

Bírálat Keszegh Balázs
Geometriai hipergráfok és érintőgráfok
című akadémiai doktori értekezéséről

Geometriai problémák vizsgálata során nagyon gyakran a központi probléma, hogy megértsük a kérdésben szereplő objektumok metszési/illeszkedési tulajdonságait. A kérdéskör egyik első mérföldköve Koebe egy komplex függvénytan által motivált érme-gráfok vizsgálatát tárgyaló 1936-os cikke. Egy másik mérföldköv Davenport—Schinzel egy differenciálegyenletek vizsgálata során felmerült kombinatorika problémát tárgyaló 1965-ös cikke. Ezek a cikkek és továbbiak vezettek el többek között reprezentációs tételekhez és a Szemerédi—Trotter síkgeometriai pont/egyenes illeszkedéseket becslő tételéhez. A doktori mű ezen eredmények által elindított kutatások jelenlegi „állapotát” gazdagítják.

Összefoglalva, a disszertáció témája egy nemzetközileg is sokak által vizsgált, fontos területet, amely gyökerei klasszikusak, de egyben nagyon friss, izgalmas kérdéseket is tartalmaz.

A disszertáció egy bevezető fejezet után rendszerezi, összefoglalja az eredményeket, tisztázza a disszertáció háttérét. A disszertáció központi fogalma geometriai halmazok két rendszerének metszési páros gráfja. A páros gráf két osztályát csúcsoknak, illetve éleknek tekintve egy hipergráfot kapunk. A hipergráfosztály persze függ a geometriai háttértől. A természetes kérdések azaz a természetes geometria kérdések mögött „megbújó” halmazrendszerosztályok egy bonyolult kapcsolatrendszerrel rendelkeznek. Ebben eligazodni is nehéz. A második fejezet diagramjai nagyban segítik az olvasót. Egyben mutatják, hogy az opponens is milyen „nehéz fába vágja a fejszét”. Megjegyzem, hogy a tézisfüzet — amely szerepe egy tömör összefoglalása az elért eredményeknek — 32 oldalas.

A bevezetett halmazrendszerek kombinatorikus paraméterei (például a kromatikus szám, V - C -dimenzió, a halmazrendszerhez tartozó Delaunay-gráf élszáma) fontos forrásai a doktori műnek. Ezek becslései alkotják a disszertáció legnagyobb részét.

A további kilenc fejezet tartalmazza a szerző elért eredményeit. 140 hivatkozás zárja a dolgozatot. A továbbiakban a fejezeteket részletezem és a teljesség igénye nélkül (véleményem szerint az opponensi vélemény tartalmát leíró része ne legyen hosszabb 3 oldalnál) említek eredményeket.

Az első eredményeket tartalmazó fejezet olyan hipergráfokról szól, amelyek Delaunay-gráfja lineáris méretű. Azaz olyan hipergráfokkal foglalkozik ahol a 2 nagyságú élek száma „kicsi”. Ezekben az esetekben ad becsléseket a halmazrendszer kombinatorikus paramétereire. Egy jellemző eredmény:

3.1. Tétel (i): Legyen $\mathcal{H} = (V, E)$ egy n csúcsú hipergráf. Tegyük fel, hogy vannak olyan $c, c' \geq 0$ konstansok, hogy minden $V' \subseteq V$ csúchalmaz esetén a V' által feszített részhipergráfnak legfeljebb $c|V'| - c'$ éle van. Ekkor $\chi(\mathcal{H})$ legfeljebb $2c + 1$.

Megjegyezzük, hogy a becslések hatékony véletlen approximációs algoritmusokhoz vezetnek a megfelelő hipergráfra vonatkozó minimális súlyú lefoglaló halmaz problémára. Ez az eredmény korábbi algoritmikus eredményeket ötvöz kombinatorikus becsléseivel. A kapott algoritmus természetesen egyszerű geometriai környezet-

ben is futtatható és tisztán geometriai inputra számol ki egy természetes geometriai paraméter esetén egy közelítő értékét.

A következő három fejezet különböző geometria halmazcsaládok metszethipergráfjairól szól. Mint írtam a felvethető kérdések nagyon változatosak. A disszertáció jól mutatja Keszegh Balázs erejét, ahogy a kérdéseket rendszerezi rátaál a természetes „támadási pontokra” és ezekben ér el jelentős előrelépéseket.

Egy példa az itt található eredmények közül: 2.12. Tétel: Egy pszeudo-körlap család egy másik pszeudo-körlap családra vonatkozó metszethipergráfja kromatikus száma legfeljebb 4.

Ez számos korábbi eredmény közös általánosítása.

A 2.22. Tétel ezt az eredményt kiterjeszti az úgy nevezett lineáris unió-bonyolultságú alakzatok családjának egy pszeudo-körlap családra vonatkozó metszethipergráfjának konstans sok színnel való jó színezésére.

A színezések geometria környezetben természetesen merülnek fel. A 4-szín-tétel is a gráflerajzolások/geometria/topológia és a gráf színezések kapcsolódását mutatja. Ha a színezést mint hipergráf alaphalmazának független halmazokra való particionálásának gondoljuk, akkor a geometria jelentőség jobban megmutatkozik.

Végül egy másik gráfparaméterre vonatkozó becslést említünk ebből a témakörből: A 2.25. Tétel felső korlátot ad a t méretű hiperélek számára egy egyenes családnak egy pszeudo-körlap családra vonatkozó metszethipergráfjában.

Majd két fejezet következik ABA- és ABAB-mentes hipergráfokról szól. Akik ismerik a Davenport-Schinzel-sorozatokat azok nem lepődnek meg a definíción: Egy rendezett csúcshalmazon a $\mathcal{H}$ hipergráf ABA-mentes, ha $\mathcal{H}$ nem tartalmaz olyan A és B hiperéleket, melyekre van három x, y, z sorrendet követő csúcs, amely rendre csak az A , csak a B és csak az A élben szerepel ezen két él közül. A fogalom kiterjeszthető arra az esetre is, ha az alaphalmaz nem rendezett és az ABAB-mentesség is könnyen formalizálható.

Ahogy a Davenport-Schinzel-sorozatoknál a fogalom mögött geometria áll: sok példa adható geometriai metszetgráfokra, amelyek rendelkeznek valamelyikkel a fenti tulajdonságok közül. Így egy kombinatorikus eredmény több geometriai következménnyel bír. A kombinatorikus vizsgálatok többsége a kromatikus szám becslése.

Csak karakterisztikus eredményeket idézek: 2.32 és 2.33. Tétel: Minden $m \geq 2$ esetén létezik egy ABAB-mentes m -uniform hipergráf, amely nem jól 2-színezhető. Továbbá minden ABAB-mentes hipergráf jól 3-színezhető.

A geometriai következmények érdekesek. Természetesen az egyes esetekben a kombinatorikus eredmény formális alkalmazásának határai vannak. Ekkor Keszegh Balázs továbbmegy és nem-ABA-mentes geometriai hipergráfok esetében is vizsgálja a kérdést. A geometriai lényeg jobb megértésével kiterjeszti az eredményeket olyan geometriai környezetekre, ahol a kombinatorikus tulajdonság nem teljesül.

A disszertáció utolsó három fejezetben becsléseket láthatunk különböző görbecsaládok esetén az érintő görbepárok maximális számára (két görbét érinti egymást egy pontban, ha mindkettő áthalad a ponton és ebben a metszéspontban nem keresztezik egymást). A probléma természetesen két görbecsaládra is kiterjeszthető a „kereszt-érintkezések” vizsgálatára. A doktori mű ezen része három cikken alapul, amelyek Eyal Ackerman-nal és Pálvölgyi Dömötör-rel közös munkák.

A kérdések publikált sejtéseken alapulnak. Különböző görbecsaládok merülnek fel. A teljes háttér egy táblázat foglalja össze, amely 10 becslést tartalmaz és ezek közül csak kettő triviális. A maradék nyolc eredmény többségét Keszegh Balázs

publikálta (társszerzőkkel) és a disszertációban szerepel. Az eredményekre két jellegzetes példát adunk.

2.39. Tétel: Legyen $\mathcal{C}$ egy olyan, n x -monoton görbéből álló család, melyre $\mathcal{C}$ -nek nincs három görbéje mely egy pontban metszi egymást, és $\mathcal{C}$ minden görbepárja pontosan egy pontban metszi egymást, amely vagy keresztező pont vagy érintő pont. Ekkor $\mathcal{C}$ görbéi közötti érintések száma legfeljebb $1160n$.

A konstans már sejteti, hogy a bizonyítás technikai. Valóban egy hosszú, összetett, bravúros analízisről van szó.

2.42. Tétel: Adott egy n piros és kék görbéből álló, 1-metsző család, úgy, hogy két azonos színű görbe nem metszi egymást, ekkor a görbék közötti érintések száma $\mathcal{O}(n)$.

Keszegh Balázsék észreveszik, hogy Pach egy korábbi x -monoton görbékre vonatkozó konstrukciója egy $\Omega(n \log n)$ darab érintéssel rendelkező 2-metsző családot alkot. A fenti tétel természetes kérdést válaszol meg. Az érintések száma lényegesen változik.

Megjegyezzük, hogy a tézisekben rengeteg eredmény, sejtés, motiváló tétel szerepel. Hogy az olvasó lássa pontosan mely eredmények részei a disszertációnak (a disszertáció tézisei) egy kis „kutatómunkát” igényel. Ezeket a téziseket elfogadom Keszegh Balázs munkájának.

Összefoglalva: A geometriai halmazrendszerek elmélete egy összetett kérdéskör sok bizonyítási technikával. Keszegh Balázs ezen módszerek jó ismerője, sőt néhány esetben a kidolgozója. A disszertáció mellett a Pálvölgyi Dömötörrel együtt gondozott honlap (Geometric hypergraph zoo) is jól mutatja, hogy Keszegh Balázs nemcsak egy-egy probléma megoldásával cikkeket publikál, hanem az egész témakört mélyen átlátja, a felmerült kérdéseket rendszerezi, ezzel segítve kutatótársait. Hivatkozásai jól mutatják, hogy munkája nemzetközileg is elismert.

A munkák nagy része társszerzős. De ezeket Keszegh Balázs nem nem egyetlen csoport tagjaként érte el. Több elismert kutatóval dogozott együtt. Emellett egy szerzős cikkei is vannak. Számomra világos, hogy Keszegh Balázs személyes hozzájárulása a témakör fejlődéséhez jelentős és központi.

A disszertáció gondos munka, esztétikailag is szép. A geometriai gondolatok megértésében jól megtervezett ábrák segítik az olvasót. A doktori mű olvasása során csupán néhány — a megértést nem akadályozó — elírást találtam.

Az eredmények közül jó néhány a témakör legjelentősebb folyóirataiban lett publikálva, a vizsgált kérdéskörök elméletéhez jelentős hozzájárulásokat jelentenek.

A fentiek alapján javaslom a nyilvános vita kitűzését és melegen javaslom az Akadémiai doktori cím odaítélését.

Szeged, 2025. november 10.

Hajnal Péter
opponens
SZTE, Bolyai Intézet