

Bírálat Magyar Ákos

„Diophantine equations and discrete harmonic analysis”

című MTA doktori értekezéséről

Magyar Ákos „Diophantine equations and discrete harmonic analysis” („Diofantikus egyenletek és diszkrét harmonikus analízis”) címen nyújtotta be MTA doktori értekezését. A mű öt kiemelt tézist tartalmaz, amelyek mindegyikét új tudományos eredményként, és a szerző munkájaként fogadom el. A fejezetek a szerző egy-egy cikkén alapulnak, kiegészítve azokat történeti kontextussal, korábbi kapcsolódó eredményekkel, illetve egyes esetekben későbbi fejlemények említésével. A téziseket összefogó elv a Fourier analízis alkalmazása, noha az ötödik fejezetben a klasszikus Fourier analízist felváltja az úgynevezett nilpotens kör módszer. Ez utóbbi fejezet nem is illeszkedik tökéletesen a korábbiakhoz, és véleményem szerint akár elhagyható is lett volna. Ugyanakkor az első négy fejezet a Fourier analízis gyönyörű alkalmazásait tartalmazza számelméleti és geometriai problémákban.

A disszertáció értékes eredményekben gazdag, amelyek nemzetközi tekintetben is jelentősek. A doktori művet nyilvános vitára alkalmasnak tartom. Ugyanakkor megjegyzem, hogy a prezentáció helyenként lehetett volna körültekintőbb: számos helyen zavaró tipográfiai és stílusbeli hibák maradtak a műben (ékezetek hiánya, helytelenül írt szavak, egymásba csúszott bibliográfiai tételek, stb). Ezek kiküszöbölése nem feltétlenül vett volna többlet igénybe néhány óránál.

A disszertáció számos gyönyörű eredményt tartalmaz. Ezek közül itt csak néhányat emelek ki.

Az első fejezet rövid áttekintést nyújt a diofantikus egyenletek, ergodikus tételek és harmonikus analízis kapcsolatáról, majd rátér a fő eredmény tárgyalására: bizonyos homogén polinomok által definiált diofantikus egyenletek megoldásai megfelelő feltételek mellett aszimptotikusan egyenletesen oszlanak el (a pontos feltételek technikai részleteit itt nem tárgyalom). A bizonyítás épít a szerzőnek Steinnel és Waingerrel elért korábbi közös eredményére bizonyos diszkrét szférikus maximális operátorok korlátosságáról, és kiterjeszti azt magasabb fokú homogén polinomok szintfelületeire.

A második fejezet a geometriai Ramsey elmélet témakörébe tartozik. A szerző átvizsgálja Bourgain egy korábbi eredményét diszkrét környezetben, és azt mutatja meg, hogy – bizonyos természetes feltételek mellett -- az egészek rácsának tetszőleges pozitív felső sűrűségű A részhalmaza tartalmazza egy általános helyzetű X részhalmaznak tetszőlegesen nagy felfűjt példányát. Ez ekvivalens bizonyos kvadratikus egyenletrendszer A-n belüli megoldhatóságával. A

bizonyításhoz a szerző a megoldáshalmazok Fourier transzformáltjának strukturális tulajdonságait bizonyítja be, és használja fel.

A harmadik fejezet továbbra is a geometria Ramsey tulajdonságát vizsgálja. Fő eredményként a szerző Lyal-lel közösen azt mutatta meg, hogy szimplexek direkt szorzatainak megvan a Ramsey tulajdonsága (sűrűségi értelemben) mind az euklideszi térben, mind az egészek rácsán. A bizonyítás itt a Fourier analízisen túl egy megfelelő hipergráf regularitási lemmán alapszik. A bizonyítás technikailag meglehetősen bonyolult.

A negyedik fejezet azt vizsgálja, hogy egyes magasabb fokú diofantikus egyenletrendszereknek van-e megoldása a prímek halmazán, és a fő eredmények egy Cook-kal közös áttörést jelentő cikken alapulnak. Lényegében arról van szó, hogy ha az egyenletrendszer rangja elég nagy a fokszámhoz képest, akkor a prímek halmazán annyi megoldást lehet garantálni, amennyit átlagosan várhat az ember. A szerző a prímekből álló megoldások számát a körmódszer megfelelő variánsának alkalmazásával becsüli meg, miután alkalmaz egy felbontási regularitási lemmát. Ennek a megközelítésnek egy hátránya, hogy a regularitási lemma alkalmazása miatt meg kell követelni, hogy az egyenletrendszer rangja óriási legyen a fokszámhoz képest. Későbbi kutatások során Yamagishi és Liu-Zhao javítottak ezeken a feltételeken.

Az ötödik fejezet tartalmában és módszereiben kissé elüt az előzőektől, noha a motiváció és a bizonyítások gyökere itt is visszanyúlik a Fourier analízishez és exponenciális összegek becsléséhez. Az eredmények a szerzőnek (és társszerzőinek) nemrégiben publikált nagy hatású cikkein alapulnak, amelyekben polinomiális sorozatok egyes tulajdonságait vizsgálják nilpotens csoportokon, valamint ergodikus tételeket általánosítanak erre az esetre. A klasszikus Fourier analízis módszereit az úgynevezett nilpotens körmódszer váltja fel. Megjegyzendő, hogy a klasszikus esethez képest itt jelentősen új, nem-triviális technikákat kellett a szerzőknek kidolgozni.

Összességében a disszertáció mély és értékes eredményeket tartalmaz, amelyeket tartalmi tekintetben messzemenően elegendőnek tartok az MTA doktori cím megszerzéséhez. A formai hiányosságokról már tettem említést.

Kérdés a szerzőhöz: A harmadik fejezetben a Theorem 3.1. és Theorem 3.2 euklideszi terekre, és azok pozitív felső sűrűségű halmazaira vonatkozik. Mi történik, ha a tereken nem az euklideszi normával definiáljuk a távolságot, hanem valamely konvex test által generált normával? Ekkor is igazak maradnak-e ezek a sűrűségi Ramsey típusú tételek, illetve átmenthetőek-e a bizonyítások?

Matolcsi Máté,

Budapest, 2025.09.24.