

TÉZIS FÜZET: DIOFANTIKUS EGYENLETEK ES DISZKRÉT HARMONIKUS ANALÍZIS

MAGYAR ÁKOS

A korai 70-es évektől kezdve a klasszikus harmónikus analízisben új típusú tételek születtek amelyben geometriai fogalmak, kiemelten a görbület, központi szerepet játszottak [11, 44, 47]. Ennek a fejlődésnek egyik kiindulópontja volt E. M. Stein tétele a szférikus maximális operátorok korlátosságáról az L^p függvények terében [46]. A maximális operátorok jelentősége abban is rejlik hogy segítségükkel konvergencia tételek bizonyíthatóak; ennek klasszikus példája Lebesgue tétele a mérhető halmazok sűrűségi pontjairól vagy Birkhoff pontonkénti ergodikus tétele, mindkét tétel visszavezethető a Hardy-Littlewood maximális operátor korlátosságára.

A 80-90-es években J. Bourgain alapvetőjelentőségű eredményeket ért el mind a periódikus nemlineáris parciális differenciál egyenletek elméletében [9, 10] mind a pontonkénti ergodikus elméletben [7, 5, 6], amelyekért 1994-ben a Fields díjat elnyerte. Bourgain észrevétele hogy mindkét esetben kulcsfontosságú szerepet játszanak bizonyos klasszikus operátorok diszkrét "változatai" amelyek nem az $L^p(\mathbb{R}^n)$ hanem az $l^p(\mathbb{Z}^n)$ függvények terében, azaz nem az Euklédusi térben hanem a rácspontok terében vannak definiálva. Becslésükhöz nem csak analitikus hanem számelméleti módszereket, kiemelten a Hardy-Littlewood "körmódszert", kell alkalmazni illetve tovább fejleszteni.

I. A doktori dolgozat első cikke [38] a diszkrét harmonikus analízis és ergodelmélet ennek az irányvonalához tartozik. A kindulási pont a Stein es Waingerrel elért közös eredményem [39] amelyben beláttuk a diszkrét szférikus maximális operátor korlátosságát az $l^p(\mathbb{Z}^n)$ függvényterekben. Ez a tétel azóta a diszkrét harmónikus analízis egyik alapvető eredményének számít, nem csak az állítás hanem a bizonyítás módszere miatt is. Itt egyrészt leírtuk a Fourier transzformációját a gömbfelületen lévő rácspontok halamazának és megfogalmaztunk egy általános "átviteli" elvet, amely alapján bizonyos konvolúció operátorok korlátossága a diszkrét környezetből visszavezethető a folytonos környezetbe.

A dolgozat első cikke [38] ezt az eredményt egyrészt kiterjeszti a gömbfelületről magasabb fokú homogén polinomok szintfelületeire, azaz a $Q(x) = \lambda$ egyenlet által definiált felületekre, ahol $Q(x_1, \dots, x_n)$ egy pozitív homogén polinom egész együtthatókkal. A rácspontok száma ezen a felületeken, azaz az egyenlet $Q(x) = \lambda$ egész megoldásainak ($x \in \mathbb{Z}^n$) a száma, a diophantikus egyenletek alapvető problémája. A Davenport-Birch [15, 4] "körmódszer" aszimptotikusan megadja a megoldások számát amennyiben a homogén polinom Q rangja, $\mathcal{R}_Q$, elég magas a fokához képest. Birch a polinom rangját a $V_Q = \{z \in \mathbb{C}^n : Q(z) = \lambda\}$ felület singuláris részének, a $V_Q^* = \{z \in \mathbb{C}^n : \nabla Q(z) = 0\}$ varietásnak a kodimenziójával definiálja. Amennyiben Q egy kvadratikus forma ez megegyezik a klasszikus rang fogalmával. A cikkben ugyanezek a feltételek mellett megadjuk a felületen lévő rácspontok Fourier transzformáltjának, azaz a

$$\hat{\sigma}_{Q,\lambda}(\xi) := \sum_{Q(x)=\lambda} e^{2\pi i x \cdot \xi} \quad (\xi \in \Pi^n)$$

függvénynek aszimptotikus felbontását:

$$\widehat{\sigma}_{Q,\lambda}(\xi) = c_Q \lambda^{\frac{n}{d}-1} \sum_{q=1}^{\infty} K(q, l, \lambda) \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \psi(q\xi - l) d\tilde{\sigma}_Q(\lambda^{\frac{1}{d}}(\xi - l/q)) + \mathcal{E}_\lambda(\xi).$$

Itt, $\mathcal{E}_\lambda$ egy elhanyagolható hibatag, ψ egy síma függvény amelynek tartója az az origó egy kis környezete, ennek következtében a belső összegnek legfeljebb egy nem-nulla tagja van. A $d\tilde{\sigma}_Q$ tag az $S_Q := \{Q(x) = 1\}$ felületi Gelfand-Leray mértéknek a Fourier transzformáltja, amire igaz a $|d\tilde{\sigma}_Q(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-cd} \mathcal{R}_Q$ becslés. Az első következmény hogy $\widehat{\sigma}_{Q,\lambda}(\xi)$ Fourier transzformált koncentrálna az l/q racionális pontokra. Továbbá a $K(q, l, \lambda)$ aritmetikus faktorok is csökkennek a q nevező növekedésével, amiből viszonylag könnyen levezethető a rácspontok aszimptotikus eloszlása, amint $\lambda \rightarrow \infty$, ha levetítjük őket az $x \rightarrow \lambda^{-1/d}x$ vetítéssel a $\{Q(x) = 1\}$ felületre.

A $\psi d\tilde{\sigma}_Q$ típusú tagok, folytonos analóg operátorok “nyomai” a diszkrét környezetben, ami kulcsfontosságú abban hogy a maximális operátorok Euklideszi terekben adott becsléseit át lehessen transzformálni a diszkrét esetbe. Végül, a diszkrét maximális operátorokra adott becslések vezetnek cikk fő eredményéhez; a megoldáshalmazok “képeinek” egyenletes eloszlásához, ha a megoldáshalmazokat ergodikus transzformációk segítségével beleképezzük egy véges mértékkel ellátott térbe, pontosabban a következő ergodikus tételhez.

Legyen (X, μ) egy véges mérhető tér, és legyen $T_1, \dots, T_n$ felcserélhető, mértéktartó transzformációk teljesen ergodikus családja. Ez azt jelenti hogy ha egy mérhető halmaz $A \subseteq X$ invariáns a $T_1^q, \dots, T_n^q$ transzformációkra, ahol $q \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor szükségszerűen $\mu(A) = 0$ vagy $\mu(X \setminus A) = 0$. Ekkor majdnem minden $x \in X$ pontra, az orbitok

$$\Omega_{x,\lambda} := \{T_1^{m_1} \dots T_n^{m_n} x : Q(m_1, \dots, m_n) = \lambda, m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}\} \subseteq X$$

aszimptotikusan egyenletesen oszlanak el az X térben amint $\lambda \rightarrow \infty$, feltéve hogy Q rangja elég magas a fokához képest és λ egy szükséges kongruencia feltételt kielégít. Ennek bizonyításához már szükséges a kapcsolódó maximális operátorok becslése mellett ergodikus es funkcionál analízisbeli módszerek (pl. a spektrál tétel) alkalmazása. Ilyen jellegű eredmények korábban speciális esetekben sem voltak megfogalmazva.

II.-III. A doktori dolgozat 2.-3. cikkei [41, 36] egyrészt a geometriai (vagy Euklideszi) Ramsey elmélet témakörébe tartozik, másrészt kapcsolódik a számelmélet egy a kvadrátikus formákkal kapcsolatos klasszikus problémájához.

A 70-es években Erdős at al. olyan geometrikus pont-konfigurációk tanulmányozását indították el amelyek nem “rombolhatóak le” magas dimenziójú Euklideszi terek szétDarabolásával [16, 17]. Pontosabban, legyen egy véges ponthalmaz $X \subseteq \mathbb{R}^k$ Ramsey, ha minden $r \in \mathbb{N}$ -re létezik egy dimenzió $d = d(r, X)$ amelyre a következő igaz; ha az $\mathbb{R}^d$ Euklideszi teret r -színnel színezzük akkor szükségszerűen lesz egyszínű ponthalmaz X' ami izometrikus az adott X ponthalmazzal. Észrevettek hogy ha X Ramsey akkor szükségszerűen szférikus, ez vezetett Graham sejtéséhez [23] hogy X ponthalmaz akkor és csak akkor Ramsey ha egy gömbfelületre írható. Ezt a kérdéskört főként kombinatorikus módszerekkel tanulmányozták és csak néhány speciális konfigurációról sikerült belátni a Ramsey tulajdonságot [20, 31, 32].

1987-ben Bourgain a ponthalmazok fent említett Ramsey tulajdonságának egy sűrűségi változatát fogalmazta meg és bizonyította be simplexeke Fourier analízisbeli módszerek segítségével [8]. Legyen $X = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^k$ k -pont általános helyzetben. Ha $A \subseteq \mathbb{R}^k$ egy pozitív felső sűrűségű mérhető halmaz akkor A szükségszerűen tartalmazza $\lambda \cdot X$ konfigurációnak (X λ -szoros nagyításának)

egy izometrikus képét, *minden* $\lambda \geq \lambda_0$ -ra, ahol $\lambda_0 > 0$ egy konstans, ami függhet az A halmaztól és az X konfigurációtól.

A dolgozat második cikke Bourgain tételeit viszi át a diszkrét környezetbe, az egész pontrács $\mathbb{Z}^n$ pozitív felső sűrűségű részhalmazaira. Legyen $X = \{v_0 = 0, v_1, \dots, v_{k-1}\} \subseteq \mathbb{R}^k$ egy általános helyzetű ponthalmaz és legyen $T = (t_{ij})_{i,j=1}^k$ pozitív definit mátrix, amelynek elemei: $t_{ij} = v_i \cdot v_j$ az x_i és x_j vektorok skaláris szorzata. A cikk fő eredménye a következő; Ha a T mátrix elemei egész számok akkor minden pozitív felső sűrűségű halmaz $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ ($n > 2k + 2$) tartalmaz egy $X' = \{x_1, \dots, x_k\}$ pont-konfigurációt amely izometrikus a $\sqrt{\lambda} \cdot X$ halmazzal, minden $\lambda > \lambda_0$ pozitív egészre amely osztható egy q konstansal ami csak az A halmaz felső sűrűségétől függ. Ez egyenértékű azzal hogy az alábbi kvadratikus egyenletrendszernek

$$(x_i - x_0) \cdot (x_j - x_0) = \lambda t_{ij}, \quad (1 \leq i \leq j \leq k - 1),$$

van megoldása az A halmazban, azaz van $x_0 \in A, x_1 \in A, \dots, x_{k-1} \in A$ megoldás. Ha $A = \mathbb{Z}^n$ a rácpontok teljes halmaza, akkor ezt a problémát először Siegel tanulmányozta [43] és megoldására kifejlesztette az ún. Siegel moduláris formák elméletét [30], amit a Siegel általánosított körmódszerének is neveznek [29]. Ahhoz hogy megoldásokat pozitív sűrűségű részhalmazokban is lehessen találni nem elég a megoldások számát vizsgálni hanem a megoldáshalmazok Fourier transzformáltjának struktuurális tulajdonságait kell megérteni. Ez általános theta függvényekkel írható le [1] amelyek nem moduláris formák de hasonló transzformációs tulajdonságokkal rendelkeznek, amelyek alapvető szerepet játszanak a bizonyításokban.

A 3. cikk több egymáshoz kapcsolódó részből áll. Egyrészt kiterjeszti Bourgain tételét magasabb dimenziós kockák, téglalapok, illetve általánosabban olyan konfigurációkra amelyek kölcsönösen merőleges térben lévő szimplexek direkt szorzata. A kiindulási pont egy új, rövid bizonyítása Bourgain szimplex tételének, amelyben egy egyszerű normát vezetünk be amely méri egy $A \subseteq \mathbb{R}^d$ mérhető halmaz eloszlásának egyenletességét. Amennyiben a halmaz egyenletesen oszlik el, automatikusan tartalmazza egy adott szimplex megfelelően nagy nagyításainak izometrikus képét. Meglepő módon, minden pozitív felső sűrűségű halmaz egyenletesen oszlik egy bizonyos léptéken.

Komplexebb alakzatokra pl. ha $X = \Delta_1 \times \Delta_2$, $\Delta_i \subseteq \mathbb{R}^{d_i}$, két egymásra merőleges szimplex direkt szorzata, akkor egy Frieze-Kannan típusú regularitási lemma segítségével [18] az A halmaz indikátor függvényét lokálisan közelítőleg szét lehet bontani egy lineáris kombinációjára olyan függvényeknek amelyek direkt szorzata két indikátor függvénynek; azaz

$$\mathbf{1}_A(x_1, x_2) = \sum_{r_1=1}^{n_1} \sum_{r_2=1}^{n_2} \alpha_{r_1, r_2} \mathbf{1}_{A_1}^{r_1}(x_1) \mathbf{1}_{A_2}^{r_2}(x_2) + \mathcal{E}(x_1, x_2),$$

legalábbis lokálisan, ha $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, ahol Q_1 és Q_2 ill. $\mathbb{R}^{d_1}$ ill. $\mathbb{R}^{d_2}$ terekben. Ez a struktúra azért hasznos mert ha $A_1^{r_1}$ tartalmazza a $\lambda \cdot \Delta_1$ ill. $A_2^{r_2}$ tartalmazza a $\lambda \cdot \Delta_2$ egy izometrikus mását akkor A szükségszerűen tartalmazza a $\lambda \cdot X$ konfiguráció egy izometrikus képét. Az $\mathcal{E}$ függvény szerepe elhanyagolható mert egy megfelelő Gowers típusú ún. box-normája [22] megfelelően kicsivé választható. Komplexebb alakzatokra, amelyek több szimplex direkt szorzataként állnak elő, magasabb rendű Gowers box-normákat és a Frieze-Kannan regularitási lemmájának a hipergrafokra való kiterjesztését kell alkalmazni. Ilyen típusú hipergráf regularitási lemmák megtalálhatók Tao [48] ill. Gowers [22] gráfelméleti bizonyításában a több-dimenziós Szemerédi tételnek [18].

A cikk első ízben terjesztette ki Borgain szimplex tételét, megjegyezzük azonban hogy magasabb dimenziós téglak Ramsey tulajdonságait bizonyította Durcik-Kovač [14] “time-frequency” analízisbeli

modszerek alkalmazásával. Ennek a megközelítésnek az a közös cikkünk aa alpja, amelyben Roth tételének egy erősebb variációját bizonyítottuk az Euklidészi terek kontextusában [13].

A cikk fő eredménye a a fent említett tételek diszkrét változata, ami kiterjeszti a második cikk fő eredményét egy adott szimplexrol, szimplexek tetszőleges direkt szorzatára a diszkrét esetben, ahol a háttér tér $\mathbb{Z}^d$, a rácspontok halmaza. A bizonyítás struktúrája hasonló, egy indukcion alapul amely felépít és használ az ún. gyenge hipergráf regularitási lemmának egy megfelelő változatát hogy a komplexebb alakzatok Ramsey tulajdonságát visszavezesse egyszerűbb konfigurációkra.

IV. A 4. cikk általános diofantikus egyenletrendszerek megoldásait vizsgálja a prímszámok körében [12]. A diofantikus egyenletek megoldhatóságát prímek között korábban vagy lineáris rendszerek, vagy magasabb fokú, úgynevezett diagonális rendszerek esetében vizsgálták.

Ide tartozik Vinogradov megoldása a (páratlan) Goldbach sejtésnek [49], van der Courput tétele a háromtagu számtani sorozatokról ill. annak kiterjesztése lineáris egyenletrendszerekre Balog által [2]. Mindezek az eredmények klasszikusnak számítanak abban az értelemben hogy megközelíthetőek a Hardy-littlewood körmódszerrel. Az elmúlt 20 év egyik legjelentősebb eredménye ugyanakkor Green és Tao tétele, általános lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságáról a prímszámok között [24]. Ez a tétel igazolja hogy egy lineáris egyenletrendszernek $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ van megoldása a prímszámok köz—’ott ha a rendszer rangja $\mathcal{R}_1(\mathcal{L}) \geq 3$; ahol a rendszer $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_m)$, $l_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ rangja legalább r ha minden nem-triviális lineáris kombinációnak $l = a_1 l_1 + \dots + a_m l_m$ van legalább r nem-nulla együtthatója.

A magasabb fokú diofantikus egyenletrendszerek megoldhatósága az egész számok körében sem tisztázott, teljes általánosságban egy eldönthetetlen probléma. Ha azonban rendszer rangja eleendően nagy, az egyenletek fokához és számához képest, akkor a probléma analitikus módszerekkel megközelíthető. Ebben az irányban alapvető eredményeket ért Davenport [15], Birch [4] és Schmidt [42], ahol nemcsak egész megoldások létezeset igazolták, de azok számát is képesek voltak aszimptotikusan meghatározni.

Mindez mögött az az elv áll hogy kellően magas rangú diofantikus egyenletek megoldásai egyenletesen oszlanak el, így várható hogy megoldások találhatók speciális halmazokban, mint például a pímkszámok között. Ezt korábban azonban csak digonális rendszerekre sikerült igazolni, ide tartozik Hua klasszikus eredménye a primhatványösszegekre való felbontásról [25]. A legegyszerűbb esteben a $Q(\mathbf{x}) = \lambda$ egyenletre, ahol $Q(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ egy magas rangú pozitív kvadratikusan forma, a cikkünk kiinduló pontja a következő. A prímekből álló megoldások (súlyozott) számát az alábbi formula írja le,

$$\sum_{Q(\mathbf{x})=\lambda} \Lambda(\mathbf{x}) = \int_0^1 e^{-2\pi i \alpha \cdot \lambda} S(\alpha) d\alpha, \quad S(\alpha) = \sum_{\mathbf{x}} \Lambda(\mathbf{x}) e^{2\pi i Q(\mathbf{x})},$$

ahol $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $|x_i| \leq N$ ($N \approx \lambda^{1/2}$), és $\Lambda(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \Lambda(x_i)$ a von Mangoldt függvény. A prímszámok egyenletesen oszlanak el a maradék osztályokban így az integrál aszimptotikusan kiszámolható olyan rövid intervallumokon amelyek bizonyos racionális pontokon helyezkednek el (“major arcs”). Az analitikus módszer lényege hogy a maradék tartományon (“minor arcs”) megbecsüljük az integrált. Tegyük fel hogy a változatokat partíciónáltuk $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, és

$$Q(\mathbf{x}) = a_1 x_1^2 + (l_0(\mathbf{y}) + k_0(\mathbf{z}))x_1 + Q_1(\mathbf{y}) + Q_2(\mathbf{z}) + B(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Két egymással ellentétes esetet különböztetünk meg. Ha a $B(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ bilineáris forma rangja nagy akkor Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség kétszeri alkalmazásával, az

$$\sum_{\mathbf{y}} \Lambda(\mathbf{y}) e^{2\pi i \alpha((l_0(\mathbf{y})x_1 + Q_1(\mathbf{y})))} \sum_{\mathbf{z}} \Lambda(\mathbf{z}) e^{2\pi i \alpha((k_0(\mathbf{z})x_1 + Q_1(\mathbf{z})))} e^{2\pi i \alpha B(\mathbf{y}, \mathbf{z})},$$

összeg becslése visszavezethető az ismert $\sum_{\mathbf{s}, \mathbf{t}} e^{2\pi i \alpha B(\mathbf{s}, \mathbf{t})}$ Weyl-összeg becslésére. Ellenkező esetben elérhető hogy mind a Q_1 mind a Q_2 kvadratikus formák rangja nagy legyen. Ekkor felírhatjuk $B(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum_{j=1}^r l_j(\mathbf{y})k_j(\mathbf{z})$, és így azokon az affin alterenken ahol a lineáris formák $l_j(\mathbf{y})$ is $k_j(\mathbf{z})$ ($j = 0, \dots, r$) konstans értéket vesznek fel az $S(\alpha)$ exponenciális összeg a következő alakú,

$$S(\alpha) = \left(\sum_{x_1} \Lambda(x_1) e^{2\pi i \alpha(a_1 x_1^2 + (l_0 + k_0)x_1)} \right) \left(\sum_{\mathbf{y}} \Lambda(\mathbf{y}) e^{2\pi i \alpha Q_1(\mathbf{y})} \right) \left(\sum_{\mathbf{z}} \Lambda(\mathbf{z}) e^{2\pi i \alpha Q_1(\mathbf{z})} \right),$$

azaz $S(\alpha) = S_0(\alpha) S_1(\alpha) S_2(\alpha)$. Az $S_0(\alpha)$ exponenciális összegre alkalmazható Hua becslése [25], az $S_i(\alpha)$ függvények (négyzetének) integrálja pedig visszavezethető a $Q_1(\mathbf{y}) = Q_1(\mathbf{y}')$ (ill. $Q_2(\mathbf{z}) = Q_2(\mathbf{z}')$ egyenletek egész megoldásszámának a becslésére, ami azért lehetséges mert a Q_i kvadratikus formák rangja nagy. Így mindkét esetben nem-trivialis becslést lehet adni az $S(\alpha)$ összeg integráljára az ún. "minor arcs" tartományon.

A fent vázolt megközelítés általánosítható magasabb fokú diofantikus egyenletekre ill. egyenlet rendszerekre; ebben alapvető szerepe van egy a polinomokra vonatkozó regularitási lemma típusú felbontásnak. Egy $Q(\mathbf{x})$ homogén d -fokú polinom regularitása lényegében azt jelenti hogy a $Q(\mathbf{x}) = \lambda$ szintfelületeken legfeljebb, a várható $\approx \lambda^{n/d-1}$ számú rácspont van. Schmidt tétele kimondja, hogy a $Q(\mathbf{x})$ forma vagy reguláris, vagy szétbontható $Q = P_1 R_1 + \dots + P_m R_m$ összegre, ahol P_i, R_i legalább 1-fokú polinomok és $m \leq m(d)$ [42]. Ezt a felbontást rekurzívan használva minden Q polinom felbontható reguláris polinomokra, amely azt eredményezi hogy szinthalmozai particionálhatók olyan szinthalmozakora amelyeken a rácspontok közelítőleg egyenletesen oszlanak el. Ez azért fontos, mert ha

$$Q(\mathbf{x}) = ax_1^d + B^{(1)}(\mathbf{y}, \mathbf{z})x_1^{d-1} + \dots + B^{(d-1)}(\mathbf{y}, \mathbf{z})x_1 + Q_1(\mathbf{y}) + Q_2(\mathbf{z}) + B^{(d)}(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

akkor a $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ változókat megszorítva olyan, közelítőleg egyenlő méretű, szinthalmozokra amelyeken a $B^{(i)}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ ($1 \leq i < d$) polinomok konstans értéket vesznek fel, az $S(\alpha)$ exponenciális összeg szorzatra bontható és hasonlóan becsülhető mint a kvadratikus formák esetén. Ehhez szükséges az is hogy $Q_2(\mathbf{z})$ és a $Q_1(\mathbf{y}) + B^{(d)}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ homogén polinomok rangja megfelelően nagy legyen.

A megközelítésünk hátránya hogy a regularitási lemma használata miatt a diofantikus egyenletrendszer rangjának asztronomikusan nagyra kell lenni a egyenletek fokához képest. Ebben az irányban legújabb eredményeket ért el Yamagishi [51], módszerünkkel kiindulva a von Mandold függvény további aritmetikus tulajdosságait kihasználva, illetve függetlenül Liu-Zhao [34]. Ezek az eredmények kvantitatívan optimálisak, olyan értelemben hogy a rangnak csak exponenciálisan kell nagyra kell lennie az egyenletek fokához képest, hasonlóan mint az egész megoldások esetében.

V. Az 5. cikk [27] egyésszt Bourgain polinomiális ergodikus tételét [7, 5, 6] terjeszti ki olyan transzformációkra amelyek egy step-2 nilpotens csoportot generálnak, másrészt tárgyalja az ún. Waring-Vinogradov diofantikus rendszer [50] nilpotens változatát. Ezzel egyben a Furstenberg-Bergelson-Leibman pontonkénti konvergenciára vonatkozó sejtését [3, Section 5.5] elsőként igazolja nem-kommutatív esetben. Az eredmények bizonyítása a [26] közös cikkünkben vannak teljes részletességgel kidolgozva. Alapvető fontossággal bírnak bizonyos Wey-típusú exponenciális összegekre adott korábbi becsléseink [28].

A kiindulási pont, hasonló mint a kommutatív esetben. A pontonkénti konvergencia sztandard módszerekkel visszavezethető bizonyos univerzális maximális (ill. oszcillációs) operátorok becslésére.

Ezek a következő képpen írhatók le. Legyen $\mathbb{G}_0$ az univerzális (vagy szabad) step-2 nilpotens csoport amit $g_1, \dots, g_d$ elemek generálnak, es legyen $A_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{G}_0$, $A_0(n) := g_1^n g_2^{n^2} \cdots g_d^{n^d}$. Definíájuk a következő konvolúciós és maximális operátorokat,

$$A_N f(g) := \frac{1}{2N+1} \sum_{|n| \leq N} f(A^{-1}(n) \cdot g), \quad Mf(g) := \sup_{N \geq 1} |A_N f(g)|.$$

Alapvető fontossággal bír a következő becslés,

$$\|Mf\|_{l^2(\mathbb{G}_0)} \leq C \|f\|_{l^2(\mathbb{G}_0)}.$$

A kommutatív esetben, ahol $\mathbb{G}_0 = \mathbb{Z}^d$, a $A_N f = K_N * f$ konvolúció operátor operátor magjának Fourier transformáltja:

$$\widehat{K}_N(\xi) = \frac{1}{2N+1} \sum_{|n| \leq N} e^{2\pi i A_0(n) \cdot \xi}, \quad \xi \in \Pi^n$$

egy klasszikus exponenciális összeg [49]. Erre nem-triviális becslések adhatók az ún. “minor arcs” tartományban. Ennek megfelelően $K_N = L_N + E_N$ ahol $\widehat{E}_N$ a $\widehat{K}_N$ megszorítása a minor arcs tartományra. Ekkor

$$\|\sup_N E_N * f\|_{l^2}^2 \leq C \sum_{N=2^k, k \geq 1} \|E_N * f\|_{l^2}^2 \leq C \|f\|_{l^2}^2,$$

kihasználva hogy

$$\|E_N * f\|_{l^2} = \|\widehat{E}_N\|_{l^\infty} \|f\|_{l^2} \leq C N^{-\delta} \|f\|_{l^2}.$$

Ez Bourgain bizonyításának első lépése ahol a $K_N * f$ operatorok redukálhatók az $L_N * f$ konvolúció operátorokra.

Diszkrét nilpotens csoportokon nincsen olyan fogalma a Fourier transzformáltnak amelynek segítségével direkt becsléseket lehet adni konvolúció operátorokra az $l^2(\mathbb{G}_0)$ térben. Itt segít az az észrevétel hogy az $l^2(\mathbb{G}_0)$ Hilbert térben,

$$\|A_N\|_{l^2 \rightarrow l^2} = \|A_N^* A_N\|_{l^2 \rightarrow l^2}^{\frac{1}{2}} = \dots = \|(A_N^* A_N)^r\|_{l^2 \rightarrow l^2}^{\frac{1}{2r}},$$

minden $r = 2^m$ diadikus értékre. Alapvető fontosságú észrevétel hogy ha az r paramétert elég nagyak választjuk akkor az $(A_N^* A_N)^r$ konvolúció operátor magja aszimptotikusan leírható, ugyanis

$$K_{N,r}(h) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \\ m_1, \dots, m_r}} \mathbf{1}_{\{A_0(n_1) \cdot A_0(m_1)^{-1} \cdots A_0(n_r) \cdot A_0(m_r)^{-1} = h\}} \mathbf{1}_N(n_1) \cdots \mathbf{1}_N(m_r)$$

ahol $\mathbf{1}_N(n) = \frac{1}{2N+1} \mathbf{1}_{[-N, N]}(n)$, ami nem más mint az

$$A_0(n_1) \cdot A_0(m_1)^{-1} \cdots A_0(n_r) \cdot A_0(m_r)^{-1} = h$$

diofantikus egyenletrendszer (normalizált) megoldásainak száma a $[-N, N]^{2r}$ tartományban. A kommutatív esetben ez a Waring-Vinogradov rendszer: $\sum_{i=1}^r (n_i^k - m_i^k) = h_k$, for $1 \leq k \leq d$.

Az univerzális nilpotens csoporton $\mathbb{G}_0$ belátható hogy a fenti diofantikus rendszer rangja növekszik az r paramterrel [28] es így annak (Euklidészi) Fourier transzformáltjára egy Weyl-típusú nem-triviális becslést lehet adni a minor arcs tartományon a Birch-Davenport módszerrel [15, 4]. Ez a kindulo pontja egyben az A_N operátorok felbontásának ami az első lépés a maximális operátor $Mf = \sup_N |A_N f|$ becslésének az $l^2(\mathbb{G}_0)$ térben.

A felbontás a következő képpen történik. A $\mathbb{G}_0$ step-2 univerzális csoport azonosítható a $\mathbb{Z}^d \ltimes \mathbb{Z}^{d(d+1)/2}$ csoporttal ahol a $g = (g^1, g^2)$ es az $h = (h^1, h^2)$ elemek szorzata: $g \cdot h = (g^1 + h^1, g^1 + h^2 + R_0(g^1, h^1))$ ahol $R_0(,)$ egy explicit bilineáris forma. Az A_N operator magja szorzat alakú, azaz

$$K_N(g^1, g^2) = K_N(g^1) \mathbf{1}_{\{0\}}(g^2), \quad K_N(g^1) = \frac{1}{2N+1} \sum_{|n| \leq N} \mathbf{1}_{\{A_0(n)\}}(g^1).$$

Itt az első lépésben a centrális g^2 -változókat szorítjuk meg a minor arcs tartományra a Fourier térben, azaz felírjuk $\mathbf{1}_{\{0\}}(g^2) = L_N(g^2) + E_N(g^2)$, ami egyben a következő felbontást eredményezi:

$$K_N(g^1, g^2) = L_N(g^1, g^2) + E_N(g^1, g^2), \quad E_N(g^1, g^2) = K_N(g^1) E_N(g^2).$$

Az E_N konvolúcióoperátor normáját az $l^2(\mathbb{G}_0)$ térben a fenti módszerrel meg tudjuk becsülni, ugyanis az $(E_N^* E_N)^r$ operátor magjának Euklidészi Fourier transformáltja,

$$\widehat{E}_{N,r}(\theta^1, \theta^2) = \widehat{K}_{N,r}(\theta^1, \theta^2) |\widehat{E}_N(\theta^2)|^{2r}, \quad ahol$$

$$\widehat{K}_{N,r}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \\ m_1, \dots, m_r}} e^{2\pi i \langle A_0(n_1) \cdot A_0(m_1)^{-1} \dots A_0(n_r) \cdot A_0(m_r)^{-1}, (\theta^1, \theta^2) \rangle} \mathbf{1}_N(n_1) \dots \mathbf{1}_N(m_r)$$

A $\widehat{E}_N$ faktor megszorítja θ^2 -változókat a minor arcs tartományra ami azt eredményezi hogy $\|\widehat{E}_{N,r}\|_\infty \leq C N^{-\delta r}$ a nilpotens Weyl összeg becslése miatt, legalábbis ha r kellően nagy. Ennek további következménye hogy,

$$\|(E_N^* E_N)^r\|_{l^2 \rightarrow l^2} \leq \|E_{N,r}\|_{l^1} \leq C N^{C_d - \delta r} \leq C N^{-\delta r/2}.$$

Ekkor $\|E_N f\|_{l^2} \leq N^{-\delta/4} \|f\|_{l^2}$, es ugyanugy mint a kommutativ esetben $\|\sup_N |E_N f|\|_{l^2} \leq C \|f\|_{l^2}$.

Ez az első redukció a nilpotens csoportokon, ami azt eredményezi hogy a centrális θ^2 -változókat meg lehet szorítani az “major arcs” tartományra. Megjegyezzük hogy ez nem lehetséges az összes változóra egyszerre. A következő lépés hogy a nem centrális θ^1 - változókat is megszorítsuk a “major arcs” tartományra és ehhez meg kell becsülni egy második “hiba” operátor E_N normáját az $l^2(\mathbb{G}_0)$ térben. Itt az az érdekes jelenség áll elő hogy az fent vázolt $(E^* E)^r$ módszert azért lehet újra alkalmazni a θ^1 -változókra, mert a központi θ^2 -változók már meg vannak szorítva a major arcs intervallumokra a Fourier térben. Ez azt eredményezi hogy a nilpotens szorzatból jövő polinomok hatása a központi változókban “elnyelődik” és az operátor hasonlóan becsülhető mint a kommutatív esetben. Végül az összes változót a Fourier térben a major arcs tartományra lehet korlátozni ahol az operátor magjának struktúrája jól leírható, és ez a struktúra használható hogy megfelelő maximális és oszcillációs becsléseket tudjunk adni.

Ezt az lépésenkénti redukciót, kiindulva a központi változókból, magasabb rendű univerzális nilpotens csoportokra is lehet alkalmazni; az l^2 -elmélet mind a maximális operátorok, mind az pontonkénti ergodikus tetelek, esetében jelenleg kiterjeszthető step-3 ill. step-4 nilpotens csoportokra.

Ahhoz hogy az elméletet általános magasabb rendű nilpotens csoportokra is kiterjesszük a fő nehézség aritmetikai jellegű, a fenti nilpotens Waring-Vinogradov diofantikus rendszer rangjáról kell megmutatni hogy linearisan nő az r paraméterrel.

Ez azért is kihívas mert általános univerzális nilpotens csoportok szorzat struktúrája - az un Hall-polinomok - nem ismertek; ugyanakkor számos tulajdonságuk levezethető ami elégséges lehet a rendszer rangjának becsléséhez.

A folytonos esetben Chris, Nagel, Stein es Wainger [11] megmutatta hogy az $A_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$, $A_0(t) = (t, t^2, \dots, t^d, 0, \dots, 0)$ görbe, önmagával elég sokszor szorozva “egyenletesen” lefedi az egész $\mathcal{G}$ csoportot magasabb rendű univerzális nilpotens Lie-csoport esetében is. Ez volt az alapja a maximális és szinguláris integrál operátorokra vonatkozó néhány kiemelkedő eredménynek [11] amelyek klasszikus harmonikus analízis, a bevezetésben említett azon irányvonalához tartoznak, amelyben geometriai fogalmak mint a görbület játszanak kiemelt szerepet.

REFERENCES

- [1] A.N.ANDRIANOV Quadratic Forms and Hecke Operators Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag (1987)
- [2] A. BALOG Linear equations in primes *Mathematika* 39.2 (1992): 367-378
- [3] V. BERGELSON, A. LEIBMAN. A nilpotent Roth theorem. *Invent. Math.* **147** (2002), 429–470.
- [4] B.J. BIRCH. Forms in many variables. *Proc. R. Soc. Lond. A* **265** (1962), 245–263.
- [5] J. BOURGAIN. On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers. *Israel J. Math.* **61** (1988), 39–72.
- [6] J. BOURGAIN. On the pointwise ergodic theorem on L^p for arithmetic sets. *Israel J. Math.* **61** (1988), 73–84.
- [7] J. BOURGAIN. Pointwise ergodic theorems for arithmetic sets, with an appendix by the author, H. Furstenberg, Y. Katznelson and D.S. Ornstein. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **69** (1989), 5–45.
- [8] J. BOURGAIN, A Szemerédi type theorem for sets of positive density in $\mathbb{R}^k$, *Israel J. Math.* 54 (1986), no. 3, 307–316.
- [9] J. BOURGAIN, Exponential sums and nonlinear Schrödinger equations. *Geometric and Functional Analysis GAFA* 3 (1993): 157-178.
- [10] J. BOURGAIN, Global solutions of nonlinear Schrödinger equations, *American Mathematical Soc. Vol. 46* (1999)
- [11] M. CHRIST, A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER. Singular and maximal Radon transforms: analysis and geometry *Annals of Mathematics*, 150(2), (1999): 489-577.
- [12] B. COOK, Á. MAGYAR. Diophantine equations in the primes. *Inventiones Mathematicae* 198, (2014):701-37.
- [13] B. COOK, Á. MAGYAR, M. PRAMANIK. A Roth-type theorem for dense subsets of $\mathbb{R}^d$ *Bull. Lond. Math. Soc.* 49 (2017), no. 4, 676-689.
- [14] P. DURCIK, V. KOVAČ, Boxes, extended boxes, and sets of positive upper density in the Euclidean space *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 171/3, (2021): 481-501
- [15] H. DAVENPORT. Cubic forms in thirty-two variables. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **251** (1959), 193–232.
- [16] P. Erdős, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, E. G. Straus Euclidean Ramsey theorems. *I. J. Combinatorial Theory Ser. A* **14** (1973): 341–363.
- [17] P. Erdős, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, E. G. Straus Euclidean Ramsey theorems. II, Infinite and finite sets North-Holland, Amsterdam, (1975): 529–557. *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, Vol. 10.
- [18] A. FRIEZE, R. KANNAN, The regularity lemma and approximation schemes for dense problems In *Foundations of Computer Science* (1996) *Proc. 37th Annual Symp. IEEE.*, 12-20
- [19] H. FURSTENBERG, Y. KATZNELSON, An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations *J. Analyse Math.* 31 (1978), 275-291.
- [20] P. FRANKL AND V. RÖDL. A PARTITION PROPERTY OF SIMPLICES IN EUCLIDEAN SPACE. *J. AMER. MATH. SOC.* 3/1, (1990): 1-7.
- [21] W. T. GOWERS. A NEW PROOF OF SZEMERÉDI’S THEOREM FOR ARITHMETIC PROGRESSIONS OF LENGTH FOUR *GEOM. FUNCT. ANAL.* **8** NO. 3 (1998): 3529–551.
- [22] W. T. GOWERS. HYPERGRAPH REGULARITY AND THE MULTIDIMENSIONAL SZEMERÉDI THEOREM *ANNALS OF MATHEMATICS* (2007), 897-946.
- [23] R. L. GRAHAM. RECENT TRENDS IN EUCLIDEAN RAMSEY THEORY *DISCRETE MATH.* **136** NO. 1-3, (1994): 119–127.
- [24] B. GREEN, T. TAO LINEAR EQUATIONS IN THE PRIMES *ANN. OF MATH.*(2) 171.3 (2010): 1753-1850.
- [25] L.K. HUA. ADDITIVE THEORY OF PRIME NUMBERS *TRANSLATIONS OF MATHEMATICAL MONOGRAPHS VOL. 13.*” AM. MATH. SOC., PROVIDENCE (1965)
- [26] A. IONESCU, Á. MAGYAR, M. MIREK, T. Z. SZAREK. POLYNOMIAL AVERAGES AND POINTWISE ERGODIC THEOREMS ON NILPOTENT GROUPS. *INVENTIONES MATHEMATICAE* 231.3 (2023): 1023-1140.
- [27] A. IONESCU, Á. MAGYAR, M. MIREK, T. Z. SZAREK. POLYNOMIAL SEQUENCES IN DISCRETE NILPOTENT GROUPS OF STEP 2. *ADVANCED NONLINEAR STUDIES* 23, NO. 1 (2023): 20230085.
- [28] A. IONESCU, Á. MAGYAR, S. WAINGER. AVERAGES ALONG POLYNOMIAL SEQUENCES IN DISCRETE NILPOTENT LIE GROUPS: SINGULAR RADON TRANSFORMS.
IN *ADVANCES IN ANALYSIS: THE LEGACY OF ELIAS M. STEIN*, 146–188, *PRINCETON MATH. SER.* 50, PRINCETON UNIV. PRESS, PRINCETON, NJ, 2014.
- [29] Y. KITAOKA SIEGEL MODULAR FORMS AND REPRESENTATION BY QUADRATIC FORMS.
LECTURES ON MATHEMATICS AND PHYSICS, TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH, SPRINGER-VERLAG, (1986)
- [30] H. KLINGEN INTRODUCTORY LECTURES ON SIEGEL MODULAR FORMS *CAMBRIDGE STUDIES OF ADVANCED MATHEMATICS* 20, CAMBRIDGE UNIV. PRESS, (1990)
- [31] I. KRÍŽ. PERMUTATION GROUPS IN EUCLIDEAN RAMSEY THEORY. *PROC. AMER. MATH. SOC.* **112/3** (1991): 899-907.

- [32] I. KŘÍŽ. ALL TRAPEZOIDS ARE RAMSEY. DISCRETE MATH. **108** 1-3, (1992): 59-62. TOPOLOGICAL, ALGEBRAICAL AND COMBINATORIAL STRUCTURES. FROLÍK'S MEMORIAL VOLUME.
- [33] J. LIU INTEGRAL POINTS ON QUADRICS WITH PRIME COORDINATES MONATS. MATH. 164.4 (2011): 439-465
- [34] J. LIU, L. ZHAO. ON FORMS IN PRIME VARIABLES. TRANS. AMER. MATH. SOC. 376, no. 12 (2023): 8621-8656.
- [35] N. LYALL AND Á. MAGYAR, PRODUCT OF SIMPLICES AND SETS OF POSITIVE UPPER DENSITY IN $\mathbb{R}^d$ MATH. PROC. OF THE CAMBRIDGE PHILOS. SOC. 165. NO. 1. (2018), 25-51.
- [36] N. LYALL, Á. MAGYAR WEAK HYPERGRAPH REGULARITY AND APPLICATIONS TO GEOMETRIC RAMSEY THEORY. TRANSACTIONS OF THE AMER. MATH. SOC., SER. B, 9(5) (2022): 160-207.
- [37] N. LYALL, Á. MAGYAR, H. PARSHALL, SPHERICAL CONFIGURATIONS OVER FINITE FIELDS AMER. J. MATH. 142.2 (2020): 373-404.
- [38] Á. MAGYAR DIOPHANTINE EQUATIONS AND ERGODIC THEOREMS AMER. J. MATH. v.124, (2002): 921-953
- [39] Á. MAGYAR, E.M. STEIN, S. WAINGER. DISCRETE ANALOGUES IN HARMONIC ANALYSIS: SPHERICAL AVERAGES. ANN. MATH. **155** (2002), 189-208.
- [40] Á. MAGYAR DISTANCE SETS OF LARGE SETS OF INTEGER POINTS ISRAEL J. MATH., v (2008) PP. 251-263.
- [41] Á. MAGYAR, *k-point configurations in sets of positive density of Z^n* DUKE MATH. J., v 146/1, (2009) PP. 1-34.
- BIBITEMRIST F. RICCI, E. M. STEIN. HARMONIC ANALYSIS ON NILPOTENT GROUPS AND SINGULAR INTEGRALS I. OSCILLATORY INTEGRALS. J. FUNCT. ANAL. **73** (1987), 179-194.
- [42] W. M. SCHMIDT THE DENSITY OF INTEGER POINTS ON HOMOGENEOUS VARIETIES. ACTA MATHEMATICA 154(3-4), (1985):243-96
- [43] C. L. SIEGEL, *On the theory of indefinite quadratic forms* ANN. OF MATH. (2) 45 (1944), 577-622.
- [44] C. SOGGE FOURIER INTEGRALS IN CLASSICAL ANALYSIS. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, (1993)
- [45] C. SOGGE, E.M. STEIN AVERAGES OF FUNCTIONS OVER HYPERSURFACES IN $\mathbb{R}^n$ INVENT. MATH. 82, 543-556, (1985).
- [46] E. M. STEIN. MAXIMAL FUNCTIONS: SPHERICAL MEANS. PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES, 73(7), (1976), 2174-2175.
- [47] E.M. STEIN. HARMONIC ANALYSIS: REAL-VARIABLE METHODS, ORTHOGONALITY, AND OSCILLATORY INTEGRALS. WITH THE ASSISTANCE OF TIMOTHY S. MURPHY. PRINCETON MATHEMATICAL SERIES, 43. MONOGRAPHS IN HARMONIC ANALYSIS, III. PRINCETON UNIVERSITY PRESS, PRINCETON, NJ, 1993.
- [48] T. TAO, A VARIANT OF THE HYPERGRAPH REMOVAL LEMMA JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, SERIES A 113.7 (2006): 1257-1280.
- [49] I.M. VINOGRADOV REPRESENTATIONS OF AN ODD INTEGER AS A SUM OF THREE PRIMES GOLDBACH CONJECTURE 4 (2002): 61.
- [50] T.D. WOOLEY. NESTED EFFICIENT CONGRUENCING AND RELATIVES OF VINOGRADOV'S MEAN VALUE THEOREM. PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY **118.4** (2019), 942-1016.
- [51] S. YAMAGISHI DIOPHANTINE EQUATIONS IN PRIMES: DENSITY OF PRIME POINTS ON AFFINE HYPERSURFACES. DUKE MATHEMATICAL JOURNAL 171, no. 4 (2022): 831-884.