ez a probléma egyenértékű az egybevágó (de nem feltétlenül diszjunkt) körlapok közötti legnagyobb számú érintéssel. Míg a legjobb ismert alsó korlát alig haladja meg a lineáris értéket, addig a legjobb ismert felső korlát $O(n^{4/3})$. Ez a probléma a sík kromatikus számával kapcsolatos híres Hadwiger-Nelson problémával is összefügg.

Korábban már említettük, hogy egy hipergráf Delaunay-grádjának vizsgálata sok esetben hasznos lehet. Itt egy újabb motivációt adunk erre, ami egyben szemléletesen összekapcsolja a geometriai hipergráfok és az érintőgráfok területét, mely összefüggést az értekezés későbbi részében valóban alkalmazni fogunk. Adott egy görbehalmaz, amikor két görbe érintkezik, akkor a két görbét picit úgy mozgathatjuk, hogy lokálisan diszjunktak legyenek, és az érintési pontot egy kis görbével (vagy akár egy kis



2. ábra. Egy 3 körből álló kör család és érintőgráfjuk.

szakasszal) helyettesíthetjük úgy, hogy ez a kis görbe csak a két (korábban egymást érintő) alakzatot keresztezi. Ily módon az eredeti görbék ezen kis görbékre vonatkozó metszethipergráfja csak 2 méretű hiperélekkel rendelkezik, és a hiperélek száma megegyezik az érintések számával az eredeti helyzetben. Így ez a hipergráf megegyezik önmaga Delaunay-gráfjával, és e gráf éleinek száma korlátot ad az eredeti helyzetben lévő érintések számára.

Az értekezés fő eredményei ebben a témában a következők (a hiányzó definíciókat lásd később). Pach egyik sejtésének egy speciális esetét megoldva a 2.39. Tétel kimondja, hogy n görbe, amelyek páronként pontosan egyszer metszik egymást, $O(n)$ érintést határoz meg. A 2.40. Tétel szerint n görbe, melyek páronként legfeljebb t -szer metszik egymást, $O(n^{2-\frac{1}{t+3}})$ érintést határoz meg. Ezután megvizsgáljuk azt az esetet, amikor két, páronként diszjunkt görbékéből álló, görbecsalád adott, és becsüljük a két görbecsalád közötti érintések számát. A 2.43. Tétel szerint ebben a helyzetben akár $\Omega(n^{4/3})$ érintés is lehet. Optimális felső korlátot bizonyítunk két speciális esetben. Egyrészt, ha minden görbepár legfeljebb egyszer metszi egymást, akkor a 2.42. Tétel szerint csak $O(n)$ érintés lehet. Másrészt, ha minden görbe x -monoton, akkor a 2.41. Tétel szerint $O(n \log n)$ érintés lehet.

Az ezzel kapcsolatos eredményeket a 2.4 fejezetben tárgyaljuk.

2. Összefoglaló

Ebben a fejezetben áttekintést adunk a legfontosabb geometriai hipergráfokról és a róluk ismert eredményekről, a színezésekre koncentrálva. A legtöbb esetben a méretre (maximális élszáma) vonatkozó eredményeket is megadjuk. Vannak további paraméterek, amelyeket a hipergráfok esetében szokás vizsgálni, úgy mint a tartalmazás-mentes hipergráfok mérete, az ε -hálók mérete, a VC -dimenzió, a sekély lefogó csúcshalmazok létezése, diszkrepancia eredmények, megszámlálási eredmények. Ebben az értekezésben a színezésekre és a hipergráfok méretére koncentrálunk. A szerző és Pálvölgyi által gondozott [65] weboldal interaktív adatbázisban gyűjti össze ezeket az eredményeket, ahol a többi fent említett paraméter is szerepel.

A színezésre és a méretre koncentrálva van egy szép általános összefüggés, amely szerint, ha minden indukált részhipergráf Delaunay-gráfjának lineárisan sok éle van, akkor a hipergráf kromatikus számára, méretére és egyéb paramétereire is adható korlát. Bár ez bizonyos hipergráfcsaládokra ismert volt, a szerző és szerzőtársai fogalmazták meg ezt először expliciten, ezen eredmény is az értekezés részét képezi.

Olyan eredményeknél maradva, melyek a hipergráfok széles körére vonatkoznak, van egy érdekes általános sejtés, amely szerint, ha m_2 korlátos egy indukált részhipergráf képzésre zárt hipergráfcsaládra, akkor m_k is korlátos, sőt lehetséges, hogy mindig lineáris k -ban (m_2 -re való bármilyen fix felső

korlát esetén) [93]. Az m_k korlátossága külön-külön bizonyított a geometriai hipergráfok minden esetére, mint látni fogjuk. Mégis általánosságban nem sokat tudunk erről a sejtésről. Egyrészt, ha $m_2 = 2$ valamilyen hipergráfcsaládra, akkor Berge [17] szép eredménye szerint $m_k = k$ is teljesül. Azonban már $m_2 = 3$ esetén sem tudjuk, hogy létezik-e felső korlát m_3 -ra. A legjobb általános alsó korlátot egy olyan konstrukció adja, ahol $m_k \geq (m_2 - 1)(k - 1) + 1$. Megjegyezzük, hogy $m_2 = 3$ esetén ez $m_3 \geq 5$. Ezt némileg megjavítva nemrég Pálvölgyi [93] adott egy olyan konstrukciót, ahol $m_2 = 3$ és $m_3 = 6$. Érdekes összevetni ezt a problémát Esperet bevezetőben említett kérdésével, hogy a χ -korlátozottságból következik-e a polinomiális χ -korlátozottság, amire kiderült, hogy nemleges a válasz.

A fejezet további részében először a geometriai hipergráfok eredményeit soroljuk fel. Ezek közül több eredmény a szerzőtől származik (különböző társszerzőkkel). Az értekezésben csak a pseudo-körlapokról és az ABA-mentes hipergráfokról szóló eredményeket és azok általánosításait bizonyítjuk, a [57, 53, 60, 4, 56] alapján.

Ezt követően a görbék érintéseire vonatkozó eredményekre fordítjuk figyelmünket. Itt néhány eredményt geometriai hipergráf eredményként is megfogalmazunk, megvilágítva a két terület közötti kapcsolatot, amelyet már a bevezetőben is említettünk. A szerző e területről származó eredményeit belátjuk az értekezésben, a [6, 62, 5] alapján.

Az értekezés a szerző alábbi munkáin alapul, amelyek mindegyikében (több szerző esetén) minden társszerző egyenlő arányban vett részt: [57, 53, 60, 4, 56, 6, 62, 5].

2.1. Előzmények: körlapok, eltoltak, homotetikusok, tengelypárhuzamos alakzatok

Általában egy családban az alakzatok vagy mind nyílt halmazok, vagy mind zártak. Mivel véges problémákat vizsgálunk, és bizonyos általános helyzetet feltételezünk, nem számít, hogy melyik eset áll fenn. Így az értekezés áttekintő részében általában nem foglalkozunk ennek a megadásával.

A geometriai hipergráfok színezésének területét kezdetben egy adott konvex alakzat síkbeli eltoltjainak fedés-szétszedési problémái motiválták. Először áttekintést adunk az eltoltakkal kapcsolatos eredményekről, ezekről bővebben lásd a [80] fedés-szétszedési problémákról szóló áttekintő tanulmányt. Ezután áttérünk adott alakzat homotetikusaira, a tengelypárhuzamos alakzatokra és a körlapokra vonatkozó eredmények áttekintésére. Megjegyezzük, hogy a fedés-szétszedéssel összefüggésben általában végtelen fedéseket is figyelembe veszünk, ahol kompaktsági érvelések és egyéb technikai kérdések merülnek fel. Itt csak a problémák véges változataival foglalkozunk.

Pach a területet a következő sejtéssel alapozta meg (itt a hipergráf jelölést használjuk, bár az eredeti sejtés és egyben a legtöbb eltoltakkal foglalkozó dolgozat a fedés-szétszedés terminológiáját használja):

2.1. Sejtés (Pach [78]). *Legyen C egy konvex alakzat, ekkor a pontok jól 2-színezhetőek C eltoltjaira vonatkozóan. Más szóval, létezik egy olyan $m(C)$ konstans, hogy bármely véges $\mathcal{P}$ ponthalmaz esetén a $\mathcal{P}$ pontjait 2-színezhetjük úgy, hogy C bármelyik, legalább m pontot tartalmazó eltoltja mindkét színű pontot tartalmaz. Más szóval, $\mathcal{H}(\mathcal{P}, C)_m$ jól 2-színezhető.*

Megjegyezzük, hogy egy adott véges ponthalmazra véges számú eltolt már definiálja ugyanazt a hipergráfot, mint az összes eltolt (említettük, hogy ez minden geometriai hipergráfra érvényes).

Továbbá, ha C egy fix pontját elnevezzük a középpontjának, és minden eltoltat a középpontjával helyettesítünk, és egyúttal $\mathcal{P}$ minden pontját C egy olyan tükrözött példányával helyettesítjük, amelynek középpontja ez a pont, akkor a tartalmazások éppen megfordulnak. Így kapunk egy ekvivalens duális problémát a geometriai alakzatok pontokra vonatkozó színezéséről. Ezért az eltoltak esetében a primál és a duális probléma ekvivalens, és így elég a primál pont-színezési problémára koncentrálni, bár formailag a duális probléma az, amelyik ekvivalens a fedés-szétszedési problémával, amiről Pach sejtése eredetileg szólt.

E sejtés hatására több pozitív eredmény született a konvex sokszögek eltoltjairól. Pach [79] bebizonyította, hogy a sejtés középpontosan szimmetrikus konvex sokszögekre érvényes. Tardos és Tóth [106]

háromszögekre, majd Pálvölgyi és Tóth [90] minden konvex sokszögre bebizonyította a sejtést. Tehát m_2 létezik (azaz véges) pontok egy tetszőleges adott konvex sokszög eltoltjaira vonatkozó metszethipergráfjaira, ezáltal az érdeklődés áttevődött m_k létezésére és korlátaira. Kezdetben a fenti 3 dolgozat k függvényében exponenciális korlátokat bizonyított. Ezután Pach és Tóth [88], majd Aloupis et al. [11] javította ezt négyzetesre, majd lineárisra középpontosan szimmetrikus konvex sokszögek esetén. Végül Gibson és Varadarajan [44] megmutatta, hogy $m_k = O(k)$ pontok egy tetszőleges adott konvex sokszög eltoltjaira vonatkozó metszethipergráfjaira.

Negatív eredmény, hogy konkáv négyszögek esetén nem tudjuk jól 2-színezni a pontokat a konkáv négyszög eltoltjaira vonatkozóan [81, 89]. Ilyen ellenpélda létezik térbeli gömbökre [72] és térbeli konvex politópokra is [89].

A $\mathbb{R}^3$ -beli pontok jó 2-színezése egy féltér eltoltjaira vonatkozóan triviális feladat. Létezik azonban egy érdekesebb alakzat $\mathbb{R}^3$ -ban, amelyre a pontok jól 2-színezhetők az alakzat eltoltjaira vonatkozóan. Nevezetesen az origó csúcsú tétnyolcad, amelyet a $\{(x, y, z) : x, y, z > 0\}$ pontok halmaza határoz meg (az eltoltjait tétnyolcadoknak avagy oktánsoknak nevezzük). Ezekről a szerző és Pálvölgyi [66] bebizonyította, hogy $\mathbb{R}^3$ bármely pontthalmaza 2-színezhető úgy, hogy minden olyan tétnyolcad, amely legalább 12 pontot tartalmaz, mindkét színű pontot tartalmaz. Ennek fontos következményei vannak a síkban. Ugyanez érvényes ugyanis pontok bármely fix háromszög homotetikusaira vonatkozó színezésére (egy alakzat homotetikusai egy olyan példány, amelyet eltolással és pozitív nagyítással kapunk), általánosítva Tardos és Tóth eredményét a háromszögek eltoltjairól. Ugyanez vonatkozik a duális problémára is, a háromszög homotetikusainak pontokra vonatkozó színezésére. Később a szerző Pálvölgyivel megmutatta, hogy pontok polikromatikus k -színezése is lehetséges tétnyolcadokra vonatkozóan [69], azaz m_k létezik, majd megmutattuk, hogy $m_k = O(k^{4.53})$ pontok egy háromszög homotetikusaira vonatkozó metszethipergráfjaira [59]. Ezt egy általánosabb eredmény megmutatásával bizonyítottuk, amely szerint m_2 létezése egy polinomiális korlátot implikál m_k -ra pontoknak bármely adott konvex sokszög homotetikusaira vonatkozóan. Ezután Cardinal és társai megmutatták, hogy $m_k = O(k^{5.53})$ a tétnyolcadokra (és így a háromszögekről szóló duális problémára is, azaz egy háromszög homotetikusainak pontokra vonatkozó színezésére). Ezután a szerző és Pálvölgyi, az m_2 -ra vonatkozó korlátot tétnyolcadokra 12-ről 9-ra javítva [67], a két fenti korlátot $O(k^{4.09})$ -ra, illetve $O(k^{5.09})$ -ra javította. Továbbra sem ismert, hogy igaz-e az $O(k)$ korlát vagy sem.

A fenti, egy háromszög homotetikusairól szóló, következmények megnyitották az utat egy adott konvex alakzat homotetikusainak vizsgálatához. Megjegyezzük, hogy ezek esetében a primál és duális problémák már nem ekvivalensek. Ezen a területen a még mindig korlátozottan értjük csak a színezések viselkedését. A szerző Ackermannal és Vizerrel együtt bebizonyította, hogy m_2 létezik pontok bármely rögzített paralelogramma (így speciálisan egy négyzet) homotetikusaira vonatkozóan. Így a korábban említett konvex sokszögekről szóló általános eredményünk szerint ezekre $m_k = O(k^{8.75})$ is teljesül. Általánosan, pontok konvex sokszögek homotetikusaira vonatkozó metszethipergráfjairól elképzelhető, hogy mindig jól 2-színezhetők, de ezt nem tudjuk már az ötszögekre sem. Pozitívként emlékezzünk vissza ismét arra, hogy amennyiben m_2 létezik pontoknak valamilyen konvex sokszögre vonatkozó metszethipergráfjaira, akkor az [59] eredményünk szerint m_k is k valamilyen polinomjával felülről becsülhető. Továbbá Pálvölgyivel megmutattuk, hogy a jó 3-színezhetőség mindig teljesül ebben az esetben [61]. Láttuk, hogy a tétnyolcadról szóló eredményből következik, hogy m_2 létezik egy háromszög homotetikusainak pontokra vonatkozó metszethipergráfjaira, mely egy duális probléma. Kovács azonban némileg meglepő módon bebizonyította [71], hogy ez már semelyik legalább négy csúcsú konvex sokszög homotetikusaira nem teljesül.

A tétnyolcadokról szóló eredmények további következménye, hogy ugyanaz igaz a síkbeli pontok színezésére az ún. feneketlen téglalapokra vonatkozóan (a feneketlen téglalapok azok az alakzatok, melyek az alábbi módon leírhatók: $\{(x, y) : a < x < b, y < c\}$ valamilyen a, b, c értékekre) és a duális problémára

is, azaz feneketlen téglalapok színezésére pontokra vonatkozóan. Ezeket a szerző először szisztematikusan a [64]-ban tanulmányozta. A primál esetben Asinowski és társai közvetlenül megmutatták, hogy $m_k \leq 3k - 2$ [14] (a legjobb alsó korlát az optimális értékre $1.67k$). A duális esetben, azaz feneketlen téglalapoknak pontokra vonatkozó metszethipergráfjára, a legjobb ismert eredmény $m_k = O(k^{5.09})$, mely a ténylegcsodákra vonatkozó eredmény közvetlen következménye. A feneketlen téglalapok családjának van néhány speciális részcsaládja, melyekre $m_k = O(k)$ ismert [21], de általában nem ismert lineáris felső korlát.

A pontok feneketlen téglalapokra vonatkozó színezésének vizsgálatát az motiválta, hogy ez ekvivalens az egyenes pontjainak egy bizonyos dinamikus színezési problémájával. Ezen túlmenően a duális probléma felhasználható ‘oszd meg és uralkodj’ típusú algoritmusokban az általános tengelypárhuzamos téglalapokról szóló kérdésekben. A tengelypárhuzamos téglalapok által meghatározott hipergráfok képezik a terület néhány központi problémájának alapját. Ezeknek a problémáknak a jellege kissé eltér az eddig tárgyaltaktól, mivel itt a színek száma függ a pontok számától. A duális problémáról szólva, $\Theta(\log n)$ szín szükséges és elégséges a tengelypárhuzamos téglalapok jó színezéséhez a pontokra vonatkozóan (bármely fix m esetén) [48, 87]. A primál probléma esetén, ha $m \geq 3$, akkor ismét $O(\log n)$ szín elegendő [7], azonban ha úgy színezzük a pontokat, hogy a két pontot tartalmazó tengelypárhuzamos téglalapok már jól színezettek kell legyenek (vagyis a megfelelő Delaunay-gráfot színezzük), akkor csak az ismert, hogy $\Omega(\log n / \log \log n)$ szín szükséges [27] és $O(n^{0.368})$ elegendő [9, 25]. Ezen korlátok közötti rés szűkítése a terület fontos nyitott problémája.

Láttuk, hogy a 2.1 sejtés konvex sokszögekre igazolható. Mit tudunk más alakzatokról? A legtermészetesebb alakzat, amely nem sokszög, minden bizonnyal az (egység)körlap. Mani-Levitska és Pach [72] egy publikálatlan kéziratban már közölte a sejtés bizonyítását az egységkörlap eltoltjaira. Ezt azonban nem ellenőrizték utána, és később meglepő módon Pálvölgyi talált egy ellenpéldát (amelyet [72] néhány eredményével együtt a [84]-ben publikáltak), így megmutatva, hogy Pach sejtése nem igaz a körlapra. Ugyanebben a dolgozatban megmutatják, hogy ez a tétel szintén nem igaz mindenhol pozitív görbületű, sima peremű konvex halmazokra, ellenben a nem-korlátos konvex halmazokra igaz. Később Pálvölgyi és Tóth [90] teljes jellemzést adott azon konvex alakzatokról, amelyekre a sejtés állítása érvényes.

Még korábban Pach, Tardos és Tóth [81] bizonyította, hogy pontok a körlap homotetikusaira (azaz az összes körlapra) vonatkozóan nem mindig jól 2-színezhetőek.

A fentiek felvetik a kérdést, hogy a körlap eltoltjainak/homotetikusainak családjában pontosan mekkora a χ_m értéke. Először is, a jól ismert Delaunay-gráf, amely egybeesik a pontoknak körlapokra vonatkozó metszethipergráfjával, köztudottan sík és így jól 4-színezhető, ugyanakkor 4 színre már a pontok egységkörlapokra vonatkozó hipergráfjai esetén is szükség lehet (pl. a teljes négy csúcsú gráf könnyen realizálható). Ezért χ legfeljebb 4 a körlapok homotetikusaira, és így (felhasználva, hogy $\chi_m \leq \chi$) χ_m is legfeljebb 4 mindkét családra. Smorodinsky [100] egy dualizációs érveléssel (a pontokat $\mathbb{R}^3$ féltreire, a körlapokat $\mathbb{R}^3$ pontjaira leképezve) megmutatta, hogy χ szintén legfeljebb 4 a körlapok homotetikusainak pontokra vonatkozó metszethipergráfjaira.

A kérdés, hogy ezekre a családokra χ_m vajon 3 vagy 4, többször is felmerült, pl. a szerző által [64], mára egy esetet kivéve a probléma megoldódott. Damásdi és Pálvölgyi [28] megmutatta, hogy $\chi_m = 3$ a pontok egységkörlapokra vonatkozó metszethipergráfjaira (és így a duális esetben is). Másrészt ugyanezek a szerzők megmutatták [29], hogy $\chi_m = 4$ a pontok körlapokra vonatkozó metszethipergráfjaira. Mivel homotetikusok esetén a duális probléma már nem ekvivalens a primál problémával, ezért a körlapok pontokra vonatkozó színezésének esetét a fentiek nyitva hagyják.

2.2. Pszeudo-körlapok

A szerző ebben a fejezetben bemutatott eredményei a [57, 53] publikációkban jelentek meg, és az értekezésben szerepel a bizonyításuk.

2.2.1. Pszeudo-körlapok pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfja

A körlapokkal kapcsolatos probléma két természetes módon általánosítható. Egyrészt tekinthetjük pszeudo-körlapok családjait. Másrészt, tekinthetjük pontok helyett valamilyen alakzatcsalád körlapokra vagy pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfját. E két lehetséges kiterjesztés közös általánosításáról is sikerül bizonyíthatunk színezési eredményeket. Mivel láttuk, hogy a $\chi_m = \chi = 4$ már pontok körlapokra vonatkozó színezése esetén is, így ezekben az általánosításokban érdekesebb a χ_m helyett a χ -re koncentrálni, ezért ebben a fejezetben mindig a χ -ről beszélünk, azaz az összes hiperélet tekintjük a színezéskor, nem csak az elég nagy hiperéleket.

Először definiáljuk a pszeudo-körlapok családjait, amelyek a körlapok családjainak általánosításai.

2.2. Definíció. *Egy Jordan-tartomány egy (egyszeresen összefüggő) zárt, korlátos tartomány, amelynek határa egy zárt egyszerű Jordan-görbe. Jordan-tartományok egy családját pszeudo-körlapok családjának nevezzük, ha bármely két tartomány határai legfeljebb két pontban metszik egymást.*

A pszeudo-körlapok fogalma a matematika számos területén bizonyult hasznosnak, mivel a körlapok fogalmát természetesen általánosítja, miközben megtartja számos topológiai és kombinatorikai tulajdonságát, hasonlóan ahhoz, ahogyan a pszeudo-egyenes családok általánosítja az egyenesek családját (lásd a 2.3 fejezetben). Az általában vizsgált problémák a klasszikus algoritmikus kérdésektől, mint például a maximális méretű független (diszjunkt) részcsaládok megtalálása [26], a klasszikus kombinatorikus geometriai kérdésekig, mint például az Erdős-Szekeres probléma [49], terjednek. Valószínűleg a legfontosabb pszeudo-körlap családtípus az egy tetszőleges rögzített konvex alakzat homotetikusainak családja. Emiatt a pszeudo-körlapokról szóló eredmények alkalmazhatók bármely rögzített konvex alakzat homotetikusairól szóló eredményekre.

Olyan metszethipergráfokról, amelyekben egyik definiáló család sem ponthalmaz, csak sporadikus korábbi eredmények vannak. Egyenes intervallumainak metszethipergráfjait a szerző és Pálvölgyi vizsgálta [67]. Vizsgálták továbbá egységkörlapok, pszeudo-körlapok, négyzetek és tengelypárhuzamos téglalapok metszethipergráfjait (és metszetgráfjait) [55, 38].

Jól ismert, hogy a pontok körlapokra vonatkozó Delaunay-gráfja síkgráf és így jól 4-színezhető. A következő egyszerű, de hasznos megfigyelésből az következik, hogy a megfelelő hipergráf is jól 4-színezhető.

2.3. Megfigyelés (Smorodinsky [100]). *Ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ olyan családok, amelyeknél $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ minden hiperéle tartalmaz egy 2 méretű hiperéleket, akkor a Delaunay-gráf jó színezése egyben $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ jó színezése is.*

2.4. Definíció. *Adott egy $\mathcal{H}$ hipergráf, csúcsainak konfliktusmentes k -színezése az egy olyan k színnel való színezés, amelyre $\mathcal{H}$ minden H hiperéle tartalmaz egy olyan csúcsot, amelynek színe különbözik H összes többi csúcsának színétől.*

A [100] publikációban Smorodinsky egy általános keretrendszert dolgozott ki (a [36]-ben bemutatott keretrendszer alapján): a hipergráf részhipergráfjainak jó színezéseit felhasználva konfliktusmentes színezést tud megadni $O(\log n)$ színnel (ahol n a hipergráf csúcsainak száma). A továbbiakban említett eredmények ezt a keretrendszert használják arra, hogy konfliktusmentes színezést kapjunk, ha már van jó színezés. Először, e keretrendszer megelőző változatát használva, Even et al. [36] bebizonyította, hogy a pontok körlapokra vonatkozóan konfliktusmentesen színezhetők $O(\log n)$ színnel:

2.5. Tétel (Even et al. [36]). *Legyen $\mathcal{D}$ a síkbeli körlapok családja és P egy véges ponthalmaz, $\mathcal{I}(P, \mathcal{D})$ konfliktusmentesen színezhető $O(\log n)$ színnel, ahol $n = |P|$.*

Ismert, hogy ha körlapok családja helyett pszeudo-körlapok családját vesszük, a 2.5. Tétel korlátja továbbra is érvényes marad:

2.6. Tétel (folklor). *Legyen $\mathcal{F}$ egy pseudo-körlap család és P egy véges ponthalmaz, $\mathcal{I}(P, \mathcal{F})$ jól 4-színezhető és $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető, ahol $n = |P|$.*

A bizonyítást az adja, hogy ismert, hogy a pontok pseudo-körlapokra vonatkozó Delaunay gráfja szintén síkgráf és így jól 4-színezhető, majd alkalmazhatjuk a 2.3 Megfigyelést hogy megállapítsuk, hogy az adott hipergráf is 4-színezhető. Ekkor Smorodinsky fent említett általános keretrendszere egy $O(\log n)$ felső korlátot garantál a konfliktusmentes színezésre.

A 2.5. Tétel duálisát Even et al. szintén bebizonyította, ezt Smorodinsky általánosította pseudo-körlapokra:

2.7. Tétel (Even et al. [36]). *Legyen P a sík összes pontjának halmaza és $\mathcal{B}$ a körlapok véges családja, ekkor $\mathcal{I}(\mathcal{B}, P)$ jól 4-színezhető és $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető, ahol $n = |\mathcal{B}|$.*

2.8. Tétel (Smorodinsky [100]). *Legyen P a sík összes pontjának halmaza és $\mathcal{B}$ a pseudo-körlapok véges családja, $\mathcal{I}(\mathcal{B}, P)$ konstans sok színnel jól színezhető és $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető, ahol $n = |\mathcal{B}|$.*

Míg a pseudo-körlapok pontokra vonatkozó színezésére nem volt explicit felső korlát, addig a konvex alakzat homotetikusainak speciális esetére Cardinal és Korman megmutatta, hogy 4 szín elég, akárcsak a körlapok esetében:

2.9. Tétel (Cardinal-Korman [22]). *Legyen P a sík összes pontjának halmaza, $\mathcal{B}$ pedig egy adott konvex alakzat homotetikusainak véges családja, ekkor $\mathcal{I}(\mathcal{B}, P)$ jól 4-színezhető.*

Nemrég Keller és Smorodinsky bebizonyította, hogy a körlapok körlapokra vonatkozó metszethipergráfja is színezhető ilyen módon, ez a 2.5. és 2.7. Tételek közös általánosítása:

2.10. Tétel (Keller-Smorodinsky [55]). *Legyen $\mathcal{D}$ a sík összes körlapjának családja és $\mathcal{B}$ körlapok véges családja, $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{D})$ jól 6-színezhető és $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető, ahol $n = |\mathcal{B}|$.*

Bár ugyanezt nem bizonyították be pseudo-körlapokra, két speciális esetet megoldottak (ezeket csak a fő eredményük bizonyításának részeként közölték):

2.11. Állítás (Keller-Smorodinsky [55]). *Adott egy véges $\mathcal{F}$ pseudo-körlap család és $\mathcal{F}$ egy $\mathcal{B}$ részcsaládja, Ha $\mathcal{B}$ vagy $\mathcal{F} \setminus \mathcal{B}$ csak páronként diszjunkt pseudo-körlapokat tartalmaz, akkor $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ konstans sok színnel jól színezhető és $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető, ahol $n = |\mathcal{B}|$.*

A 2.10. Tételt általánosítjuk arra az esetre, ha egy pseudo-körlap család egy másik pseudo-körlap családra vonatkozó metszethipergráfját színezzük, ami az összes fenti eredmény közös általánosítása (2.5., 2.7., 2.8., 2.9., 2.10. Tétel és 2.11. Állítás). Jó 4-színezhetőséget bizonyítunk, mely optimális és így javítja a 2.8. Tétel korlátját is valamilyen konstans számú színről 4 színre, és javítja a 2.10. Tétel korlátját is 6 színről 4 színre. Eközben bebizonyítjuk, hogy egy pseudo-körlap család egy másik pseudo-körlap családra vonatkozó Delaunay-gráfja síkgráf. Továbbá alternatív bizonyítást nyújtunk a 2.7. és 2.9. Tételekre (mindkettőt eredetileg dualizációval egy 3 dimenziós térben levő ponthalmaz színezési kérdésére vezették vissza):

2.12. Tétel (Keszegh [57]). *Adott egy $\mathcal{F}$ pseudo-körlapokból álló család és egy $\mathcal{B}$ pseudo-körlapokból álló véges család, $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ jól 4-színezhető.*

A szokásos keretrendszer használatával a 2.12. Tételből könnyen következik, hogy:

2.13. Következmény (Keszegh [57]). *Adott egy $\mathcal{F}$ pseudo-körlapokból álló család és egy $\mathcal{B}$ pseudo-körlapokból álló véges család, $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető, ahol $n = |\mathcal{B}|$.*

Megjegyezzük, hogy az 2.11. Állításból egyszerűen következik [55] fő eredménye a pszeudo-körlapok metszetgráfjainak (nyílt/zárt) szomszédsági hipergráfjainak konfliktusmentes színezéséről (definíciókat és részleteket lásd [55]). Így a 2.12. Tételből a fő eredményük is következik.

Megjegyezzük, hogy a 2.12. Tételben $\mathcal{B}$ és $\mathcal{F}$ semmilyen módon nem kapcsolódik egymáshoz, így, bár két konvex alakzat végtelen sokszor metszheti egymást, kissé meglepő módon a következő következmény igaz:

2.14. Következmény (Keszegh [57]). *Egy A konvex alakzat homotetikusainak családja egy másik B konvex alakzat homotetikusainak családjára vonatkozóan jól 4-színezhető.*

Buzaglo et al. [20] megmutatták, hogy a $\mathcal{I}(P, \mathcal{F})$ hipergráf VC-dimenziója, amelyet egy P véges pontthalmaz határoz meg egy $\mathcal{F}$ pszeudo-körlap családra vonatkozóan, legfeljebb 3 (és ez a korlát éles), és ezt felhasználva bebizonyították, hogy az ilyen hipergráfban a legfeljebb t méretű hiperélek száma $O(t^2n)$ (és ez már akkor is éles, ha $\mathcal{F}$ a körlapok családja). Aronov et al. [12] megmutatták, hogy egy $\mathcal{F}$ pszeudo-körlap család és $\mathcal{F}$ véges $\mathcal{B}$ részcsaládja esetén $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ metszethipergráf VC-dimenziója legfeljebb 4 (és ez a korlát éles). A [20] publikációban leírtakhoz hasonló módszerekkel megmutatják, hogy ebből következik, hogy $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ -ben a legfeljebb t méretű hiperélek száma $O(t^3n)$ (ennek élességét nem bizonyítják). Mi a következő általánosabb állításokat látjuk be (ahol $\mathcal{B}$ nem feltétlenül $\mathcal{F}$ részcsaládja):

2.15. Tétel (Keszegh [57]). *Adott egy $\mathcal{F}$ pszeudo-körlapokból álló család és egy véges $\mathcal{B}$ pszeudo-körlapokból álló család, az $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ metszethipergráf VC-dimenziója legfeljebb 4 (és ez a korlát éles).*

2.16. Tétel (Keszegh [57]). *Adott pszeudo-körlapok egy $\mathcal{F}$ családja és egy n darab pszeudo-körlapokból álló $\mathcal{B}$ család, az $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ metszethipergráfban a legfeljebb t méretű hiperélek száma $O(t^3n)$.*

Megjegyezzük, hogy a 2.16. Tétel esetében ismét nem ismert, hogy éles-e.

A Jordan-tartományok egy $\mathcal{B}$ családját *nem átszűrő*-nak nevezzük, ha $A \setminus B$ minden $A, B \in \mathcal{B}$ halmazpárra összefüggő. Megjegyezzük, hogy a pszeudo-körlapok egy családja mindig nem átszűrő. Raman és Ray [94] a nem átszűrő alakzatcsaládokkal kapcsolatos problémákat vizsgálta. A Delaunay-gráf helyett az ún. síkbeli támasztó gráfok létezését vizsgálták, a pakolási és fedési problémákhoz tartozó polinom idejű approximációs sémák (PTAS) megtalálására való alkalmazhatóságuk által motiválva. A $\mathcal{H} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ hipergráf *támasztó gráfja* egy olyan $\mathcal{G}$ gráf, amelynek csúcshalmaza $\mathcal{V}$ és minden $E \in \mathcal{E}$ hiperél esetén a $\mathcal{G}$ -nek az E csúcsai által indukált részgráfja összefüggő. Megjegyezzük, hogy egy támasztó gráf szükségszerűen tartalmazza a $\mathcal{H}$ Delaunay-gráfját mint részgráfot. A továbbiakban *síkbeli támasztó gráfnak* nevezünk egy támasztógráfot, ha az síkgráf. Fő eredményük a következő:

2.17. Tétel (Raman-Ray [94]). *Adott két, nem átszűrő alakzatokból álló $\mathcal{F}$ és $\mathcal{B}$ család, $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ -nek létezik síkbeli támasztó gráfja.*

Vegyük észre, hogy míg egy hipergráf Delaunay-gráfjának jó színezése nem feltétlenül jó színezése magának a hipergráfnak, addig egy támasztó gráf jó színezése egyben a hipergráf jó színezése is. Emlékezve arra, hogy egy pszeudo-körlap család mindig nem átszűrő, a 2.17. Tétel által garantált síkbeli támasztó gráf jó 4-színezéséből következik a 2.12. Tétel.

2.2.2. Lineáris unió-bonyolultságú család pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfja

A [100] publikációban a 2.8. Tételt egy általánosabb állítás bizonyításával látták be, mely lineáris unió-bonyolultságú családok pontokra vonatkozó metszethipergráfjáról szól.

2.18. Definíció. Legyen $\mathcal{B}$ a síkban véges sok Jordan-tartományból álló olyan család, amelynek tagjainak határai páronként véges sok pontban metszik egymást. A $\mathcal{B}$ elrendezés csúcsai a $\mathcal{B}$ tartományok határainak metszéspontjai, az élei a $\mathcal{B}$ tartományok határainak azon maximálisan összefüggő részei, amelyek nem tartalmaznak csúcsot és a lapjai a sík azon maximálisan összefüggő részei, amelyek az elrendezés éleitől és csúcsaitól diszjunktak.

2.19. Definíció. Egy $\mathcal{B}$ Jordán-tartománycsalád $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ unió-bonyolultsága a $\mathcal{B}$ elrendezés azon éleinek száma, amelyek az $\cup_{B \in \mathcal{B}} B$ határán fekszenek.

Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{B}$ alakzatcsalád (c)-lineáris unió-bonyolultságú, ha létezik egy olyan c konstans, hogy $\mathcal{B}$ bármely $\mathcal{B}'$ részcsaládja esetén $\mathcal{B}'$ unió-bonyolultsága legfeljebb $c|\mathcal{B}'|$.²

2.20. Tétel (Kedem et al. [52]). Pszeudo-körlapok bármely véges családja lineáris unió-bonyolultságú.

A 2.20. Tétel azt mutatja, hogy Smorodinsky következő eredménye valóban általánosabb, mint a 2.8. Tétel.

2.21. Tétel (Smorodinsky [100]). Legyen P a sík összes pontjának halmaza, $\mathcal{B}$ pedig lineáris unió-bonyolultságú Jordan-tartományok egy véges családja. Ekkor $\mathcal{I}(\mathcal{B}, P)$ konstans sok színnel jól színezhető és $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető, ahol $n = |\mathcal{B}|$.³

Ezt a következőképpen általánosítjuk:

2.22. Tétel (Keszegh [57]). Adott egy $\mathcal{F}$ pszeudo-körlapokból álló család és egy véges $\mathcal{B}$ lineáris unió komplexitású Jordan-tartománycsalád, $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ konstans sok színnel jól színezhető.

Megjegyezzük, hogy a 2.20 Tételt használva megkapjuk, hogy a 2.22. Tételből egy (nem explicit és rosszabb) felső korlát következik a 2.12. Tételre.

2.23. Következmény (Keszegh [57]). Adott egy $\mathcal{F}$ pszeudo-körlapokból álló család és egy véges $\mathcal{B}$ lineáris unió-bonyolultságú Jordan-tartományokból álló család, $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető, ahol $n = |\mathcal{B}|$.

2.24. Következmény (Keszegh). Adott egy $\mathcal{F}$ pszeudo-körlapokból álló család és egy véges $\mathcal{B}$ lineáris unió-bonyolultságú Jordan-tartományokból álló család, a $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ metszethipergráf d VC-dimenziója korlátos és $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ -ben a legfeljebb t méretű hiperélek száma $O(t^{d-1}n)$.

Eddig a pszeudo-körlapok és a lineáris unió-bonyolultságú családok pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfjait vizsgáltuk. A következőkben az egyenesek pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfjait tekintjük. Megjegyezzük, hogy az egyenesek családja nem lineáris unió-bonyolultságú.

2.2.3. Egyenesek pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfja

Ebben a fejezetben az egyenesek pszeudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfjait vizsgáljuk, azaz az $\mathcal{I}(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ hipergráfot, ahol $\mathcal{L}$ síkbeli egyenesek családja, $\mathcal{F}$ pedig pszeudo-körlap család. Feltételezzük, hogy a geometriai objektumok általános helyzetben vannak, abban az értelemben, hogy nincs 3 egyenes, amely közös ponton halad át, illetve nincs olyan egyenes, amely két pszeudo-körlap határának metszéspontján halad át.

²A szakirodalomban az unió-bonyolultság definíciójában néha az élek helyett a csúcsokat számolják, de könnyen belátható, hogy ez nem befolyásolja a lineáris unió-bonyolultság tulajdonság meglétét, ha $\mathcal{B}$ egy Jordan-tartománycsalád. Megjegyezzük még, hogy a lineáris unió-bonyolultság nem mindig öröklődően definiált, mi az állításaink egyszerűsítése érdekében definiáltuk így.

³Ha egy állítás egy (c)-lineáris unió-bonyolultságú családra vonatkozik, akkor a konstans alatt egy c -től függő állandót értünk, és az O jelölés hasonlóképpen a c -től való függést rejti.

Ebben a fejezetben csak a hipergráfok méreteivel foglalkozunk. Azért nem tekintjük a színezésüket, mert még a χ_m is végtelen erre a családra [81]. Valóban, ez egy általánosabb család, mint az egyenesek pontokra vonatkozó metszethipergráfjainak családja, amely egy standard dualizációs érveléssel megegyezik a duálisával, a pontok egyenesekre vonatkozó metszethipergráfjainak családjával. Ez utóbbi családra tetszőleges c, m esetén a Hales-Jewett tételből vett megfelelő konstrukciót általános irányban a síkra vetítve kapunk egy olyan konstrukciót, amelyben a pontok bármely c színnel való színezésében lesz egy m darab pontot tartalmazó monokromatikus egyenes.

A pontok egyenesekre vonatkozó metszethipergráfjaitól eltérően egy egyenesek pszeudo-körlapokra vonatkozó $\mathcal{I}(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ metszethipergráfjában, a hiperélek száma a csúcsok számától négyzetesen függhet. Ez már akkor is igaz, ha az egyenesek egy $n/2 \times n/2$ -es rácsot alkotnak, és csupán az egyenesek körlapokra vonatkozó metszethipergráfját vesszük. Aronov et al. [13] egy szebb példát is talált. Megmutatták, hogy bármely $\mathcal{L}$ egyenescsalád esetén, ha $\mathcal{F}$ bármely egyeneshármassal alkotott háromszögek beírt köreiből áll, akkor bármely $t \geq 3$ esetén $\mathcal{I}(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ -ben a t méretű hiperélek (röviden t -hiperélek) száma pontosan $\binom{n-t+2}{2}$.

Bármely fix t esetén léteznek olyan $\mathcal{I}(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ hipergráfok, amelyekben a t -hiperélek száma nagyobb, mint Aronov et al. [13] konstrukciójában, még akkor is, ha $\mathcal{F}$ csak körlapokat tartalmazhat (mivel a körlapok egy része nem biztos, hogy az egyenesek által alkotott egyik háromszög beírt köre). Belátjuk, hogy a t -hiperélek száma nem lehet lényegesen nagyobb bármely $\mathcal{I}(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ hipergráf esetén, ahol $\mathcal{L}$ egyenesek egy családja és $\mathcal{F}$ pszeudo-körlapok egy családja.⁴ Bebizonyítjuk a következőt (itt $\mathcal{E}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ hiperélek halmazát jelöli):

2.25. Tétel (Keller-Keszegh-Pálvölgyi [53]). *Legyen $\mathcal{L}$ n síkbeli egyenes családja és $\mathcal{F}$ egy pszeudo-körlap család, és tegyük fel, hogy a két család általános helyzetben van. Ekkor*

$$|\{e \in \mathcal{E}(\mathcal{I}(\mathcal{L}, \mathcal{F})) : |e| = t\}| = O_t(n^2).$$

Bizonyítási módszereink valószínűségi és síkbeli érvek kombinációi, valamint felhasználjuk az egyenesek elrendezésének tulajdonságait, kiváltképp a *zóna tételt*.

Megjegyezzük, hogy a 2.25. Tételben a t -től való függés nem feltétlenül optimális. Akár $O(tn^2)$ vagy akár $O(n^2)$ (azaz t -től független korlát) is igaz lehet.

Ezen kívül megmutatjuk, hogy $\mathcal{L}$ és $\mathcal{F}$ bármely választása esetén az $\mathcal{I}(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ hiperéleinek teljes száma $O(n^3)$. Ez a felső korlát éles, mivel az Aronov és társai által bemutatott hipergráfban a hiperélek száma $\binom{n}{3}$.

2.26. Állítás (Keller-Keszegh-Pálvölgyi [53]). *Legyen $\mathcal{L}$ n síkbeli egyenes családja és $\mathcal{F}$ egy pszeudo-körlap család, és tegyük fel, hogy a két család általános helyzetben van. Ekkor $|\mathcal{E}(\mathcal{I}(\mathcal{L}, \mathcal{F}))| = O(n^3)$.*

2.3. ABA-mentes hipergráfok és általánosításuk

A szerző ebben a fejezetben bemutatott eredményei a [60, 4, 56] publikációkban jelentek meg, és az értekezésben szerepel a bizonyításuk.

2.3.1. ABA-mentes hipergráfok és pszeudo-félsík hipergráfok

A konvex sokszögek eltoltjainak és homotetikusainak, körlapoknak, majd pszeudo-körlapoknak a vizsgálata után a talán legtermészetesebb hátralevő síkbeli alakzatcsalád a félsíkok családja. A pontok félsíkokra vonatkozó és a félsíkok pontokra vonatkozó metszethipergráfjait először a szerző [63, 64], majd Fulek [42] vizsgálta, majd polikromatikus k -színezéseiket Smorodinsky és Yuditsky [102]. Ők

⁴A pszeudo-körlapok és körlapok által indukált hipergráfok közötti különbségről lásd még [40] és az ott található hivatkozásokat.

bizonyították, hogy $m_k = 2k - 1$ pontok fésíkokra vonatkozó színezésére, míg $m_k \leq 3k - 2$ a fésíkok pontokra vonatkozó színezésére, ez utóbbi korlát élessége nem bizonyított.

Hasonlóan ahhoz, ahogyan a pseudo-körlapok általánosítják a körlapokat, a fésíkokat is általánosíthatjuk pseudo-fésíkokká. Egy pseudo-egyenes család az olyan mindkét irányba végtelen görbék családja, amelyek páronként legfeljebb egyszer metszik egymást, továbbá egy pseudo-fésík család olyan síkbeli tartományok családja, amelyek határai pseudo-egyenes családot alkotnak.

Korábban már említettük, hogy pontok egy tetszőleges fix nem-korlátos konvex halmaz eltoltjaira vonatkozóan jól 2-színezhetőek. Valójában $m_2 = 3$ elégséges [84]. Mivel egy nem-korlátos konvex halmaz eltoltjai pseudo-fésík családot alkotnak (valóban, határaik legfeljebb egyszer metszik egymást, és így pseudo-egyenes családot alkotnak), ezért a pseudo-fésíkokra vonatkozó később kimondott eredményünkől az optimális $m_k = 2k - 1$ általánosítás következik nem-korlátos konvex halmazokra.

A fésíkokra vonatkozó összes (primál és duális) eredményt általánosítjuk pseudo-fésíkokra, megválaszolva ezzel a [102] szerzői által nyitva hagyott kérdést. Ehhez a vizsgált hipergráfcsaládokat kombinatorikai módon definiáljuk, geometriai terminológiák nélkül. Megmutatjuk, hogy ez az absztrakt hipergráfcsalád megegyezik a pontok pseudo-fésíkokra vonatkozó metszethipergráfjainak családjával. Így ezután már csak ezekkel a kombinatorikusan definiált hipergráfokkal kell foglalkoznunk.

2.27. Definíció. Egy $\mathcal{H}$ hipergráf rendezett csúcshalmazon ABA mentes, ha H nem tartalmaz olyan A és B hiperéleket, melyekre van három $x < y < z$ csúcs, hogy $x, z \in A \setminus B$ és $y \in B \setminus A$.

Egy nem rendezett csúcshalmazon adott hipergráf ABA-mentes, ha a csúcsainak van olyan rendezése, amellyel a hipergráf ABA-mentes.

Egy S rendezett pontthalmazon lévő $\mathcal{H}$ hipergráfot pseudo-fésík hipergráfnak nevezünk, ha létezik egy olyan ABA-mentes $\mathcal{F}$ hipergráf S -en, hogy $\mathcal{H} \subset \mathcal{F} \cup \bar{\mathcal{F}}$, ahol $\bar{\mathcal{F}}$ az $\mathcal{F}$ hiperéleinek komplementereinek családja.

A következő példák mind ABA-mentes hipergráfokat adnak: pontok egyenes intervallumaira vonatkozó metszethipergráfja, síkbeli pontok egy felfelé nem korlátos konvex halmaz eltoltjaira vonatkozó metszethipergráfja, síkbeli pontok felfelé néző fésíkokra vonatkozó metszethipergráfja. Továbbá, síkbeli pontok az összes fésíkra vonatkozó metszethipergráfja egy pseudo-fésík hipergráf. Ezek a példák illusztrálják, hogy az ABA-mentes hipergráfokról szóló absztrakt eredményekből hogyan következnek geometriai eredmények. Sőt, az ABA-mentes hipergráfoknak van egy ekvivalens geometriai definíciója, a pontok felfelé néző pseudo-fésíkokra vonatkozó metszethipergráfjainak családja, amelyek természetes módon általánosítják ezeket a geometriai példákat.

Az ABA-mentes hipergráfokra vonatkozó fő eredményünk a következő.

2.28. Tétel (Keszegh-Pálvölgyi [60]). Adott egy ABA-mentes $\mathcal{H}$ hipergráf, ekkor csúcsait k színnel ki tudjuk színezni úgy, hogy minden olyan $A \in \mathcal{H}$ hiperél, amelynek mérete legalább $2k - 1$, tartalmazza az összes k színt.

Bizonyításunk Smorodinsky és Yuditsky pontok fésíkokra vonatkozó színezéséről szóló bizonyítását követi. Ezután belátjuk, hogy ennek a problémának a duálisa ekvivalens a primál feladattal, amiből következik, hogy minden $(2k - 1)$ -uniform ABA-mentes hipergráf hiperélei k színnel színezhetőek, úgy, hogy ha egy v csúcsot tartalmazó összes hiperél $\mathcal{H}_v$ családja legalább $m_k = 2k - 1$ méretű, akkor $\mathcal{H}_v$ mind a k színosztályból tartalmaz hiperéleket.

A pseudo-fésík hipergráfok családja általánosabb, mint az ABA-mentes hipergráfoké, ennek ellenére ugyanazt a korlátot be tudjuk látni:

2.29. Tétel (Keszegh-Pálvölgyi [60]). Adott egy $\mathcal{H}$ pseudo-fésík hipergráf, ekkor csúcsait k színnel ki tudjuk kiszínezni úgy, hogy minden $A \in \mathcal{H}$, amelynek mérete legalább $2k - 1$, tartalmazza az összes k színt.

Mindkét eredmény éles. Megjegyezzük, hogy mint már említettük, ezekből ugyanez következik a pontok nem-korlátos konvex halmazokra vonatkozó metszethipergráfjaira is.

A duális hipergráfról a következőket látjuk be.

2.30. Tétel (Keszegh-Pálvölgyi [60]). *Adott egy $\mathcal{H}$ pseudo-félsík hipergráf, ekkor $\mathcal{H}$ hiperéleit k színnel ki tudjuk színezni úgy, hogy minden olyan csúcsot, amelyet legalább $3k - 2$ hiperél tartalmaz, azt mind a k színű hiperél tartalmaz.*

Ez az eredmény nem biztos, hogy éles, a legjobb ismert alsó korlát m_k -ra $2k - 1$ [102]. Ezen kívül vizsgáljuk az úgynevezett pseudo-félgömb hipergráfokat is, amelyek a pseudo-félsík hipergráfoknak és azok duálisainak közös általánosításai.

2.3.2. ABAB-mentes hipergráfok

Az ABA-mentes hipergráf definíciója a Davenport-Schinzel sorozatokhoz hasonlóan [30] egyszerű módon általánosítható több váltakozásra. Megmutatjuk, hogy már egy újabb váltakozás olyan hipergráfokat ad, melyek nem mindig jól 2-színezhetők.

Legyen $\ell \geq 1$ egy olyan szám, hogy 2ℓ egész szám. Jelöljük $(AB)^\ell$ -vel az A és B betűk 2ℓ hosszúságú váltakozó sorozatát. Például $(AB)^{1.5} = ABA$ és $(AB)^2 = ABABAB$.

2.31. Definíció ($(AB)^\ell$ -mentes hipergráfok). *Egy rendezett elemhalmaz A, B részhalmazai $(AB)^\ell$ -sorozatot alkotnak, ha vannak olyan $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_\ell < b_\ell$ elemek, hogy $\{a_1, a_2, \dots, a_\ell\} \subset A \setminus B$ és $\{b_1, b_2, \dots, b_\ell\} \subset B \setminus A$.*

Egy rendezett csúcshalmazú hipergráf $(AB)^\ell$ -mentes, ha nem tartalmaz két A és B hiperélet melyek egy $(AB)^\ell$ -sorozatot alkotnak.

Egy rendezetlen csúcshalmazú hipergráf $(AB)^\ell$ -mentes, ha van olyan sorrendje a csúcsainak, hogy az így rendezett csúcshalmazú hipergráf $(AB)^\ell$ -mentes.

Az ABAB-mentes hipergráfokra vonatkozó eredményeink a következők:

2.32. Tétel (Keszegh-Pálvölgyi [60]). *Minden $m \geq 2$ esetén létezik egy ABAB-mentes m -uniform hipergráf, amely nem jól 2-színezhető.*

2.33. Tétel (Ackerman-Keszegh-Pálvölgyi [4]). *Minden ABAB-mentes hipergráf jól 3-színezhető.*

Hasonlóan ahhoz, ahogyan az ABA-mentes hipergráfok éppen a pontok felfelé néző pseudo-félsíkokra vonatkozó metszethipergráfjai, az ABAB-mentes hipergráfok éppen a pontok felfelé néző pseudo-parabolákra vonatkozó metszethipergráfjai, és általánosabban $(AB)^\ell$ -mentes hipergráfok pontok olyan mindkét irányba végtelen x -monoton görbék feletti tartományokra vonatkozó metszethipergráfjai, amelyben a görbék páronként legfeljebb $2\ell - 2$ -szor metszik egymást. Bár ez könnyen bizonyítható, megmutatjuk az ABAB-mentes hipergráfok egy nem-triviális geometriai reprezentációját is, pontoknak egy közös pontot tartalmazó pseudo-körlapok családjára vonatkozó metszethipergráfjaként (ezeket leszúrt pseudo-körlapoknak nevezzük):

2.34. Tétel (Ackerman-Keszegh-Pálvölgyi [4]). *Egy hipergráf éppen akkor ABAB-mentes, ha pontok leszúrt pseudo-körlap családra vonatkozó metszethipergráfja.*

Ebből következik az alábbi tétel:

2.35. Tétel (Ackerman-Keszegh-Pálvölgyi [4]). *Legyen $\mathcal{F}$ pseudo-körlapok olyan családja, amelyek közös metszete nem üres, és legyen S egy véges ponthalmaz. Ekkor az S pontjait 3 színnel lehet úgy kiszínezni, hogy $\mathcal{F}$ bármely olyan pseudo-körlapja, amely legalább két pontot tartalmaz S -ből, két különböző színű pontot tartalmaz. Továbbá, minden m egész számhoz létezik egy S ponthalmaz és pseudo-körlapok egy $\mathcal{F}$ családja, amelyek közös metszete nem üres, úgy, hogy a pontok minden 2 színnel való*

színezéséhez létezik egy olyan pszeudo-körlap, amely legalább m pontot tartalmaz, melyeknek ugyanaz a színe.

A 2.35. Tételből könnyen következik az alábbi állítás.

2.36. Következmény (Ackerman-Keszegh-Pálvölgyi [4]). *Adott S véges ponthalmaz esetén S pontjai három színnel színezhetők úgy, hogy minden olyan körlap, amely tartalmazza az origót és S legalább két pontját, az tartalmaz két különböző színű pontot.*

Nemrég Damásdi és Pálvölgyi bebizonyította, hogy már a pontok leszúrt körlapokra vonatkozó jó színezése esetén sem elég két szín [29] (bármilyen fix m esetén), és így ez a 3-as korlát a lehető legjobb. Azt is megmutatták, hogy a pontok leszúrt egységkörlapokra vonatkozó színezése esetén 2 szín elég. Ugyanez vonatkozik a konvex tartományok leszúrt eltoltjaira és homotetikusaira is (2 illetve 3 szín elég és szükséges). Azonban a pontok konvex sokszögek leszúrt homotetikusaira vonatkozó jó színezésére bebizonyítják, hogy 2 szín is elég. Megjegyezzük, hogy ez egy újabb megoldott speciális esete a pontok konvex sokszög homotetikusaira vonatkozó jó 2-színezésének nyitott problémájára.

2.3.3. További eredmények

Foglalkoztunk a ABA-mentes hipergráfokkal, azok duálisaiival és más általánosításaikkal. Ezután foglalkoztunk ABAB-mentes hipergráfokkal. Bemutattunk továbbá ezen eredmények számos következményét egyes geometriai hipergráfok színezéséről.

Hasonló kérdéseket vizsgálhatunk duális-ABAB-mentes hipergráfokkal (azaz ABAB-mentes hipergráfok duálisával) kapcsolatban is, ami egyenértékű a leszúrt pszeudo-körlapok fedés-szétcsedési problémájával. Ezzel kapcsolatban Pálvölgyivel bebizonyítottuk (folyamatban lévő munka), hogy az ilyen hipergráfok jól 4-színezhetők, míg minden $m \geq 2$ esetén létezik olyan duális-ABAB-mentes m -uniform hipergráf, amelynek nem létezik jó 2-színezése. Ez eldöntetlenül hagyja a problémát, hogy az m -uniform duális-ABAB-mentes hipergráfok jó színezéséhez 3 vagy 4 szín szükséges-e.

A továbbiakban $\ell > 2$ esetén $(AB)^\ell$ -mentes hipergráfokat vizsgálunk, és megmutatjuk, hogy $\chi_m = \infty$ már az ABABA-mentes hipergráfok esetében is, a 2.32. Tétel bizonyításához hasonló konstrukciót használva, amely viszont a [81]-beli hipergráfot használja.

2.37. Tétel (Ackerman-Keszegh-Pálvölgyi [4]). *Minden $c \geq 2$ és $m \geq 2$ esetén létezik egy ABABA-mentes m -uniform hipergráf, amely nem jól c -színezhető.*

Mit mondhatunk az $(AB)^\ell$ -mentes n csúcsú hipergráfok éleinek maximális számáról? Egyrészt egy $(AB)^\ell$ -mentes hipergráf VC-dimenziója legfeljebb $2\ell - 1$, ezért a Sauer-Shelah lemma szerint legfeljebb $O(n^{2\ell-1})$ hiperéle lehet. Másrészt vegyünk egy n csúcsból álló rendezett halmazt, és osszuk fel $2\ell - 1$ darab majdnem azonos méretű intervallumra. Legyen a csúcsok összes olyan részhalmaza hiperél, amely ezen intervallumok előtagjainak uniója. Így kapunk egy $\Theta(n^{2\ell-1})$ hiperéllel rendelkező hipergráfot, és könnyen belátható, hogy ez $(AB)^\ell$ -mentes. Ez tehát egy $(AB)^\ell$ -mentes hipergráf maximális mérete fix ℓ esetén.

Megjegyezzük, hogy azt feltenni, hogy a VC-dimenzió legfeljebb $2\ell - 1$ az egy gyengébb feltételezés, mint az $(AB)^\ell$ -mentesség. Bármely c és m esetén léteznek 2 VC-dimenziójú m -uniform hipergráfok, amelyek nem jól c -színezhetők; a [81] és [89] fő konstrukciói általánosíthatóak 2-színesekről c -színezésekre, és így 2 VC-dimenziójú m -uniform hipergráfokat kapunk.

Végezetül említünk egy másik érdekes kutatási irányt. A pszeudo-félsík hipergráfokról szóló eredmények bizonyításában szükségünk lesz a következő Helly-típusú eredményre: ha egy pszeudo-félsík hipergráf bármely három hiperéle metszi egymást, akkor a hipergráfot bővíthetjük egy minden hiperélben szereplő csúccsal úgy, hogy az még mindig egy pszeudo-félsík hipergráf marad. A közelmúltban

Jensen et al. [50] egy diszkrét Helly-típusú eredményt mutatott félsíkokra. Kiderült, hogy ez pszeudo-félsíkokra is általánosítható: [56]-ben bebizonyítottuk többek között, hogy adott pszeudo-félsík hipergráf esetén, ha a hiperélek minden hármásának van egy közös csúcsa, akkor létezik egy legfeljebb két csúcsból álló halmaz, amely minden hiperélet leszűr. Összefoglalva, minden hiperélet vagy egy, az eredeti csúcshalmazon ‘kívül eső’ csúccsal, vagy két, az eredeti csúcshalmazból származó csúccsal szűrhatunk le. Hasonló eredmények bizonyíthatóak a duális pszeudo-félsík hipergráfokról is [56]. Ezt a kutatási irányt a [68]-ban az értekezés szerzője a következő módon folytatja. A síkban a konvex halmazok egyik definíciója az, hogy azok félsíkok metszetei. Analóg módon tekinthetünk úgynevezett pszeudo-konvex halmazokat, amelyeket egy pszeudo-félsík hipergráf hiperéleinek metszetei határoznak meg. A [68] publikációban a szerző a konvexitás számos klasszikus eredményét általánosítja erre a fogalomra, többek között a Helly-tételt, a Carathéodory-tételt, a Kirchberger-tételt, a szétválasztási tételt, a Radon-tételt és a Cup-Cap-tételt. Ezen eredmények részletes tárgyalása nem fér bele a disszertáció kereteibe, bővebben ezekről és a konvexitáselmélet más területeivel való szoros kapcsolatukról lásd a [68] publikációt.

2.4. Érintőgráfok

A szerző ebben a fejezetben bemutatott eredményei a [6, 62, 5] publikációkban jelentek meg, és az értekezésben szerepel a bizonyításuk.

Ebben a fejezetben görbék családjában az érintő görbepárok maximális számát vizsgáljuk, ahol két görbét akkor nevezünk érintőnek, ha pontosan egyszer metszik egymást, és ebben a metszéspontban nem keresztezik, hanem érintik egymást.

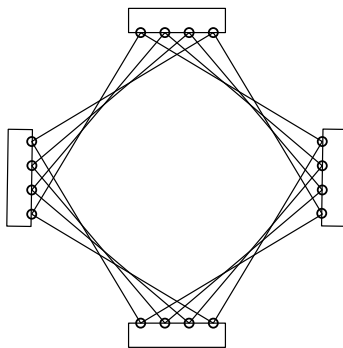
Görbéneg egy *Jordan ívet* tekintünk, azaz egy zárt intervallumból $\mathbb{R}^2$ -be injektív folytonos függvény képét. Ha egy görbén nincs két olyan pont, amelynek x -koordinátája megegyezik, akkor a görbét *x -monotonnak* nevezzük. Csak olyan görbecsaládokat tekintünk, amelyeknél minden görbepár véges számú pontban metszi egymást. Az ilyen családot *t -metsző*-nek nevezzük (néha ezeket precízebben *legtöbb t -metszőnek* is nevezzük), ha minden görbepár legfeljebb t pontban metszi egymást. Két görbe egy p metszéspontja *keresztező pont*, ha van egy p középpontú kis körlap, D , amely nem tartalmazza más metszéspontját a két görbének, és mindkét görbe pontosan két pontban metszi a D határát, és e négy pont ciklikus sorrendjében nincs két egymást követő pont ugyanazon görbén. Ha két görbe pontosan egy pontban metszi egymást, és ez nem keresztező pont, akkor azt mondjuk, hogy abban az *érintő* pontban *érinti egymást* a két görbe.

Az *érintések* száma alatt az érintő görbepárok számát értjük. Ha több, mint két görbe metszheti egymást egy közös pontban, akkor minden görbepár lehet érintő, például az x^{2i} , $i = 1, 2, \dots, n$ függvények grafikonjai a $[-1, 1]$ intervallumban. Ezért figyelmünket olyan görbecsaládokra korlátozzuk, amelyekben három görbe nem metszi egymást közös pontban.

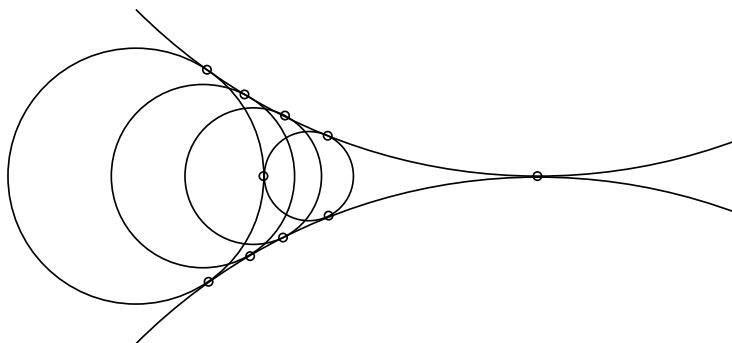
Sok esetben a görbéket lokálisan perturbálhatjuk úgy, hogy az érintések digonokká (a görbék elrendezésében két oldalú lapokká) válnak, és ez meg is fordítható, bár óvatossá kell lennünk, mivel ez több metszéspontból vagy az érintés más fogalmához vezethet (pl. két görbe sok digont alkothat, de megengedjük-e, hogy egynél több pontban érintsék egymást?). A kombinatorikus geometriában sok olyan probléma van, amelyet úgy lehet megfogalmazni, hogy bizonyos görbék közötti érintések (vagy digonok) számát felülről becsüljük, lásd pl. [8]. Ezek közül a leghíresebb Erdős [33] már a Bevezetés legelején említett egységtávolság-problémája.

Egy alakzatcsalád *érintőgráfjának* csúcsai az alakzatoknak, élei pedig az érintő pároknak felelnek meg. Elsődleges célunk tehát, hogy bizonyos alakzatcsaládok érintőgráfjainak éleinek számát az alakzatok számának függvényében felülről becsüljük.

Ha a családba tartozó görbék nem keresztezhetik egymást, azaz az érintő pontoktól eltekintve diszjunktak, akkor az érintőgráfjuk síkgráf, és az Euler-formulából következik, hogy $n \geq 3$ görbe között legfeljebb $3n - 6$ az érintések száma [35].



3. ábra. n téglalap $\Omega(n^2)$ érintést határozhat meg.



4. ábra. n körlap $2n - 2$ érintést határozhat meg.

Másrészt, ha nincs korlátozás a metszéspontok számára, akkor $\lfloor n^2/4 \rfloor$ érintés is lehet, mivel könnyen rajzolhatunk két olyan $n/2$ méretű görbecsaládot, hogy minden görbepár mely mindkét családból egy-egy görbét tartalmaz, az érintő pár. Ezt még úgy is könnyen megtehetjük, hogy a görbék konvex alakzatok határai [37], lásd a 3. ábrát (ez könnyen módosítható úgy is, hogy egy négyzet egybevágó példányai legyenek az alakzatok). Egy ilyen görbecsalád esetén azonban szükségszerűen sok metszéspontunk van az azonos családba tartozó görbepárok között.

Ezért a keresztezésekre való különböző korlátozásokat feltéve vizsgáljuk a feladatot.

Először arra az esetre koncentrálunk, amikor egy görbecsaládunk van, első esetben a görbék páronként metszik egymást, a másodikban ezt nem tesszük fel, majd megvizsgáljuk azt az esetet, amikor két olyan családuk van, amelyek mindegyike páronként diszjunkt görbékből áll és a két család közti érintések számát számoljuk.

2.4.1. Páronként metsző görbék családján belüli érintések

Természetes feltétel, hogy a görbék páronként metszőek legyenek. Ezen belül először körökkel és pszeudo-körökkel foglalkozunk. Alon et al. [10] bebizonyította, hogy n páronként metsző körből álló elrendezés $O(n)$ digont határoz meg (lásd még [8]). Egy alsó korlátot ad erre az esetre a $2n - 2$ érintést meghatározó körök egy egyszerű konstrukciója, lásd a 4. ábrát. Grünbaum híres sejtése [45] azt állítja, hogy a síkban páronként metsző n pszeudo-kör legfeljebb $2n - 2$ digont határozhat meg ($n \geq 4$ esetén). Agarwal et al. [8] belátta ezt olyan elrendezésekre, amelyben minden pszeudo-kör tartalmaz a belsejében egy közös pontot. Nemrég Felsner, Roch és Scheucher [39] megmutatta, hogy Grünbaum sejtése igaz az olyan elrendezésekre is, amelyekben van három pszeudo-kör, amelyek közül bármely kettő egy digont határoz meg. Legutóbb a szerző több társszerzővel együtt először körökre látta be ezt az 50 éves sejtést [2], majd végül pszeudo-körökre is [3]. Megjegyezzük, hogy pszeudo-körök esetén a digonok számolása

ekvivalens az érintések számolásával.

A páronként metsző pszeudo-körök olyan zárt görbék, amelyek páronként legalább egyszer és legfeljebb kétszer metszik egymást. Ha ehelyett nem szükségszerűen zárt görbékről van szó, akkor ugyanezzel a feltételezéssel, miszerint legalább egyszer és legfeljebb kétszer kell páronként metszeniük egymást, már lehet $\Omega(n^{4/3})$ érintés i. Ez úgy látható be, ha módosítjuk Erdős és Purdy híres, n pontból és n egyenesből álló, $\Omega(n^{4/3})$ pont-egyes illeszkedést meghatározó konstrukcióját úgy, hogy minden pontot megfelelő görbével helyettesítünk, és az egyeneseket kissé perturbáljuk. Ennek a jól ismert konstrukciónak a variációit többször is említjük még a továbbiakban. A legjobb felső korlát pedig $O(n^{9/5})$, amely csak a legfeljebb 2-metsző tulajdonságot használja (ez a 2.40. Tételből következik). Pach [74] azonban azt sejtette, hogy nem feltétlenül zárt görbék esetén, ha minden görbepárnak pontosan egyszer kell metszenie egymást (vagy egy keresztező pontban vagy egy érintő pontban), az ismét lineáris felső korlátot garantál az érintések számára:

2.38. Sejtés (Pach [74]). *Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan, n görbéből álló család, melyre $\mathcal{C}$ -nek nincs három görbéje mely egy pontban metszi egymást, és $\mathcal{C}$ minden görbepárja pontosan egy pontban metszi egymást, amely vagy keresztező pont vagy érintő pont. Ekkor $\mathcal{C}$ görbéi közötti érintések száma $O(n)$.*

Györgyi, Hujter és Kisfaludi-Bak [46] bebizonyította a 2.38. Sejtést arra a speciális esetre, amikor a $\mathcal{C}$ elrendezésben konstans sok lap együttesen tartalmazza a görbék összes végpontját. Megmutatjuk, hogy a 2.38. Sejtés x -monoton görbékre is érvényes.

2.39. Tétel (Ackerman-Keszegh [5]). *Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan, n x -monoton görbéből álló család, melyre $\mathcal{C}$ -nek nincs három görbéje mely egy pontban metszi egymást, és $\mathcal{C}$ minden görbepárja pontosan egy pontban metszi egymást, amely vagy keresztező pont vagy érintő pont. Ekkor $\mathcal{C}$ görbéi közötti érintések száma legfeljebb $1160n$.*

2.4.2. Egy görbecsaládon belüli érintések száma

Áttérünk arra az esetre, amikor a görbék nem feltétlenül páronként metszők. Egy n görbéből álló legfeljebb 1-metsző görbecsaládon belül az érintések száma lehet $\Omega(n^{4/3})$, még akkor is, ha minden görbének x -monotonnak kell lennie; ez ismét Erdős és Purdy [34] konstrukciójából következik, amely n pontból és n egyenesből áll, és amely $\Omega(n^{4/3})$ pont-egyes illeszkedést határoz meg. Ebben minden pontot egy kis görbével helyettesítünk, és az egyeneseket kissé perturbáljuk [75]. Legfeljebb 1-metsző x -monoton görbék esetén Pach és Sharir [82] eredményéből következik egy majdnem éles, $O(n^{4/3} \log^{2/3} n)$ felső korlát, amely gondosabb elemzéssel $O(n^{4/3} \log^{1/3} n)$ -ra javítható.⁵ Lásd még [32, 35] további részletekért.

A [82] publikációból az is következik, hogy a mindkét irányba végtelen x -monoton 1-metsző görbék esetében az érintések maximális száma $\Theta(n \log n)$.

Ami a nem feltétlenül páronként metsző (pszeudo-)körök elrendezéseit illeti, n kör $\Omega(n^{4/3})$ digont határozhat meg, ismét Erdős és Purdy, n egyenesből és n pontból álló konstrukciója alapján, amely ennyi pont-egyes illeszkedést enged meg [75]. A pszeudo-körökre vonatkozó legjobb ismert felső korlát $O(n^{3/2} \log n)$ (Marcus és Tardos [73]). Egy valamivel jobb $O(n^{3/2})$ -os felső korlát az n kör által meghatározott érintések számára Ellenberg, Solymosi és Zahl [32] eredményéből következik. Egységkörök esetén az érintések számának megszámlálása ekvivalens Erdős híres egységtávolság problémájával, amelyre a legjobb ismert alsó és felső korlát $\Omega(n^{1+c/\log \log n})$ [33] és $O(n^{4/3})$ [86, 103, 104].

Pach, Rubin és Tardos [76, 77] belátta Richter és Thomassen [95] régóta fennálló sejtését, megmutatva, hogy páronként metsző görbék által meghatározott keresztező pontok (azaz azon metszéspontok, amelyek *nem* érintő pontok) száma $\Omega(1 - o(1))n^2$. Azt mutatták meg, hogy bármely (nem feltétlenül

⁵Eyal Ackerman és Rom Pinchasival megfigyelése.

páronként metsző) görbecsaládban, amely legalább lineárisan sok érintéssel rendelkezik, a keresztező pontok száma szuperlineáris az érintő pontok számához képest. Ebből következik továbbá, hogy bármely rögzített t esetén minden n darab t -metsző görbéből álló halmaz $o(n^2)$ érintést határozhat meg.

Szintén Richter és Thomassen sejtése által motiválva Salazar [97] korábban belátta a sejtést olyan családokra, amelyek páronként metszőek. Ehhez Salazar megmutatta, hogy ha a görbék páronként metszik egymást, akkor elég nagy $c = c(t)$ esetén egy legfeljebb t -metsző görbékéből álló család érintőgráfja nem tartalmazza a $K_{2t,c}$ teljes páros gráfot, mint részgráfot. Ezután a Kővári–Sós–Turán tételt alkalmazva megállapíthatjuk, hogy az élek száma az érintőgráfban $o(n^2)$. Nemrégiben Bechler–Speicher [16] adaptálta ezt az ötletet arra az esetre, amikor a görbék nem feltétlenül páronként metszik egymást, megmutatva, hogy bármely n legfeljebb t -metsző görbékéből álló család legfeljebb $O(n^{2-\frac{1}{3t+15}})$ érintést határozhat meg. Belátta, hogy ha elég sok él van az érintőgráfban, akkor létezik a görbéknek egy olyan kétszeresen határolt részcsaládja (ennek definícióját későbbre halasztjuk), amely az érintések elég nagy részét meghatározza, továbbá egy ilyen részcsalád érintőgráfja nem tartalmazza $K_{t+5,c}$ -t részgráfként valamilyen elég nagy $c = c(t)$ esetén. Ekkor ismét alkalmazható a Kővári–Sós–Turán-tétel. Ezt a korlátot tovább javítjuk azzal, hogy megmutatjuk, hogy az érintőgráf nem tartalmazza $K_{t+3,c}$ -t valamely elég nagy $c = c(t)$ esetén. Megjegyezzük, hogy nem kell feltételeznünk a páronkénti metszést és a kétszeresen határoltságot sem, továbbá a bizonyításunk ezen túl is némiképp egyszerűbb. Ahogy eddig is, ezután már a következő tétel közvetlenül következik a jól ismert Kővári–Sós–Turán tétel segítségével.

2.40. Tétel (Keszegh–Pálvölgyi [62]). *Bármely n görbéből álló legfeljebb t -metsző görbecsalád legfeljebb $O(n^{2-\frac{1}{t+3}})$ érintést határoz meg.*

Kiváltképp az is következik, hogy n 1-metsző görbe $O(n^{7/4})$ érintést határozhat meg, míg n 2-metsző görbe $O(n^{9/5})$ érintést határozhat meg. Nincs tudomásunk jobb alsó korlátról (még tetszőleges t esetén sem), mint a fent említett, legfeljebb 1-metsző görbék családjának konstrukciója, melyben $\Omega(n^{4/3})$ érintés van.

A közelmúltban a szerző és szerzőtársai bebizonyították a 2.40. Tétel általánosítását görbékről topológiai fákra [107], ugyanezeket a módszereket használva.

2.4.3. Két görbecsalád közti érintések száma

Fordítsuk most figyelmünket a két (együttesen n görbéből álló) család tagjai közötti maximális számú érintésre abban az esetben, amikor a két család mindegyike páronként diszjunkt görbékéből áll. Vegyük észre, hogy ebben az esetben az érintőgráf páros.

Pach, Suk és Treml [83] szerint Pinchasi és Ben-Dan nevéhez fűződik az első eredmény erről a problémáról. Ők bizonyították, hogy az ilyen n görbéből álló családban az érintések maximális száma $O(n^{3/2} \log n)$. Bizonyításuk Marcus és Tardos [73], valamint Pinchasi és Radoičić [92] eredményein alapul. Pinchasi és Ben-Dan azt sejtette, hogy a helyes nagyságrend lineáris lehet n -ben.

Pach, Suk és Treml [83] bizonyította ezt a sejtést arra a speciális esetre, amikor mindkét család zárt konvex tartományokból áll, nem pedig tetszőleges görbékéből. Ackerman [1] javította a multiplikatív konstanst 8-ról 6-ra erre az esetre, ami aszimptotikusan optimális.

Másrészt Pach, Suk és Treml [83] egy példával cáfolta a sejtést általánosságban, belátva hogy az érintések száma lehet több, mint lineáris. Pontosabban, két, n páronként diszjunkt x -monoton görbékéből álló családot konstruáltak, amelyek egymás között $\Omega(n \log n)$ érintést határoznak meg. Megmutatták, hogy x -monoton görbék esetén $O(n \log^2 n)$ felső korlát. Mi meghatározzuk a pontos nagyságrendet x -monoton görbékre, megadva a következő javított felső korlátot, amely nagyságrendileg megegyezik a korábbi alsó korláttal.

2.41. Tétel (Keszegh–Pálvölgyi [62]). *Adott egy n piros és kék x -monoton görbéből álló család, úgy, hogy két azonos színű görbe nem metszi egymást, ekkor a görbék közötti érintések száma $O(n \log n)$.*

Ha közelebbről megvizsgáljuk Pach et al. [83] $\Omega(n \log n)$ görbét tartalmazó konstrukcióját, észrevehetjük, hogy a két család együttesen egy legfeljebb 2-metsző családot alkot, azaz bármely piros és kék görbepár legfeljebb kétszer metszi egymást. Ez felveti azt a kérdést, hogy ha azt feltételezzük, hogy a család legfeljebb 1-metsző, akkor jobb felső korlátot kapunk-e. Bebizonyítjuk, hogy ez valóban így van, azaz, ha adott egy legfeljebb 1-metsző, n piros és kék görbéből álló család úgy, hogy két azonos színű görbe nem metszi egymást, akkor a görbék közötti érintések száma $O(n)$:

2.42. Tétel (Ackerman-Keszegh-Pálvölgyi [6]). *Adott egy n piros és kék görbéből álló, 1-metsző család, úgy, hogy két azonos színű görbe nem metszi egymást, ekkor a görbék közötti érintések száma $O(n)$.*

Megjegyezzük, hogy triviális egy $\Omega(n)$ érintést meghatározó példát konstruálni, és láttuk, hogy ha a görbepárok kétszer is metszhetik egymást akkor több, mint lineáris érintés is lehet.

Általános (azaz pl. nem feltétlenül x -monoton és nem feltétlenül 1-metsző) görbékre a fő eredményünk egy olyan konstrukció, amely jelentősen javítja a korábbi $\Omega(n \log n)$ alsó korlátot. A mi konstrukciónknak az a különleges tulajdonsága, hogy tartalmaz egy piros és egy kék görbét, amelyek mindegyike érinti az ellentétes színű görbéket. Emiatt a konstrukció úgy is megvalósítható, hogy minden görbe egy függőleges sávon belül helyezkedik el, minden piros görbe érinti a sáv bal oldali határát, és minden kék görbe érinti a sáv jobb oldali határát. Az ilyen görbecsaládot *kétszeresen határolt* családnak nevezzük.⁶

2.43. Tétel (Keszegh-Pálvölgyi [62]). *Létezik n piros és kék görbe olyan családja, melyben két azonos színű görbe nem metszi egymást, és a görbék közötti érintések száma $\Omega(n^{4/3})$. Ezen felül a család választható kétszeresen határoltnak.*

Maradt egy polinomiális eltérés ezen alsó korlát és a legismertebb $O(n^{3/2} \log n)$ felső korlát között. A felső korlátból a $\log n$ elhagyása is már előrelépést jelentene. Az alsó korlátot kiegészítendő megmutatjuk, hogy a kétszeresen határolt családok esetében viszont ez a lehető legjobb korlát, feltételezve, hogy Pach és Tardos [86] egy tiltott 0-1 mátrixokról szóló nyitott sejtése érvényes:

2.44. Tétel (Keszegh-Pálvölgyi [62]). *Tegyük fel, hogy a következő érvényes: Ha egy 0-1 mátrix elkerüli az összes pozitív ortogonális kört, akkor a mátrix 1-eleinek száma $O(n^{4/3})$.*

Ekkor a következő is igaz: Az érintések száma $O(n^{4/3})$ olyan n piros és kék görbe között, amelyek kétszeresen határolt családot alkotnak, azaz egy függőleges sávon belül helyezkednek el úgy, hogy két azonos színű görbe nem metszi egymást, minden piros görbe a sáv bal oldalát, minden kék görbe pedig a sáv jobb oldalát érinti.

A 0-1 mátrixokkal kapcsolatos hiányzó definíciókat mellőzzük. A bizonyítás első, egyszerű lépéseként a legjobb ismert $O(n^{3/2} \log n)$ -os általános felső korláthoz képest némi javulást kapunk a kétszeresen határolt családokra:

2.45. Állítás (Keszegh-Pálvölgyi [62]). *Adott egy n piros és kék görbéből álló, kétszeresen határolt család, ekkor a görbék közötti érintések száma $O(n^{3/2})$.*

A piros és kék görbecsaládok közötti érintések számára vonatkozó ismert eredményeket az 1. táblázat foglalja össze.

⁶Megjegyezzük, hogy az [41] publikációban egy kissé eltérő, de kombinatorikailag ekvivalens definíciót használtak.

Görbetípus	Érintések száma	Alsó korlát hivatk.	Felső korlát hivatk.
általános	$\Omega(n^{4/3}), \tilde{O}(n^{3/2})$	2.43. Tétel	Pinchasi és Ben-Dan [83]
kétszeresen határolt	$\Omega(n^{4/3}), O(n^{3/2}),$ 0-1 mátrixos sejtés $\Rightarrow \Theta(n^{4/3})$	2.43. Tétel	2.45. Állítás 2.44. Tétel
x -monoton	$\Theta(n \log n)$	Pach et al. [83]	2.41. Tétel
1-metsző	$\Theta(n)$	triviális	2.42. Tétel
konvex tartományok	$\Theta(n)$	triviális	Pach et al. [83]

1. táblázat. Eredmények összefoglalása diszjunkt görbék két családjára.

Összekötő görbék. Ahelyett, hogy egy $\mathcal{S}$ görbecsalád görbéi közötti érintési pontokat vizsgáljunk, görbék olyan diszjunkt párait is vizsgálhatjuk, amelyeket egy másik $\mathcal{C}$ görbecsaládból származó c görbe metsz, úgy, hogy c nem metsz egyetlen másik $\mathcal{S}$ -beli görbét sem ezen a páron kívül. Valóban, két $\mathcal{S}$ -beli görbe minden egyes érintési pontja helyettesíthető egy új, rövid görbével, amely összeköti a két korábban érintő görbét, amelyeket pedig az érintési pont közelében az egyik görbe perturbálásával diszjunktá tehetünk. Megfordítva, ha $\mathcal{C}$ olyan görbékből áll, amelyek *diszjunkt* görbéket kötnek össze $\mathcal{S}$ -ből, akkor $\mathcal{C}$ minden egyes összekötő görbéje helyettesíthető a megfelelő görbék közötti érintési ponttal, a két görbe egyikét átrajzolva. Ezért az ilyen összekötő görbék érintési pontjainak vizsgálata ekvivalens probléma. Ez adja a 2.42. Tétel következő újrafogalmazását.

2.46. Tétel (Ackerman-Keszegh-Pálvölgyi [6]). *Legyen $\mathcal{S}$ n darab 1-metsző piros és kék görbe családjá, melyben két azonos színű görbe nem metszi egymást. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}$ olyan páronként diszjunkt görbék családjá, amelyek mindegyike különböző $\mathcal{S}$ -beli diszjunkt görbepárt metsz. Ekkor $|\mathcal{C}| = O(n)$.*

Ha $\mathcal{S}$ és $\mathcal{C}$ két görbecsalád, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{C}$ *határolt* $\mathcal{S}$ tekintetében, ha van egy olyan összefüggő tartománya $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$ -nek, amely tartalmazza $\mathcal{C}$ minden görbéjének legalább egy pontját. Ha $\mathcal{C}$ határolt $\mathcal{S}$ tekintetében, akkor elhagyhatjuk azt a feltevést, hogy $\mathcal{S}$ 1-metsző, és bizonyíthatjuk a következő változatot.

2.47. Tétel (Ackerman-Keszegh-Pálvölgyi [6]). *Legyen $\mathcal{S}$ n darab piros és kék görbe családjá, melyben két azonos színű görbe nem metszi egymást. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C}$ olyan páronként diszjunkt görbék halmaza, amelyek mindegyike különböző $\mathcal{S}$ -beli görbepárt metsz. Továbbá tegyük fel, hogy $\mathcal{C}$ határolt $\mathcal{S}$ tekintetében. Ekkor $|\mathcal{C}| = O(n)$.*

Megjegyezzük, hogy itt elhagytuk azt a feltételezést is, hogy egy piros és egy kék görbe, amelyeket egy $\mathcal{C}$ görbe köt össze az diszjunkt. Ezért lényeges, hogy $\mathcal{C}$ az $\mathcal{S}$ tekintetében határolt legyen, mert különben $|\mathcal{C}| = \Omega(n^2)$ lenne. Valóban, legyen $\mathcal{S}$ egy $n/2$ vízszintes szakaszból és $n/2$ függőleges szakaszból álló (1-metsző) halmaz úgy, hogy minden vízszintes és minden függőleges szakasz metszi egymást. Ekkor minden ilyen pár összekapcsolható egy $\mathcal{C}$ -beli görbével, amely nagyon közel van a metszéspontjukhoz, azaz $|\mathcal{C}| = n^2/4$.

A 2.47. Tételt használhatjuk Keller, Rok és Smorodinsky [54] egyik eredményének javítására az L-alakzatok konfliktusmentes színezéseiről. Kiváltképp azt bizonyítjuk, hogy amennyiben adott n L-alakzat $\mathcal{L}$ családjá, amelyek mindegyike alulról érinti az x -tengelyt, akkor $\mathcal{L}$ L-alakzatait ki lehet színezni $O(\log^2 n)$ színnel úgy, hogy minden $\ell \in \mathcal{L}$ -re, az ℓ -et metsző L-alakzatok között van egy, amelynek színe különbözik a többi ℓ -et metsző L-alakzat színétől.

Hivatkozások

- [1] Eyal Ackerman: *The Maximum Number of Tangencies Among Convex Regions with a Triangle-Free Intersection Graph*. New York, NY, 2013, Springer New York, 19–30. p. ISBN 978-1-4614-0110-0.
- [2] Eyal Ackerman–Gábor Damásdi–Balázs Keszegh–Rom Pinchasi–Réka Blanka Raffay: On the number of digons in arrangements of pairwise intersecting circles. In *40th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2024)* (konferenciaanyag), to be published. köt. 2024.
- [3] Eyal Ackerman–Gábor Damásdi–Balázs Keszegh–Rom Pinchasi–Réka Blanka Raffay: On the number of digons in arrangements of pairwise intersecting pseudo-circles. Manuscript, 2024.
- [4] Eyal Ackerman–Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: Coloring hypergraphs defined by stabbed pseudo-disks and ABAB-free hypergraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 34. évf. (2020) 4. sz., 2250–2269. p.
- [5] Eyal Ackerman–Balázs Keszegh: On the number of tangencies among 1-intersecting x-monotone curves. *European Journal of Combinatorics*, 118. évf. (2024), 103929. p. ISSN 0195-6698.
- [6] Eyal Ackerman–Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: On tangencies among planar curves with an application to coloring l-shapes. *European Journal of Combinatorics*, 2023., 103837. p. ISSN 0195-6698.
- [7] Eyal Ackerman–Rom Pinchasi: On coloring points with respect to rectangles. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120. évf. (2013) 4. sz., 811–815. p. ISSN 0097-3165.
- [8] Pankaj K Agarwal–Eran Nevo–János Pach–Rom Pinchasi–Micha Sharir–Shakhar Smorodinsky: Lenses in arrangements of pseudo-circles and their applications. *Journal of the ACM (JACM)*, 51. évf. (2004) 2. sz., 139–186. p.
- [9] Deepak Ajwani–Khaled Elbassioni–Sathish Govindarajan–Saurabh Ray: Conflict-free coloring for rectangle ranges using $o(n^{3/2})$ colors. *Discrete & Computational Geometry*, 48. évf. (2012. Jul) 1. sz., 39–52. p. ISSN 1432-0444.
- [10] Noga Alon–Hagit Last–Rom Pinchasi–Micha Sharir: On the complexity of arrangements of circles in the plane. *Discret. Comput. Geom.*, 26. évf. (2001) 4. sz., 465–492. p. ISSN 0179-5376.
- [11] Greg Aloupis–Jean Cardinal–Sébastien Collette–Stefan Langerman–David Orden–Pedro Ramos: Decomposition of multiple coverings into more parts. *Discrete & Computational Geometry*, 44. évf. (2010. Oct) 3. sz., 706–723. p. ISSN 1432-0444.
- [12] Boris Aronov–Anirudh Donakonda–Esther Ezra–Rom Pinchasi: On pseudo-disk hypergraphs. *Computational Geometry*, 92. évf. (2021). ISSN 0925-7721.
- [13] Boris Aronov–Daniel Q. Naiman–János Pach–Micha Sharir: An invariant property of balls in arrangements of hyperplanes. *Discret. Comput. Geom.*, 10. évf. (1993), 421–425. p.
- [14] Andrei Asinowski–Jean Cardinal–Nathann Cohen–Sébastien Collette–Thomas Hackl–Michael Hoffmann–Kolja Knauer–Stefan Langerman–Michał Lasoń–Piotr Micek–Günter Rote–Torsten Ueckerdt: Coloring hypergraphs induced by dynamic point sets and bottomless rectangles. In Frank Dehne–Roberto Solis-Oba–Jörg-Rüdiger Sack (szerk.): *Algorithms and Data Structures* (konferenciaanyag). Berlin, Heidelberg, 2013, Springer Berlin Heidelberg, 73–84. p. ISBN 978-3-642-40104-6.

- [15] Edgar Asplund–Branko Grünbaum: On a coloring problem. *Mathematica Scandinavica*, 8. évf. (1960. Dec.), 181–188. p.
- [16] Maya Bechler-Speicher: A crossing lemma for families of jordan curves with a bounded intersection number, 2019.
- [17] Claude Berge: Balanced matrices. *Mathematical Programming*, 2. évf. (1972. Feb) 1. sz., 19–31. p. ISSN 1436-4646.
- [18] Marcin Briański–James Davies–Bartosz Walczak: Separating polynomial χ -boundedness from χ -boundedness. *Combinatorica*, 44. évf. (2024. Feb) 1. sz., 1–8. p. ISSN 1439-6912.
- [19] James Perkins Burling: *On Coloring Problems of Families of Polytopes*. Phd thesis (University of Colorado). 1965.
- [20] Sarit Buzaglo–Rom Pinchasi–Günter Rote: Topological hypergraphs. In *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*. 2012. oct, Springer New York, 71–81. p.
- [21] Jean Cardinal–Kolja Knauer–Piotr Micek–Dömötör Pálvölgyi–Torsten Ueckerdt–Narmada Varadarajan: Colouring bottomless rectangles and arborescences. *Computational Geometry*, 115. évf. (2023), 102020. p. ISSN 0925-7721.
- [22] Jean Cardinal–Matias Korman: Coloring planar homothets and three-dimensional hypergraphs. *Computational geometry*, 46. évf. (2013) 9. sz., 1027–1035. p.
- [23] Parinya Chalermsook–Bartosz Walczak: Coloring and maximum weight independent set of rectangles. In *Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)* (konferenciaanyag). 860–868. p.
- [24] Jérémie Chalopin–Daniel Gonçalves: Every planar graph is the intersection graph of segments in the plane: extended abstract. In *Proceedings of the Forty-First Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '09 konferenciasorozat. New York, NY, USA, 2009, Association for Computing Machinery, 631–638. p. 8 p.
- [25] Timothy M. Chan: Conflict-free coloring of points with respect to rectangles and approximation algorithms for discrete independent set. In *Proceedings of the Twenty-Eighth Annual Symposium on Computational Geometry*, SoCG '12 konferenciasorozat. New York, NY, USA, 2012, Association for Computing Machinery, 293–302. p. ISBN 9781450312998. 10 p.
- [26] Timothy M. Chan–Sariel Har-Peled: Approximation algorithms for maximum independent set of pseudo-disks. *Discrete & Computational Geometry*, 48. évf. (2012) 2. sz., 373–392. p.
- [27] Xiaomin Chen–János Pach–Mario Szegedy–Gábor Tardos: Delaunay graphs of point sets in the plane with respect to axis-parallel rectangles. *Random Structures & Algorithms*, 34. évf. (2009) 1. sz., 11–23. p.
- [28] Gábor Damásdi–Dömötör Pálvölgyi: Three-Chromatic Geometric Hypergraphs. In Xavier Goaoc–Michael Kerber (szerk.): *38th International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2022)*, Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs) konferenciasorozat, 224. köt. Dagstuhl, Germany, 2022, Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 32:1–32:13. p. ISBN 978-3-95977-227-3. ISSN 1868-8969.
- [29] Gábor Damásdi–Dömötör Pálvölgyi: Realizing an m -uniform four-chromatic hypergraph with disks. *Combinatorica*, 42. évf. (2022) 1. sz., 1027–1048. p. ISSN 1439-6912.

- [30] Harold Davenport – Andrzej Schinzel: A combinatorial problem connected with differential equations. *American Journal of Mathematics*, 87. évf. (1965) 3. sz., 684–694. p. ISSN 00029327, 10806377.
- [31] James Davies: Improved bounds for colouring circle graphs. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 150. évf. (2022) 12. sz., 5121–5135. p.
- [32] Jordan S. Ellenberg – József Solymosi – Joshua Zahl: New bounds on curve tangencies and orthogonalities. *Discrete Anal.*, 2016. 11.
- [33] Paul Erdős: On sets of distances of n points. *Am. Math. Mon.*, 53. évf. (1946) 5. sz., 248–250. p. ISSN 00029890, 19300972.
- [34] Paul Erdős: Problems and results in combinatorial geometry. Discrete geometry and convexity, Proc. Conf., New York 1982, Ann. N.Y. Acad. Sci. 440, 1–11, 1985.
- [35] Paul Erdős – Branko Grünbaum: Osculation vertices in arrangements of curves. *Geom. Dedicata*, 1. évf. (1973), 322–333. p. ISSN 0046-5755.
- [36] Guy Even – Zvi Lotker – Dana Ron – Shakhar Smorodinsky: Conflict-free colorings of simple geometric regions with applications to frequency assignment in cellular networks. *SIAM Journal on Computing*, 33. évf. (2003. jan) 1. sz., 94–136. p.
- [37] Esther Ezra – János Pach – Micha Sharir: On regular vertices of the union of planar convex objects. *Discrete & Computational Geometry*, 41. évf. (2009. Mar) 2. sz., 216–231. p. ISSN 1432-0444.
- [38] S. P. Fekete – P. Keldenich: Conflict-free coloring of intersection graphs. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 28. évf. (2018) 3. sz., 289–307. p.
- [39] Stefan Felsner – Sandro Roch – Manfred Scheucher: Arrangements of pseudocircles: on digons and triangles. In *Graph drawing and network visualization*. Lecture Notes in Computer Science sorozat, 13764. köt. 2023, Springer, Cham, 441–455. p.
- [40] Stefan Felsner – Manfred Scheucher: Arrangements of pseudocircles: On circularizability. *Discret. Comput. Geom.*, 64. évf. (2020) 3. sz., 776–813. p.
- [41] Jacob Fox – János Pach – Csaba D. Tóth: Intersection patterns of curves. *Journal of the London Mathematical Society*, 83. évf. (2011) 2. sz., 389–406. p.
- [42] Radoslav Fulek: Coloring geometric hyper-graph defined by an arrangement of half-planes, 2011.
- [43] Fănică Gavril: The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16. évf. (1974) 1. sz., 47–56. p.
- [44] Matt Gibson – Kasturi Varadarajan: Optimally decomposing coverings with translates of a convex polygon. *Discrete & Computational Geometry*, 46. évf. (2011. Sep) 2. sz., 313–333. p. ISSN 1432-0444.
- [45] Branko Grünbaum: Arrangements and spreads. In *CBMS Regional conference series in mathematics* (konferenciaanyag). 1972, American Mathematical Society.
- [46] Péter Györgyi – Bálint Hujter – Sándor Kisfaludi-Bak: On the number of touching pairs in a set of planar curves. *Computational Geometry*, 67. évf. (2018), 29 – 37. p. ISSN 0925-7721.

- [47] A. Gyárfás: On the chromatic number of multiple interval graphs and overlap graphs. *Discrete Mathematics*, 55. évf. (1985) 2. sz., 161–166. p. ISSN 0012-365X.
- [48] Sarel Har-Peled–Shakhar Smorodinsky: Conflict-free coloring of points and simple regions in the plane. *Discret. Comput. Geom.*, 34. évf. (2005) 1. sz., 47–70. p.
- [49] Andreas F. Holmsen–Hossein Nassajian Mojarrad–János Pach–Gábor Tardos: Two extension of the Erdős-Szekeres problem. *J. Eur. Math. Soc.*, 22. évf. (2022) 12. sz., 3981–3995. p.
- [50] Frederik Brinck Jensen–Aadi Joshi–Saurabh Ray: Discrete Helly type theorems. In *Proceedings of the 30th Annual Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG 2020, August 5-7, 2020, University of Saskatchewan, Saskatoon, Saskatchewan, Canada* (konferenciaanyag). 2020, 332–335. p.
- [51] T. Karthick–Frédéric Maffray: Vizing bound for the chromatic number on some graph classes. *Graphs and Combinatorics*, 32. évf. (2016. Jul) 4. sz., 1447–1460. p. ISSN 1435-5914.
- [52] Klara Kedem–Ron Livne–János Pach–Micha Sharir: On the union of jordan regions and collision-free translational motion amidst polygonal obstacles. *Discrete & Computational Geometry*, 1. évf. (1986. Mar) 1. sz., 59–71. p. ISSN 1432-0444.
- [53] Chaya Keller–Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: On the Number of Hyperedges in the Hypergraph of Lines and Pseudo-Discs . *Electron. J. Comb.*, 29. évf. (2022) 3. sz., P3.25. p.
- [54] Chaya Keller–Alexandre Rok–Shakhar Smorodinsky: Conflict-free coloring of string graphs. *Discrete & Computational Geometry*, 2020.
- [55] Chaya Keller–Shakhar Smorodinsky: Conflict-Free Coloring of Intersection Graphs of Geometric Objects. *Discrete & Computational Geometry*, 2019., 1–26. p.
- [56] Balázs Keszegh: Discrete Helly-type theorems for pseudohalfplanes. *European Journal of Combinatorics*, 101. évf. (2022), 103469. p. ISSN 0195-6698.
- [57] Balázs Keszegh: Coloring intersection hypergraphs of pseudo-disks. *Discrete & Computational Geometry*, 64. évf. (2020. Oct) 3. sz., 942–964. p. ISSN 1432-0444.
- [58] Balázs Keszegh–János Pach–Dömötör Pálvölgyi: Drawing planar graphs of bounded degree with few slopes. In Ulrik Brandes–Sabine Cornelsen (szerk.): *Graph Drawing* (konferenciaanyag). Berlin, Heidelberg, 2011, Springer Berlin Heidelberg, 293–304. p. ISBN 978-3-642-18469-7.
- [59] Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: Convex polygons are self-coverable. *Discrete & Computational Geometry*, 51. évf. (2014. Jun) 4. sz., 885–895. p. ISSN 1432-0444.
- [60] Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: An abstract approach to polychromatic coloring: shallow hitting sets in ABA-free hypergraphs and pseudohalfplanes. *J. Comput. Geom.*, 10. évf. (2019), 1–26. p.
- [61] Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: Proper coloring of geometric hypergraphs. *Discrete & Computational Geometry*, 62. évf. (2019. Oct) 3. sz., 674–689. p. ISSN 1432-0444.
- [62] Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: The number of tangencies between two families of curves. *Combinatorica*, 43. évf. (2023. Oct) 5. sz., 939–952. p. ISSN 1439-6912.

- [63] Balázs Keszegh: Weak conflict-free colorings of point sets and simple regions. In Prosenjit Bose (szerk.): *Proceedings of the 19th Annual Canadian Conference on Computational Geometry, CCCG 2007, August 20-22, 2007, Carleton University, Ottawa, Canada* (konferenciaanyag). 2007, Carleton University, Ottawa, Canada, 97–100. p.
- [64] Balázs Keszegh: Coloring half-planes and bottomless rectangles. *Computational geometry*, 45. évf. (2012) 9. sz., 495–507. p.
- [65] Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: Geometric hypergraph zoo.
- [66] Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: Octants are cover-decomposable. *Discrete & Computational Geometry*, 47. évf. (2012) 3. sz., 598–609. p.
- [67] Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: More on decomposing coverings by octants. *Journal of Computational Geometry*, 6. évf. (2015) 1. sz., 300–315. p.
- [68] Balázs Keszegh: A new discrete theory of pseudoconvexity. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, vol. 25:1. évf. (2023. május).
- [69] Balázs Keszegh–Dömötör Pálvölgyi: Octants are cover-decomposable into many coverings. *Computational Geometry*, 47. évf. (2014) 5. sz., 585–588. p. ISSN 0925-7721.
- [70] Paul Koebe: Kontaktprobleme der konformen abbildung. *Ber. Saechs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl.*, 88. évf. (1936), 141–164. p.
- [71] István Kovács: Indecomposable coverings with homothetic polygons. *Discrete & Computational Geometry*, 53. évf. (2015) 4. sz., 817–824. p.
- [72] Peter Mani-Levitska – János Pach: Decomposition problems for multiple coverings with unit balls. 1986. Unpublished Manuscript.
- [73] Adam Marcus–Gábor Tardos: Intersection reverse sequences and geometric applications. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 113. évf. (2006) 4. sz., 675–691. p.
- [74] János Pach: personal communication.
- [75] János Pach–Pankaj K. Agarwal: *Combinatorial Geometry*. 11 fejezet. 1995, John Wiley and Sons Ltd, 177–178. p. ISBN 9781118033203.
- [76] János Pach–Natan Rubin–Gábor Tardos: On the Richter-Thomassen conjecture about pairwise intersecting closed curves. *Combinatorics, Probability and Computing*, 25. évf. (2016) 6. sz., 941–958. p.
- [77] János Pach–Natan Rubin–Gábor Tardos: A crossing lemma for Jordan curves. *Advances in Mathematics*, 331. évf. (2018), 908–940. p. ISSN 0001-8708.
- [78] János Pach: Decomposition of multiple packing and covering. In *2. Kolloquium über Diskrete Geometrie* (konferenciaanyag), CONF. köt. 1980, Institut für Mathematik der Universität Salzburg, 169–178. p.
- [79] János Pach: Covering the plane with convex polygons. *Discrete & Computational Geometry*, 1. évf. (1986), 73–81. p.
- [80] János Pach–Dömötör Pálvölgyi–Géza Tóth: Survey on decomposition of multiple coverings. In *Geometry–Intuitive, Discrete, and Convex*. 2013, Springer, 219–257. p.

- [81] János Pach – Gábor Tardos – Géza Tóth: Indecomposable coverings. In *Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory*. 2007, Springer, 135–148. p.
- [82] János Pach – Micha Sharir: On vertical visibility in arrangements of segments and the queue size in the Bentley-Ottmann line sweeping algorithm. *SIAM J. Comput.*, 20. évf. (1991) 3. sz., 460–470. p.
- [83] János Pach – Andrew Suk – Miroslav Tremel: Tangencies between families of disjoint regions in the plane. *Comput. Geom.*, 45. évf. (2012) 3. sz., 131–138. p.
- [84] János Pach – Dömötör Pálvölgyi: Unsplittable coverings in the plane. *Advances in Mathematics*, 302. évf. (2016), 433–457. p. ISSN 0001-8708.
- [85] János Pach – Micha Sharir: *Sylvester-Gallai problem: The beginnings of combinatorial geometry*. 2008. 12, 1–12. p. ISBN 9780821846919.
- [86] János Pach – Gábor Tardos: Forbidden paths and cycles in ordered graphs and matrices. *Isr. J. Math.*, 155. évf. (2006), 359–380. p.
- [87] János Pach – Gábor Tardos: Coloring axis-parallel rectangles. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 117. évf. (2010) 6. sz., 776–782. p. ISSN 0097-3165.
- [88] János Pach – Géza Tóth: Decomposition of multiple coverings into many parts. *Computational Geometry*, 42. évf. (2009) 2. sz., 127–133. p. ISSN 0925-7721.
- [89] Dömötör Pálvölgyi: Indecomposable coverings with concave polygons. *Discrete & Computational Geometry*, 44. évf. (2010. Oct) 3. sz., 577–588. p. ISSN 1432-0444.
- [90] Dömötör Pálvölgyi – Géza Tóth: Convex polygons are cover-decomposable. *Discrete & Computational Geometry*, 43. évf. (2010. Apr) 3. sz., 483–496. p. ISSN 1432-0444.
- [91] Arkadiusz Pawlik – Jakub Kozik – Tomasz Krawczyk – Michał Lasoń – Piotr Micek – William T. Trotter – Bartosz Walczak: Triangle-free intersection graphs of line segments with large chromatic number. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 105. évf. (2014), 6–10. p. ISSN 0095-8956.
- [92] Rom Pinchasi – Radoš Radoičić: Topological graphs with no self-intersecting cycle of length 4. In *Proceedings of the Nineteenth Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '03 konferenciasorozat. New York, NY, USA, 2003, Association for Computing Machinery, 98–103. p. ISBN 1581136633. 6 p.
- [93] Dömötör Pálvölgyi: Note on polychromatic coloring of hereditary hypergraph families, 2023.
- [94] Rajiv Raman – Saurabh Ray: Constructing planar support for non-piercing regions. *Discrete & Computational Geometry*, 64. évf. (2020. Oct) 3. sz., 1098–1122. p. ISSN 1432-0444.
- [95] R. Bruce Richter – Carsten Thomassen: Intersections of curve systems and the crossing number of $C_5 \times C_5$. *Discrete Comput. Geom.*, 13. évf. (1995) 2. sz., 149–159. p.
- [96] Alexandre Rok – Bartosz Walczak: Outerstring graphs are χ -bounded. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 33. évf. (2019) 4. sz., 2181–2199. p.
- [97] Gelasio Salazar: On the intersections of systems of curves. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 75. évf. (1999) 1. sz., 56–60. p. ISSN 0095-8956.

- [98] Alex Scott – Paul Seymour: A survey of χ -boundedness. *Journal of Graph Theory*, 95. évf. (2020) 3. sz., 473–504. p.
- [99] Kim Seog-Jin – Alexandr Kostochka – Kittikorn Nakprasit: On the Chromatic Number of Intersection Graphs of Convex Sets in the Plane. *Electron. J. Comb.*, 11. évf. (2004) 1. sz., R52. p.
- [100] Shakhar Smorodinsky: On the chromatic number of geometric hypergraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 21. évf. (2007) 3. sz., 676–687. p.
- [101] Shakhar Smorodinsky: Conflict-free coloring and its applications. In *Geometry–Intuitive, Discrete, and Convex*. 2013, Springer, 331–389. p.
- [102] Shakhar Smorodinsky – Yelena Yuditsky: Polychromatic coloring for half-planes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 119. évf. (2012) 1. sz., 146–154. p. ISSN 0097-3165.
- [103] Joel Spencer – Endre Szemerédi – William T. Trotter: *Unit distances in the Euclidean plane*. United Kingdom, 1984, Academic Press, 294–304. p.
- [104] László A. Székely: Crossing Numbers and Hard Erdős Problems in Discrete Geometry. *Comb. Probab. Comput.*, 6. évf. (1997) 3. sz., 353–358. p.
- [105] Endre Szemerédi – William T. Trotter: Extremal problems in discrete geometry. *Combinatorica*, 3. évf. (1983. Sep) 3. sz., 381–392. p. ISSN 1439-6912.
- [106] Gábor Tardos – Géza Tóth: Multiple coverings of the plane with triangles. *Discret. Comput. Geom.*, 38. évf. (2007) 2. sz., 443–450. p.
- [107] Péter Ágoston – Gábor Damásdi – Balázs Keszegh – Dömötör Pálvölgyi: Orientation of good covers, 2022.