

Bírálat Keszegh Balázs *Geometric
Hypergraphs and Tangency Graphs* című
akadémiai doktori értekezéséről

2025. november 24.

A kombinatorikus geometria közös határterülete a kombinatorikának és a geometriának. Egyik fő kutatási iránya kezdetekől fogva geometriai objektumok illeszkedési és metszési struktúráinak vizsgálata. Legismertebb példák a Sylvester-Gallai tétel, de Bruijn-Erdős tétel, valamint a sokszor használt Szemerédi-Trotter tétel. Ez utóbbi azt mondja ki, hogy n pont és m egyenes közt a síkon az illeszkedések maximális száma $O(n^{\frac{2}{3}}m^{\frac{2}{3}} + n + m)$. Ehhez hasonló kérdések adják a disszertáció fő motivációját.

A dolgozat a szerző 8 (részben társ szerzős) cikkén alapul, melyek a szakterület elsőrangú folyóirataiban jelentek meg. A disszertáció 11 fejezetből áll, melyből az első egy rövid bevezetés, az alapvető definíciókat és a motivációt tartalmazza. Két fő struktúrát vizsgál, az egyik két geometriai alakzat halmaz metszet hipergráfja (geometriai hipergráfok), a másik pedig görbék érintő gráfja.

A második fejezet a dolgozatban bemutatott eredmények összefoglalása. Szemléletesen bemutatja az egyes geometriai hipergráf osztályok közti tartalmazási hierarchiát. Ismerteti a dolgozat eredményeinek előzményeit, valamint az egyes tételek és fogalmak kapcsolatát.

A harmadik fejezet extrémális kombinatorikai tételt tárgyal, amelynek motivációja kombinatorikus geometriai. Nevezetesen a 3.1. Tétel ha a hipergráf Delaunay gráfja élszáma lineáris függvénye a csúcsok számának, akkor a hipergráf kromatikus számára, VC-dimenziójára és a legfeljebb k méretű eleinek számára ad felső becslést. A bizonyítás véletlen módszereket használ.

A negyedik fejezetben pseudo-körlapok családjainak metszet hipergráfját vizsgálja, a fő eredmény a 2.12 Tétel, ami kimondja hogy az ilyen hipergráfok

4 színnel jól színezhetőek, amiből már a korábbi szerzők által kidolgozott módon az is következik, hogy $O(\log(n))$ színnel konfliktus mentesen is színezhető. A 2.12 Tétel közös általánosítása több korábban bizonyított tételnek, valamint a 4 szín a lehető legjobb eredmény. A fejezet Keszegh egy egyszerű cikkén alapul.

Az ötödik fejezetben Smorodinsky egy tételét általánosítja. Itt az egyik geometriai objektum család olyan Jordan-tartományokból álló család, amelyeknek a tartományok uniójának a határa lineárisan sok metszéspontot nem tartalmazó görbe darabra bomlik, azaz lineáris unió-bonyolultságú. A 2.22 Tétel kimondja, hogy ebben az esetben a metszet hipergráf konstans sok színnel jól színezhető, amiből sztenderd módon következik, hogy a hipergráf $O(\log(n))$ színnel konfliktus mentesen is színezhető, valamint az hogy a VC-dimenzió korlátos és a legfeljebb k méretű éleinek számára a felső becslés.

A hatodik fejezet egyenesek pszeudo-körlapokra vonatkozó metszet hipergráfjaival foglalkozik. Ez azért érdekes, mert az egyenesek családja nem teljesíti az előző fejezet követelményét, hogy lineáris unió-bonyolultságú lenne. Ennek megfelelően, a metszet hipergráfban a hiperélek száma a csúcsok számától négyzetesen függhet. Aronov és társai mutattak egy olyan konstrukciót, amiben a t méretű hiperélek száma $\binom{n-t+2}{2}$, az összes hiperélek száma pedig $\binom{n}{3}$. Keszegh két társszerzővel megmutatja, hogy ez n -ben nagyságrendileg optimális, 2.25 Tétel és 2.26 Állítás.

A hetedik fejezet a korábban pontok és félsíkok családjai által meghatározott metszet hipergráfokra vonatkozó eredményeket általánosítja pontok és pszeudo-félsíkok közti metszet hipergráfokra. Az általánosítás különös érdekessége, hogy megfogalmazza a hipergráf egy absztrakt tulajdonságát, és az olyan tulajdonságú hipergráfokra mond ki tételeket. Ez a tulajdonság rendezett csúcshalmazú hiperráfokra érvényes, az ABA mentesség, ami azt jelenti, hogy nincs három olyan csúcs, melyek közül az első és az utolsó a rendezés szerint az A hiperélben van, de nincs a B -ben, míg a középső az B -ben van de nincs az A -ban. A 2.28 Tétel az ABA-mentes hipergráfok polikromatikus színezhetőségét mondja ki. Az ABA-mentes hipergráfok incidencia mátrixát karakterizálják, amely karakterizációból azonnal következik, hogy egy ABA-mentes hipergráf duálisa is ABA-mentes. Érdekes összefüggés, hogy az ABA-mentes hipergráfoknak van geometriai karakterizációja is, nevezetesen pontok felfelé néző pszeudoüfélsíkokra vonatkozó metszet hipergráfja. így a pszeudo-félsík hipergráfok az ABA-mentesek azok éleinek komplementereiből álló élhalmaz részhalmazai lesznek. A 2.29 Tétel az absztrakt hipergráfokra

mond ki eredményt, ami a geometriai hipergráfra is érvényes ezzel a megfeleltetéssel. A bizonyítások alap eszköze a 7.13 Tétel, ami a c -sekély lefogó pont-halmaz fogalmát használja. A 7.48 Tétel ABA-mentes hipergráfok, pszeudo-félsík hipergráfok, illetve duális pszeudo-félsík hipergráfok maximális kromatikus számát határozza meg. Érdekes következmény, hogy amíg ABA-mentes hipergráfok duálisa is ABA-mentes hipergráf, addig a pszeudo-félsík hipergráfok és a duális pszeudo-félsík hipergráfok osztályai különböznek. További érdekesség, hogy az ABA-mentes hipergráfoknak is van geometriai karakterizációja, amit a 7.49 Állítás mond ki.

A nyolcadik fejezet ABAB-mentes hipergráfokat vizsgál. Ez természetes kiterjesztése az ABA-mentességnek. Megmutatja, hogy az ABAB-mentes hipergráfok kromatikus száma legfeljebb 3, és minden m -re van olyan m -uniform ABAB-mentes hipergráf, ami nem jól 2-színezhető (2.32 és 2.33 Tételek). Ezenkívül megadja az ABAB-mentes hipergráfok egy geometriai karakterizációját is. Végezetül megmutatja hogy ha "még egy lépést" teszünk, azaz ABABA-mentes hipergráfokat tekintünk, akkor azok kromatikus száma már nem korlátos. Ehhez igen ötletes módon kiterjesztenek egy klasszikus ellenpélda hipergráfot, ahol a csúcsok mélységi bejárási sorrendje lesz, ami szerint a hipergráf ABABA-mentes.

A következő három fejezet érintőgráfokat tárgyal. A kilencedik fejezetben egy görbe családon belüli érintések számát becsüli felülről. Először belátja, hogy ha bármely két görbe legfeljebb t -pontban metszheti egymást, akkor az érintő gráf nem tartalmazhat $K_{t+3,c}$ teljes páros gráfot, valamely t -től függő konstansra. Ebből a klasszikus Kővári-Sós-Turán tétel szerint következik a felső becslés az érintések számára. Ezután Pach egy sejtését bizonyítja speciális esetben, azaz x -monoton görbékre. A bizonyítás elég hosszadalmas és technikai.

A tizedik fejezetben két, páronként diszjunkt görbékből álló család közti érintéseket vizsgálja, abban az esetben, ha két különböző családba tartozó görbe legfeljebb egy pontban metszi egymást. Ekkor az érintések száma lineáris függvénye a görbék számának (2.42 Tétel). A kapott eredményeket használja speciális L-alakzatok által meghatározott metszet hipergráf konfliktus-mentes színezéséhez.

A tizenegyedik fejezetben is két páronként diszjunkt görbékből álló család közti érintéseket vizsgálja, de most a különböző családokba tartozó görbék többször is metszhetik egymást. Először belátja 2.41 Tételt ami az x -monoton görbék esetében ad felső korlátot, ami Gerbner és társai egy él-rendezett gráfokra vonatkozó Turán-típusú eredményét használja. Ezután egy nagyon

ötletes konstrukciót mutat az általános esetben, ami egyenesek és pontok közti maximális illeszkedésekből ad két görbecsalád közti érintéseket. Végül belátják, hogy ha egy sejtés igaz $0 - 1$ -mátrixokra amelyek elkerülnek bizonyos részmátrixokat, akkor az ottani felső becslés igaz kétszeresen határolt görbe családokra.

A dolgozat bebizonyítja, hogy Keszegh igen nagy biztonsággal használja a geometriai eszközöket ugyanúgy, mint a kombinatorikai, hipergráfes eszközöket. Jelentősen kiterjeszti a az eddig ismert eredményeket. A disszertáció külön érdekessége az absztrakt hipergráf eredmények, például ABA-mentes hipergráfok, és geometriai eredmények összekapcsolása. Ezen kívül jelentősnek tartom a 2.12 és 2.22 Tételeket, a 4.3 Tétel bizonyítását, valamint a 11.2 tételt.

A dolgozatban nagyon kevés elírást tapasztaltam, gondosan szerkesztett jó magyarázó ábrákkal.

Egy kérdést tennék fel. A 6.3 alfejezetben a megoldatlan problémáknál említi, hogy amí beírt pszeudo-körlemezekre ahiányzik az elmélet, addig körülírt pszeudo-körlemezekre erősebb állítás is igaz. Van-e valami elképzelése arról, mi okozza ezt a különbséget?

A fentiek alapján javaslom a nyilvános vita kitűzését és melegen javaslom az Akadémiai doktori cím odaítélését

Sali Attila
opponens

HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézet