

MTA DOKTORI PÁLYÁZAT - VÁLASZ DR. GYARMATI KATALIN BÍRÁLATÁRA

Dr. Gyarmati Katalin bírálata több érdekes problémát is felvet, köztük olyanokat is amelyek megválaszolása további kutatásokat igényel. Felveti hogy a második fejezet fő eredménye kiterjeszthető-e olyan pont-konfigurációkra amelyek egy szimplex csúcaiból és súlypontjából állnak?

Ha a távolságot a klasszikus euklidészi értelemben vesszük akkor ez nem igaz; a következő konstrukciót Bourgain ill. Graham adta meg. Legyen A az olyan $x \in \mathbb{R}^d$ pontok halmaza ahol az $\{|x|^2\}$ törtrésze kicsi, azaz $|x|^2$ közel van egy pozitív egészhez. Ha három pont $x - y, x, x + y$ megtalálható az A halmazban akkor, akkor a "paralelogramma szabály" alapján $2|y|^2 = |x - y|^2 + |x + y|^2 - 2|x|^2$, így közel kell lennie egy egészhez, tehát nem lehet tetszőlegesen elég nagy valós szám. A konstrukció kiterjeszthető minden olyan pontthalmazra amelyiket nem tartalmaz egy gömbfelület. Ide tartozik Graham alapvető sejtése amely szerint Bourgain tétele igaz marad minden gömbfelületre írható véges pontthalmazra.

Ha azonban a távolságot l^p -normával definiáljuk ahol $p \neq 1, 2$ akkor a kérdésre pozitív válasz adható a folytonos és varhatóan a diszkrét környezetben is. Ezt az eredményt a két pontból álló szimplex esetre, azaz a fent említett $\{x - y, x, x + y\}$ konfigurációra, a Cook és Pramanikkal írott közös cikkünk "A Roth-type theorem for dense subsets of $\mathbb{R}^d$ " (Bull. London Math. Soc. 49/4 (2017): 676-689) tartalmazza. A cikkben leírt módszerek átvihetők magasabb dimenziós szimplexek esetre is az euklidészi terekben, ugyanis a cikk módszereivel vissza lehet vezetni a problémát bizonyos multi-lineáris szinguláris integrál-operatorok korlátosságának igazolására. Ezek az operatorok bele tartoznak abba az osztályba amelyek korlátosságát a Muscalu, Tao és Tiele "Multi-linear operators given by singular multipliers" (Journal of the American Mathematical Society, (2002) 15(2) pp. 469-496) cikkének eredményei igazolják.

A diszkrét esetben a kérdés nagyon érdekes, ilyen típusú eredmények még nem jelenetek meg. Egy lehetséges megközelítés a fent említett cikkünk módszereinek átvitele a diszkrét környezetbe, a kör módszer segítségével. Ekkor a probléma visszavezethető bizonyos multi-lineáris diszkrét szinguláris integrál operátorok korlátosságának igazolására, amelyre alkalmazhatónak tűnik Villaroya "On boundedness of discrete multilinear singular integral operators." (Journal of mathematical analysis and applications 382, no. 2 (2011): 534-548.) cikkében leírt módszer, amely egy a folytonosból a diszkrét környezetbe való átviteli elven alapszik.

A bírálat több kérdést is felvet a 4. ill. 5. fejezet téziseivel kapcsolatban. Mindkét fejezet kapcsolódik a klasszikus Waring-Vinogradov $\Gamma(n_1) + \Gamma(m_1) + \dots + \Gamma(n_r) + \Gamma(m_r) = v$ diofantikus egyenletekhez ahol $\Gamma(n) = (n, n^2, \dots, n^d)$ a moment-görbe. A prímekből álló megoldásokat Hua tanulmányozta, és adott aszimptotikus formulákat a megoldások számára. A 4. fejezet Hua eredményeit általánosítja nem-diagonális rendszerekre. Az 5. fejezet ergodikus tételei szorosan kapcsolódnak fenti egyenletrendszer nilpotens kiterjesztéséhez, a $\Gamma(n_1) \cdot \Gamma(m_1)^{-1} \cdot \dots \cdot \Gamma(n_r) \cdot \Gamma(m_r)^{-1} = g$ egyenletrendszerhez, ahol $\Gamma(n) = g_1^n \cdot \dots \cdot g_d^n$ moment-görbe G szabad nilpotens csoporton amit a $g_1, \dots, g_d$ elemek generálnak. A kör módszer kiterjeszthetőnek tűnik mind a prím megoldások vizsgálatára, mind a nilpotens esetben, bár a magasabb osztályú csoportok komplex struktúrája miatt ott a nilpotens a kör módszer még nem teljesen kidolgozott.

2025, December 2.

Magyar Ákos