

Bírálóí vélemény Magyar Ákos
”Diofantikus egyenletek
és diszkrét harmonikus analízis” c. doktori munkájáról

Biró András, 2025. szeptember

Az értekezés a harmonikus analízis, ergodelmélet, számelmélet határterületeihez tartozó problémákkal foglalkozik.

Az öt fejezet közül az első és az ötödik szorosan kapcsolódik Bourgain híres polinomiális ergodtételéhez. Bourgainnek ez a tétele a klasszikus Birkhoff-féle ergodtételt terjeszti ki $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^n x)$ alakú átlagokról $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^{p(n)} x)$ alakú átlagokra, ahol p egy olyan egész együtthatós polinom, amelyre $p(0) = 0$, és T egy invertálható mértéktartó transzformáció. Bourgain a tétel többdimenziós, azaz

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f\left(T_1^{p_1(n)} \dots T_k^{p_k(n)} x\right)$$

alakú átlagokra vonatkozó változatát is kidolgozta, ahol $T_1, \dots, T_k$ páronként felcserélhető invertálható mértéktartó transzformációk, $p_1, \dots, p_k$ pedig olyan egész együtthatós polinomok, amelyekre $p_i(0) = 0$.

Az értekezés 1. fejezetének a fő tétele többváltozós homogén polinomok szinthalmaizaira terjeszti ki a Birkhoff-tételt, azaz a következő szituációra:

$Q(x_1, \dots, x_k)$ egy egész együtthatós pozitív homogén polinom, az

$$\frac{1}{r_Q(\lambda)} \sum_{Q(m_1, \dots, m_k) = \lambda} f(T_1^{m_1} \dots T_k^{m_k} x)$$

alakú átlagokat tekintjük, ahol $T_1, \dots, T_k$ a fenti feltételeket kielégítő transzformációk, a λ pozitív egész tart ∞ -hez, és $r_Q(\lambda)$ a $Q(m_1, \dots, m_k) = \lambda$ megoldásszáma egész m_i -kben. A tételben szükséges feltenni Q -ra egy bizonyos nemelfajulási, λ -ra egy kongruencafeltételt, és hogy $(T_1^q, \dots, T_k^q)$ ergodikus minden $q \geq 1$ -re.

A probléma nehézségét mutatja, hogy az $r_Q(\lambda)$ megoldásszámok aszimptotikus becslése önmagában is nehéz klasszikus kérdés a diofantikus egyenletek elméletében.

Az 5. fejezet fő tétele a többdimenziós Bourgain-féle polinomiális ergodtételt terjeszti ki: a feltétel itt az, hogy a $T_1, \dots, T_k$ transzformációk olyan nilpotens csoportot generálnak, amelynek a nilpotencia osztálya 2.

Ez igen jelentős eredmény, hiszen Bourgain tételét kiterjeszti egy nemkommutatív szituációra, és belátja a nevezetes Furstenberg-Bergelson-Leibman sejtés egy speciális esetét. A bizonyítás annyira összetett, hogy a publikált változata 100 oldalnál hosszabb, így a disszertáció a bizonyításnak csak egy vázlatát tartalmazza. Ebből a vázlatból is jól látható azonban, hogy mennyi új nehézséget okoz a nemkommutatív eset, és jól követhetők a fő gondolatok.

A 2. és 3. fejezet Bourgain egy másik tételével áll szoros kapcsolatban. Ez a Bourgain-tétel azt mondja ki, hogy ha $k \geq 2$, $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ egy nemelfajuló szimplex csúcshalmaza $\mathbf{R}^k$ -ban és $A \subseteq \mathbf{R}^k$ egy pozitív felső sűrűségű halmaz, akkor minden X -től és A -tól függően elég nagy $\lambda > 0$ esetén A tartalmazza λX egy izometrikus képét.

A 2. fejezet fő eredménye ennek a tételnek egy diszkrét változata. Azt mondja ki, hogy ha $k \geq 2$, $X = \{0, x_1, \dots, x_k\}$ egy nemelfajuló szimplex $\mathbf{R}^n$ -ben egy $n > 2k + 4$ -re, az (x_i, x_j) skaláris szorzatok egészek és $A \subseteq \mathbf{Z}^n$ egy pozitív $\delta(A)$ felső sűrűségű halmaz, akkor van egy olyan, csak $\delta(A)$ -tól függő $Q > 0$ egész, hogy minden X -től és A -tól függően elég nagy $\lambda > 0$ egész esetén A tartalmazza $Q\sqrt{\lambda}X$ egy izometrikus képét.

Ennek a tételnek kvantitatív változata is szerepel a 2. fejezetben.

A 3. fejezet kiterjeszti mind Bourgain tételét, mind annak a 2. fejezetben bizonyított diszkrét változatát szimplexek helyett szimplexek direkt szorzatára.

A 4. fejezet általános diofantikus egyenletrendszerek prímeiben való megoldhatóságát vizsgálja. A fő eredmény aszimptotikus formulát ad a megoldásszámra feltéve, hogy az egyenletrendszer rangja elég nagy az egyenletek számához és fokához képest.

Ilyen általános eredmény ebben a témakörben nem volt ismert korábban.

Összefoglalóan elmondható, hogy a disszertáció fontos, az adott témakörökben folyó kutatások centrumába tartozó problémákkal foglalkozik, és mély eredményeket ér el ezekkel kapcsolatban. A bizonyítások sokféle analízisbeli, ergodelméleti és számelméleti eszközöket használnak. Ezek alapján egyértelmű, hogy a jelölt bőségesen teljesíti az MTA doktori cím odaítéléséhez szükséges feltételeket.

A disszertáció mindegyik fejezete az eredmények és a bizonyításvázlatok jól követhető áttekintésével kezdődik.

Megjegyzem, hogy a disszertáció és a tézisfüzet is számos apró elírást tartalmaz, de ezek nem értelemzavaróak.

Egy kérdésem van a jelölthöz:

Lehetséges-e ergodtételt bizonyítani a 4. fejezetben tekintett általános diofantikus egyenletrendszerek prímeiből álló megoldásaira? Azaz belátható-e ergodtétel az

$$\left(\sum_{(p_1, \dots, p_k) \in [N]^k \cap V} 1 \right)^{-1} \sum_{(p_1, \dots, p_k) \in [N]^k \cap V} f(T_1^{p_1} \dots T_k^{p_k} x)$$

átlagokat tekintve $N \rightarrow \infty$ esetén, ahol p_i -k prímek, a V olyan komplex affin varietás, mint amilyenről a 4. fejezet 1. bekezdésében szó van, és a T_i -k páronként felcserélhető invertálható mértéktartó transzformációk?

A nyilvános védés kitűzését és az MTA doktori cím odaítélését határozottan javaslom.


Biró András, az MTA doktora