

MTA DOKTORI PÁLYÁZAT - VÁLASZ DR BIRÓ ANDRÁS BÍRÁLATÁRA

Dr Biró András opponensi véleménye egy érdekes kérdést vet fel, amely a doktori mű 1. és 4. fejezetének fő eredményeihez kapcsolódik és további kutatások alapjául szolgálhat.

A kérdés a magas rangú diofantikus egyenletek prímekből álló megoldás-halmazainak egyenletes eloszlására vonatkozik, amennyiben a megoldás-halmazokat egy véges mértéktérbe képezzük le ergodikus transzformációk segítségével. Pontosabban így fogalmazható meg; Legyen (X, μ) egy véges mérhető tér, és legyen $T_1, \dots, T_n$ felcserélhető, mértéktartó transzformációk teljesen ergodikus családjá. Igaz-e hogy majdnem minden $x \in X$ pontra, az orbitok

$$\Omega_{x,\lambda} := \{T_1^{p_1} \cdots T_n^{p_n} x : Q(p_1, \dots, p_n) = \lambda, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}\} \subseteq X$$

aszimptotikusan egyenletesen oszlanak el az X térben amint $\lambda \rightarrow \infty$, feltéve hogy pozitív definit Q polinom rangja elég magas a fokához képest, és λ egy szükséges kongruencia feltételt kielégít?

Erre a kérdésre pozitív választ adott a $Q(p_1, \dots, p_n) = p_1^d + \dots + p_n^d$ speciális esetben a Anderson et al. cikke: "On the ergodic Waring–Goldbach problem." J. Funct. Anal. 282.5 (2022). A cikkben leírt módszerek kiterjeszthetőnek tűnnek általános, nem-diagonális, magas rangú diofantikus egyenletekre is. Ez a következő észrevételeken alapszik.

Az úgy nevezett "minor arcs" becslések egyenletes becslést biztosítanak a prím megoldáshalmazok Fourier transzformáltjára. Ez lehetővé teszi Fourier transzformált egy aszimptotikus felbontását, hasonlóan az egész megoldások esetéhez. Ez már igazolja a prím-rácsponatok aszimptotikus egyenletes eloszlását a $\{Q = \lambda\}$ színhalmazokon (ill. azok vettülettét a $\{Q = 1\}$ színhalmazon), amennyiben az ún. singuláris sor nem tűnik el, ami elérhető a λ paraméter egy a Q polinomtól függő maradék-osztályra való megszorításával. Az aszimptotikus felbontás az alapja azoknak a maximális illetve oszcillációs becsléseknek is amelyek az $\Omega_{x,\lambda}$ orbitok egyenletes eloszlását igazolják. Továbbá, az újabb módszerek alkalmazásával (Liu-Zhao: "On forms in prime variables." Trans. AMS 376/12 (2023)), elegendő ha a polinom rangja exponenciálisan nagy a fokához képest, hasonlóan mint az egészek körében.

A részletes bizonyításhoz pontos becsléseket kell adni bizonyos prímekből álló exponenciális összegekre, azonban a "major arcs" esetben a Siegel-Walfisz tétel segítségével ezek varhatóan vissza vezethetőek klasszikus exponenciális összeg becslésekre.

Hasonló eredmények varhatóak $Q(p_1, \dots, p_n) = 0$ prímekből álló megoldás halmazokra is, amennyiben Q egy megfelelően magas rangú páratlan fokú egész együtthatós homogén polinom, amely kielégít bizonyos lokális (mod p) feltételeket. Ebben az esetben várhatóan az

$$\Omega_{x,N} := \{T_1^{p_1} \cdots T_n^{p_n} x : Q(p_1, \dots, p_n) = 0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}_N\} \subseteq X$$

"orbitok" aszimptotikusan egyenletesen oszlanak el az X térben amint $N \rightarrow \infty$. Egy elégséges (globális) feltétel lehet hogy ha van végtelen sok $\mathbf{p} \in \mathbb{P}^n$ amelyre $Q(\mathbf{p}) = 0$ de $\nabla Q(\mathbf{p}) \neq 0$, azaz van végtelen sok prímekből álló nem-singuláris megoldás.

2025, December 2.


Magyar Ákos