

OPPONENSI VÉLEMÉNY KESZEGH BALÁZS
GEOMETRIAI HIPERGRÁFOK ÉS ÉRINTŐGRÁFOK
CÍMŰ MTA DOKTORI DISSZERTÁCIÓJÁRÓL

A disszertáció angol nyelven írott 112 oldal terjedelmű, szép kiállítású, gondos munka. Az értekezés a szerző nyolc publikációjában foglalt eredményeken alapszik, amelyek közül két publikáció egyszerezős, további hat pedig társszerzős, egy vagy maximum két társszerzővel. A felhasznált cikkek magas színvonalú nemzetközi matematika folyóiratokban jelentek meg, köztük a terület olyan vezető periodikáiban, mint a *Combinatorica*, *Discrete and Computational Geometry*, *European Journal of Combinatorics*, stb. A nyolc publikáció közül a legrégebbi 2019-ből, a legfrissebb 2024-ből származik. A fentiekén kívül a disszertációban a szerző számos más, a témával kapcsolatos cikke is fel van sorolva.

A dolgozat 1. fejezete általános bevezetés, amelyet a 2. fejezetben egy részletes összefoglaló követ az eredményekről. A fő tételek és a megértésükhöz szükséges legfontosabb fogalmak, illetve a problémák története mind a 2. fejezetben vannak leírva. A többi fejezet tartalmazza a bizonyításokat, további definíciókat és állításokat.

A dolgozat a geometriai objektumok metszési és érintési viszonyainak kombinatorikai vizsgálatával foglalkozik. Ez a témakör a kezdetek óta központi fontosságú a kombinatorikus geometriában. Olyan alapvető eredmények, mint pl. a Sylvester–Gallai-tétel, az Erdős–de Bruijn-tétel és a Szemerédi–Trotter-tétel az egyetemi alap tananyag részét képezik. Az értekezés egyik központi fogalma a geometriai hipergráf vagy metszethipergráf, amely két alakzathalmaz metszéseinek szerkezetét írja le, illetve az érintőgráf, amelyben két alakzatot reprezentáló csúcs akkor van éllel összekötve, ha a megfelelő alakzatok érintik egymást. Legyen $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ két alakzatcsalád. Ekkor az $\mathcal{A}$ család $\mathcal{B}$ -re vonatkozó $\mathcal{I}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ metszethipergráfja az a hipergráf, amelynek csúcsai megfelelnek $\mathcal{A}$ elemeinek, és a csúcsok egy H , legalább kételemű részhalmaza akkor hiperél, ha a $\mathcal{B}$ családnak létezik olyan eleme, ami pontosan H elemeinek megfelelő $\mathcal{A}$ -beli elemeket tartalmazza. Amennyiben több ilyen $\mathcal{B}$ -beli elem van, akkor is csak egyszer tekintjük a megfelelő hiperélt. Egy $\mathcal{H}$ hipergráf Delunay-gráfja az a gráf, aminek csúcshalmaza megegyezik $\mathcal{H}$ csúcshalmazával és élei $\mathcal{H}$ kételemű hiperélei. A legsűrűbben előforduló esetekben a csúcsok pontoknak, a hiperélek pedig alakzatoknak felelnek meg (primál probléma), vagy fordítva (duál probléma), amikor is a metszési reláció valójában a tartalmazásnak felel meg. Az az eset, amikor a pontok a hipergráf csúcsai és az alakzatok felelnek meg a hiperéleknek, talán a legtermészetesebb változat. A konkrét problémák többségében a $\mathcal{B}$ alakzatcsalád tagjai olyan geometriai objektumok, mint pl. félsíkok, tengelypárhuzamos téglalapok, körök, pseudo-körök, stb. Az így módon definiált hipergráfok esetén felmerülő számos kérdés közül az extrémális problémák mellett a színezési kérdések a legérdekesebbek. Egy hipergráf jó k -színezése a csúcsok olyan színezése k színnel, hogy minden él legalább két különböző színű csúcsot tartalmaz. A legkisebb olyan számot, amivel létezik ilyen jó színezés, a hipergráf kromatikus számának nevezzük. Továbbá egy k színnel való színezés polikromatikus k -színezés, ha minden hiperél tartalmaz k páronként különböző színű csúcsot. A k színnel való jó színezések és polikromatikus színezések nehézsége egymáshoz képest fordítottan viselkedik: minél több színt használunk, annál könnyebb jól színezni, és annál nehezebb polikromatikusan színezni. A polikromatikus k -színezések esetén nyilván egy k -nál kisebb hiperél nem lehet kiszínezni, ezért ezeket figyelmen kívül szokás hagyni. Ezek alapján az ún. primál geometriai hipergráf polikromatikus színezési probléma a következő: Tegyük

fel, hogy adva van egy k természetes szám, egy ponthalmaz és alakzatok egy családja $\mathbb{R}^d$ -ben. Célunk a pontok olyan k színnel színezése, hogy minden alakzat, amely legalább $m(k)$ pontot tartalmaz, tartalmazzon minden színű pontból legalább egyet. Az $m(k)$ mennyiséget a fenti feltételek mellett minimalizálni szeretnénk. Ha adott m és egy $\mathcal{H}$ hipergráf, akkor legyen $\mathcal{H}_m$ az a hipergráf, aminek csúcshalmaza megegyezik $\mathcal{H}$ -ével, de csak a legalább m elemű hiperéleket tartalmazza $\mathcal{H}$ -ból. Ha $\mathcal{F}$ hipergráfok egy családja, akkor az $\mathcal{F}_m$ jelöli a $\mathcal{H} \in \mathcal{F}$ elemekből képzett $\mathcal{H}_m$ -ek által alkotott családot. Legyen $\chi_m(\mathcal{F})$ az a legkisebb k szám, amihez létezik olyan m , hogy minden $\mathcal{F}_m \in \mathcal{F}$ jól k -színezhető. Ha $\chi_m(\mathcal{F}) = 2$, akkor legyen m_k az a legkisebb m szám, hogy minden $\mathcal{F}_m \in \mathcal{F}$ -nek létezik polikromatikus k -színezése. Ha ilyen véges m nem létezik, akkor $m_k = \infty$.

A $\chi_m(\mathcal{F})$ és m_k mennyiségek vizsgálatának geometriai motivációja a többszörös fedések elméletéből, az ún. fedési-szétszedési problémákból származik. Ez a duális polikromatikus probléma nyelvén a következő: Ha adott egy m -szeres fedés (pl. a síkban) valamilyen geometriai objektumokkal, (pl. körök), akkor felmerül a kérdés, hogy fel tudjuk-e ezt osztani k fedésre, azaz ki tudjuk-e színezni a fedő objektumokat k színnel úgy, hogy a sík minden pontja mindenféle színű alakzathoz hozzátartozzon. Eleinte a fő kérdés az volt, hogy milyen feltételekkel lehet garantálni, hogy $\chi_m(\mathcal{F}) = 2$. Később az ún. konfliktusmentes színezések is fókuszba kerültek, ugyanis ezek szoros kapcsolatban állnak a fedési-szétszedési problémában előforduló színezéssel. Egy hipergráf színezése konfliktusmentes, ha minden hiperélhez van olyan színosztály, hogy abból a színosztályból az él pontosan egy pontot tartalmaz. Az értekezés egyik fő területe a metszethipergráfok színezési tulajdonságaival kapcsolatos eredmények.

A 3. fejezet olyan hipergráfokkal foglalkozik, amelyek Delaunay-gráfja lineáris méretű. A Delaunay-gráf élszámára vonatkozó felső korlátot implikál a legfeljebb k méretű hiperélek számára, a hipergráf kromatikus számára és VC-dimenziójára is. Ezeket az eredményeket a 3.1. tétel tartalmazza.

A dolgozat 4.–6. fejezeteiben a szerző pseudo-körlapok családjait vizsgálja. Jordantartományok egy családját pseudo-körlap családnak nevezzük, ha bármely két elem határai legfeljebb két pontban metszik egymást. Ezek a körlapok természetes általánosításai, és a körlapokra vonatkozó legtöbb topológiai és kombinatorikai tulajdonságot megőrzik. Fontosságuk abban is rejlik, hogy pl. egy tetszőleges rögzített konvex lemez homotetikusaiból álló család is ilyen. Ismert, hogy pontok körlapokra vonatkozó Delaunay-gráfja síkgráf, tehát jól 4-színezhető. Smorodinsky (2007) egyszerű észrevétele alapján ez az színezés a metszethipergráfra is kiterjeszthető.

A 4. fejezet fő eredménye a 2.12. tétel, amely kimondja, hogy pseudo-körlapok pseudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfja mindig jól 4-színezhető. Smorodinsky (2007) eljárást adott arra, hogy hogyan lehet egy n csúcsú hipergráf részhipergráfjainak jó színezését felhasználva a hipergráf egy konfliktusmentes színezését megadni $O(\log n)$ színnel. Even és társai (2003) egy korábbi eljárást kihasználva megmutatták, hogy egy n elemű síkbeli ponthalmaz körökre vonatkozó metszethipergráfja $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető. Az, hogy ez érvényes körök helyett pseudo-körlapok családjára is, ismert volt folklórként. A körlapokra vonatkozó állítás duális formáját igazolták Even és társai (2003), majd Smorodinsky (2007) általánosította pseudo-körlapok családjára. Cardinal és Korman (2013) megmutatta, hogy egy rögzített konvex lemez véges sok homotetikus példányából álló családnak a sík összes pontjára vonatkozó metszethipergráfja szintén jól 4-színezhető. Keller és Smorodinsky (2019) igazolták, hogy n körlap családjának a sík összes körlapjára vonatkozó metszethipergráfja jól 6-színezhető és $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető. A 2.12. tétel általánosítja Keller és Smorodinsky eredményét,

és egyben az összes fenti eredményt, illetve megjavítja annak felső korlátját is 6-ról 4-re, ami optimális. A bizonyítás részeként azt is igazolja a szerző, hogy pseudo-körlap család pseudo-körlap családra vonatkozó metszethipergráfjának Delauny gráfja síkgráf. A 2.12. tételnek az is következménye, hogy a megfelelő metszethipergráf $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető (2.13. következmény), illetve, hogy egy rögzített konvex lemez homotetikusainak családja egy másik konvex lemez homotetikusainak családjára nézve jól 4-színezhető (2.14. következmény). A fentiek mellett a szerző megmutatja, hogy egy pseudo-körlapokból álló család egy véges elemszámú pseudo-körlap-családra vonatkozó metszethipergráfjának VC-dimenziója legfeljebb 4 és a becslés éles (2.15. tétel), illetve, hogy amennyiben a véges családnak n eleme van, akkor akkor a legfeljebb t méretű hiperélek száma $O(t^3n)$ (2.16. tétel).

Az értekezés 5. fejezetében a szerző lineáris unió-bonyolultságú családok pseudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfját vizsgálja. Tekintsünk a síkban egy véges sok olyan Jordan-tartományból álló $\mathcal{B}$ családot, amiben bármely két elem véges sokszor metszi egymást. A $\mathcal{B}$ elrendezés csúcsai a tartományok határának metszéspontjai, élei a az egyes tartományok határának maximális metszéspontmentes darabjai, lapjai pedig azok a maximálisan összefüggő részek, amik nem tartalmaznak csúcsokat és éleket. A $\mathcal{B}$ elrendezés $\mathcal{U}(\mathcal{B})$ unió-bonyolultsága a $\mathcal{B}$ azon éleinek száma, amik a $\mathcal{B}$ elemei uniójának határán vannak. Amennyiben létezik olyan c szám, hogy $\mathcal{B}$ tetszőleges $\mathcal{B}'$ részcsaládja esetén $\mathcal{U}(\mathcal{B}') = c|\mathcal{B}'|$, akkor $\mathcal{B}$ (c)-lineáris unió-bonyolultságú. Kedem és társai (1986) megmutatták, hogy pseudo-körlapok tetszőleges véges családja lineáris unió-bonyolultságú. Smorodinsky (2013) igazolta, hogy a sík pontjainak egy n elemből álló véges unió-bonyolultságú Jordan-tartományokból álló családjára vonatkozó metszethipergráfja konstans sok színnel jól színezhető, és $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető. A fejezet fő eredménye a 2.22. tétel, amelyben a szerző igazolja, hogy ha adott egy $\mathcal{F}$ pseudo-körlapokból álló család és egy véges $\mathcal{B}$ lineáris unió-bonyolultságú Jordan-tartomány család, akkor $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ konstans sok színnel jól színezhető. Kedem és társai (1986) tételét kihasználva adódik, hogy 2.22. tétel feltételei mellett $\mathcal{I}(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ $O(\log n)$ színnel konfliktusmentesen színezhető (2.23. következmény), és hogy a metszethipergráf VC-dimenziója korlátos, illetve a legfeljebb t méretű hiperélek száma $O(t^{d-1}n)$.

A 6. fejezet egyenesek pseudo-körlapokra vonatkozó metszethipergráfjainak méretével foglalkozik. Színezésekkel nem, mert ismert, hogy χ_m végtelen erre az osztályra (Pach, Tardos, Tóth (2007)). Ebben a fejezetben $\mathcal{L}$ egyenesek, $\mathcal{F}$ pedig olyan pseudo-körlapok családjait jelöli, amelyek (kölcönösen) általános helyteben vannak, azaz a sík minden pontjára legfeljebb két alakzat illeszkedik $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ -ből. A szerző megmutatja, hogy ha $|\mathcal{L}| = n$, akkor $\mathcal{I}(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ pontosan t csúcsú hiperéleinek száma $O(tn^2)$ (2.25. tétel), illetve hogy az összes hiperél számára teljesül $O(n^3)$ (2.26. tétel). Azt is megjegyzi, hogy t -től való függés nem biztos, hogy optimális, viszont az összes hiperél számára vonatkozó korlát éles.

A 7. és 8. fejezetben a szerző a félsíkok általánosításaival, a pseudo-félsíkokkal foglalkozik, és az ide vonatkozó ismert primál és duál eredményeket általánosítja pseudo-félsíkokra. Pontok félsíkokra, illetve ennek megfordítását, azaz félsíkok pontokra vonatkozó metszethipergráfjait a szerző (2007, 2012), Fulek (2011), illetve Smorodinsky és Yuditsky (2012) vizsgálták. Pseudo-egyenes családon olyan mindkét irányban végtelen görbék egy családját értjük, amelyben bármely két elem legfeljebb egyszer metszi egymást; ezek az egyenesek olyan természetes általánosításai, amelyek megőrzik azok metszési tulajdonságait. Pseudo-egyenes családon pedig olyan síkbeli tartományok egy családját értjük, amelyek határai pseudo-egyenes családot alkotnak. Ehhez a szerző definiál absztrakt

hipergráf osztályokat, az ún. ABA-mentes hipergráfokat és ennek segítségével a pszeudo-félsík hipergráfokat, és megmutatja, hogy ezek megegyeznek a pontok pszeudo-félsíkokra vonatkozó metszethipergráfjainak családjával. Így elegendő ezekre az absztrakt hipergráfokkal foglalkozni.

A 7. fejezet 2.28. tétele szerint egy ABA-mentes hipergráf csúcsait k színnel ki lehet színezni úgy, hogy minden legalább $2k - 1$ nagyságú hiperél tartalmazza az összes színt. Érdekes módon ugyanez az állítás igaz a pszeudo-félsík hipergráfokra is (2.29. tétel). Mindkét tétel éles, illetve ezekből következik ugyanez pontok nemkorlátos konvex halma-zokra vonatkozó metszethipergráfjaira is. A 2.30. tétel tartalmazza a duális problémára vonatkozó eredményt.

A 8. fejezetben a szerző az ABA-mentes hipergráfok természetes általánosításait, az ABAB-mentes hipergráfokat tekinti. Az ABA-mentes hipergráfok definícióban szereplő váltakozások száma kiterjeszthető, a Davenport-Schnitzel-sorozatokhoz hasonlóan. Viszont kiderül, hogy az így kapott hipergráfok nem mindig jól 2-színezhetők. A 2.32. tétel szerint minden $m \geq 2$ esetén létezik olyan ABAB-mentes m -uniform hipergráf, ami nem jól 2-színezhető. Viszont mindig jól 3-színezhetők (2.33. tétel). Azt is igazolja a szerző (2.34. tétel), hogy egy hipergráf éppen akkor ABAB-mentes, ha pontok olyan pszeudo-körlap családra vonatkozó metszethipergráfja, amiben a pszeudo-körlapoknak van közös pontja (leszárt pszeudo-körlap családok). A 2.35. és 2.36. tétel véges ponthalmazok leszárt pszeudo-körlapcsaládokra vonatkozó színezési tulajdonságairól szól.

Alakzatcsaládok metszési- és incidenciastruktúrájának leírására további érdekes és fontos gráfosztályok definiálhatók. A szerző ezek közül az érintőgráfokat vizsgálja. Ha adott alakzatok egy családja, akkor képezzük belőle a következő gráfot: a gráf csúcsai feleljenek meg az alakzatoknak, és két alakzat pontosan akkor legyen éllel összekötve, ha a nekik megfelelő alakzatok érintik egymást. Érintőgráfok számos, egymástól látszólag távol álló problémában felbukkannak, pl. síkgráfok páronként nemátfedő körlapok érintőgráfjaként való reprezentálhatósága (Koebe–Andreev–Thurston-tétel) vagy az Erdős-féle egységtávolság probléma. A korábban definiált Delaunay-gráfok természetes kapcsolatot teremtenek a metszethipergráfok és érintőgráfok között.

A szerző érintőgráfokkal kapcsolatos eredményei az értekezés 9., 10. és 11. fejezetében találhatók. Ezekben a fejezetekben görbék családjában az érintő görbepárok maximális számát vizsgálja a szerző. Görbe alatt egyszerű Jordan-ívet értünk. Feltesszük továbbá, hogy a sík bármely pontjára legfeljebb két görbe illeszkedik, illetve a görbecsaládban bármelyik két görbe legfeljebb véges sok pontban metszi egymást. Az érintések száma az érintő görbepárok számát jelenti. A vizsgálatok fő célja, hogy egyes alakzatcsaládok érintőgráfjai éleinek számára felső korlátot adjon a csúcsok számának függvényében.

A 9. fejezet páronként metsző görbék közötti érintésekkel foglalkozik. Pach sejtése szerint egy olyan n görbéből álló családban, ahol bármely két görbe pontosan egy pontban metszi egymást (keresztvezően vagy érintően), a görbék közötti érintések száma $O(n)$. A sejtést Györgyi, Hujter és Kisfaludi-Bak (2018) igazolta egy speciális esetben, a görbék végpontjaira vonatkozó feltétel mellett. A szerző bebizonyítja (2.39. tétel) Pach sejtését x -monoton görbékre (a görbén nincs két olyan pont, aminek x -koordinátája megegyezik) és megmutatja, hogy ebben az esetben az érintések száma legfeljebb $1160n$.

A 9. fejezet további eredménye 2.40. tétel (valójában előbb van bizonyítva, mint a 2.39. tétel), mely szerint tetszőleges n olyan görbéből álló görbecsaládban, amelyben bármely két görbe legfeljebb t pontban metszi egymást, legfeljebb $O(n^{2-\frac{1}{t+3}})$ érintés lehet, ezzel megjavítja Bechler-Speier (2019) korábbi becslését. Következik az is, hogy $t = 1$ esetén legfeljebb $O(n^{7/4})$, $t = 2$ esetén pedig legfeljebb $O(n^{9/4})$ az érintések száma.

A 10. és 11. fejezetben a szerző két görbecsalád (kék és piros) közötti érintések számát vizsgálja. A 10. fejezetben a két görbecsaládról fel van téve, hogy két azonos színű görbe nem metszi egymást, különböző színű párok pedig legfeljebb egyszer metszik egymást. A 2.42. tétel szerint ekkor az érintések száma $O(n)$.

A 11. fejezetben a 10.-hez hasonló problémákat tekint a szerző, de az 1-metsző feltétel nélkül. A 2.41. tétel szerint ha adott egy n piros és kék x -monoton görbéből álló család a fenti feltételekkel, akkor az érintések száma $O(n \log n)$, ami megegyezik a Pach, Suk és Trembl (2012) által adott alsó korláttal. A 2.43. tétel szerint létezik olyan n piros és kék görbéből álló család, amelyben két azonos színű görbe nem metszi egymást és az érintések száma $\Omega(n^{4/3})$. Ezzel jelentősen megjavítja az általános estre korábban ismert $\Omega(n \log n)$ -es alsó korlátot. Ezen felül vizsgálja még a felső korlátokat további geometriai feltételek mellett.

Összefoglalva, a disszertáció a modern kombinatorikus geometriai kutatások fősodrához tartozó témakörökkel foglalkozik, ezekben ér el érdekes és matematikailag jelentős eredményeket. Az értekezésben felhasznált cikkek a terület vezető folyóirataiban jelentek meg. Megítélésem szerint a dolgozat matematikai tartalma messze megfelel az elvárásoknak. Az is világosan megállapítható, hogy a szerző nagy rutinnal alkalmazza a témában szokásos módszereket. Az értekezés gondos munka, szerkezete áttekinthető, angolsága is jó, és hosszúságához képest kevés sajtóhibát tartalmaz. Tartalmilag összefüggő, jól követhető, és a terjedelme is megfelel az elvártaknak.

A fentiek alapján határozottan úgy gondolom, hogy Keszegh Balázs értekezése mind tartalmilag, mind formailag bőségesen kielégíti az MTA doktori disszertációval szemben támasztható követelményeket. A doktori műben foglalt téziseket elfogadom új tudományos eredményekként, az értekezést nyilvános vitára alkalmasnak tartom. Javaslom a nyilvános vita kitűzését és Keszegh Balázs számára az MTA doktori cím odaítélését.

Szeged, 2025. november 27.



Fodor Ferenc
MTA doktora