

MTA DOKTORI PÁLYÁZAT - VÁLASZ DR MATOLCSI MÁTÉ BÍRÁLATÁRA

Dr Matolcsi Máté opponensi véleményében megfogalmaz egy érdekes kérdést amely a doktori mű 3. fejezetében leírt, geometriai Ramsey típusú eredményekhez kapcsolódik. Igazak maradnak-e szimplexekre illetve azok direkt szorzatára (például téglákra) vonatkozó fő eredmények ha a távolságot nem euklideszi normával definiáljuk, hanem valamely konvex test által?

Ha a távolságot egy poliéder, például egy kocka definiálja akkor a tétel még a legegyszerűbb esetben sem igaz. Elég az egész rács egy kis környezetét venni, ez egy pozitív sűrűségű halmaz de a távolság-halmaza nem tartalmaz minden nagy távolságot. Ez a legegyszerűbb, a két pontból álló szimplex esete. Ha a távolságot egy olyan konvex test generálja amelynek határa síma, szigorúan konvex azaz nem tartalmaz pozitív mértékű sík régiókat, és a felülete csak véges mértékben érintkezik az érintő hipersíkkal minden pontban akkor a 3.1 és 3.2 tételek igazak maradnak. Ennek oka hogy ekkor a felületi mérték Fourier transzformáltja kielégíti a

$$\widehat{dS}(\xi) = O(|\xi|^{-\delta}),$$

feltételt, valamilyen pozitív $\delta = \delta(S)$ konstanssal ami elégséges a szimplexek esetében, továbbá a regularitási lemma segítségével kiterjeszthetők a tételek szimplexek direkt szorzatára is. A diszkrét esetben a tételek várhatóan igazak maradnak (elegendően nagy dimenzióban) ha távolságot egy pozitív homogén egész-együtthatós konvex polinom generálja. További vizsgálatokat igényelnek a határesetek ahol a test határa szigorúan konvex de nem síma.

A távolságot megadó normáknak fontos szerepük van a geometriai Ramsey típusú tételekben. Ha euklideszi normával definiáljuk a távolságot akkor a 3. fejezetben leírt Ramsey tételek nem igazak olyan pont-konfigurációkra melyet nem tartalmazza egy gömbfelület, azaz nem szférikus. Ide tartozik Graham, a "Recent trends in Euclidean Ramsey theory" (Discrete Mathematics, 136(1-3), (1994) pp.119-127) cikkében megfogalmazott alapvető sejtése amely szerint Bourgain tétele igaz marad minden szférikus véges S ponthalmazra. Eszerint minden pozitív felső sűrűségű A halmaz tartalmazza az S konfiguráció λ -szoros felnagyított képének egy izometrikus mását, *minden* elegendően nagy λ -ra.

Ha azonban a távolságot nem az euklideszi normával definiáljuk akkor Graham sejtése igaz maradhat nem szférikus konfigurációkra is. Ilyen eredményt a $\{x - y, x, x + y\}$ konfigurációra, a Cook és Pramanikkal írott közös cikkünk "A Roth-type theorem for dense subsets of R^d " (Bull. London Math. Soc. 49/4 (2017): 676-689) tartalmaz. A cikkben leírt módszerek átvihetők bizonyos más konfigurációkra is amelynek pontjai között vannak lineáris relációk; ebben az esetben a Fourier transzformált helyett a Gowers típusú úgynevezett U^s -uniformitási normáknak van alapvető szerepe. Ahhoz hogy a fenti cikkünkben leírt módszerek kiterjeszthetők legyenek egy $q(x)$ pozitív, konvex homogén függvény által definiált távolságra, szükséges egy

$$\|x \rightarrow e^{itq(x)}\|_{U^s([0,1]^d)} = O(t^{-1-\delta})$$

típusú becslés. Ehhez elégségesnek tűnik ha a $q(x)$ egy $d \geq s$ fokú konvex, homogén polinom aminek a (Birch) rangja megfelelően nagy; ez kiindulópontja lehet további Ramsey típusú eredményeknek mind a mind a folytonos mind a diszkrét környezetben.

2025 December 2.

Magyar Ákos
Magyar Ákos