

Magyar Ákos
Diofantikus egyenletek és diszkrét harmonikus analízis
MTA doktori értekezésének bírálata

Az ergodelmélet a dinamikus rendszerek hosszú távú átlagos viselkedését vizsgálja. Gyökerei a 19. század végéig nyúlnak vissza, amikor Boltzmann bevezette az ergodikus hipotézist a statisztikai mechanikában. A 20. század elején von Neumann és Birkhoff úttörő munkái alapozták meg a modern ergodelméletet, bizonyítva az átlagok konvergenciáját. Az elmélet azóta kulcsfontosságúvá vált a matematika, fizika és más tudományágak számos területén, segítve megérteni a kaotikus és bonyolult rendszereket.

Az első fejezet, "Diophantine equations and ergodic theorems" (Diofantikus egyenletek és ergodikus tételek), az ergodikus tételeket tárgyalja, amelyek bizonyos diofantikus egyenletek megoldásainak eloszlási egyenletességét mutatják be.

Kiemeli Bourgain polinomiális ergodikus tételét és annak kapcsolatát diszkrét maximális operátorok L^p korlátosságával. A fejezet bemutatja a megoldáshalmazok eloszlását vizsgáló fő eredményeket, különösen akkor, amikor azokat egy ergodikus transzformáció-család révén mérőterre képezik le.

A fejezetből kiemelendő a törekvés, hogy a diofantikus egyenletek megoldáshalmazait ergodelméleti kontextusba helyezi, ezzel hidat képezve a számelmélet és a dinamikus rendszerek között. A 1.4. Tétel különösen érdekes, mivel ez egy diszkrét analógja egy maximális tételnek $\mathbb{R}^n$ -ben, és kulcsszerepet játszik a pontonkénti ergodikus tétel bizonyításában. Ugyanakkor a 1.2. Lemma az irracionális pontok becslését egyáltalán nem tartom elegánsnak, de fontos a diofantikus egyenletek megoldás halmazainak eloszlási tulajdonságainak megértéséhez.

A 2. fejezet ("Diofantikus egyenletek és diszkrét harmonikus analízis") a diofantikus egyenletek és ergodikus tételek kapcsolatával foglalkozik, és

elsősorban a szimplexekre koncentrálnak az egészsrácson. Ebben a fejezetben kiemelten érdekesnek találtam a 2.1. Tételt.

Ez a tétel kimondja, hogy ha $k \geq 2$ és a dimenzió $n > 2k + 4$, akkor bármely pozitív felső sűrűségű $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ halmaz tartalmazza az összes integrális k -dimenziós szimplex, Δ esetén, annak $\sqrt{\lambda}Q\Delta$, elegendően nagyra felnagyított másolatát. Az "elegendően nagyra felnagyított másolat" azt jelenti, hogy a felnagyított faktor λ egy bizonyos küszöbérték Λ felett van. Ez a tétel tehát azt garantálja, hogy sűrű halmazokban megtalálhatóak a szimplexek nagyított változatai. Itt felmerült bennem a kérdés: Vajon általánosítható-e az eredmény olyan szimplexekre, amelyben van még egy pont, nevezetesen a szimplex súlypontja?

A 3. fejezet ("A weak hypergraph regularity lemma and products of simplices in sets of positive density") kiterjeszti ezeket az eredményeket bonyolultabb konfigurációkra, nevezetesen a téglalaprakításokra és a szimplexek direkt szorzataira, mind euklideszi terekben, mind az egészsrácson. Itt is megkérdezném, hogy vajon ez az eredmény általánosítható-e olyan kockákra, amelyek tartalmazzák a súlypontjukat is pluszban? Ugyanakkor, amikor súlypontok is képbe kerülnek, a probléma hirtelen jelentősen bonyolultabbá válhat.

A disszertáció 4. és 5. fejezetében Magyar Ákos azt kutatja hogyan oldhatók meg (és hányféleképpen) rendkívül bonyolult Diofantikus egyenletek, ahol a megoldásokat korlátozott számkörökből (pl. prímszámokból) kell választani. Emellett azt is vizsgálja, hogy ha matematikai objektumok nagyon komplex, "polinomiális" módon mozognak, akkor vajon mégis van-e valamilyen rendezettség és egyenletes eloszlás a hosszú távú viselkedésükben. A munka rendkívül elvont és elméleti, de alapvető kérdéseket feszeget a matematika mélyén, és új eszközöket vezet be komplex problémák megoldására.

A számelméletben, különösen a prímszámok és diofantikus egyenletek metszéspontjában, rendkívül releváns kutatási terület a Waring-probléma általánosításainak vizsgálata. A klasszikus Waring-probléma, mely a termé-

szetes számok k -adik hatványok összegeként való előállításával foglalkozik, számos mély eredményt hozott.

Azonban ennél is összetettebb kérdést vet fel, ha a hatványok alapjait prímszámokra korlátozzuk. Például, a négyzetszámok esetében: vajon igaz-e, hogy létezik olyan k egész szám, hogy minden elegendően nagy természetes szám előáll k darab prímszám négyzetének összegeként? Ismertek-e erre vonatkozóan aszimptotikus eredmények a szakirodalomban? Ez a kérdés természetesen magasabb kitevős hatványokra is általánosítható.

Még izgalmasabb fordulatot vehet a probléma, ha a hatványok helyett gyököket (inverz hatványokat) vizsgálunk, azaz: igaz-e, hogy minden elegendően nagy természetes szám előáll k darab prím gyökének összegeként? Vagy itt a helyzet gyökeresen más, és létezik olyan N_0 szám, amely fölött egyetlen természetes szám sem áll elő ilyen alakban?

Kérdezném a jelöltet, hogy az értekezésében alkalmazott ergodelméleti módszerek, illetve a Hardy-Littlewood kör módszer és annak kiterjesztései – különös tekintettel a nilpotens csoportokhoz kapcsolódó, nem-kommutatív megközelítésekre – alkalmazhatóak-e, vagy potenciálisan alkalmazhatóak-e az ilyen bonyolultabb, "prím alapú" vagy "gyök alapú" Waring-típusú problémák vizsgálatára? Milyen analitikus vagy algebrai kihívásokat jelenthetnek ezek az esetek az általa bemutatott technikai apparátus számára?

Az értekezésben elszórtan előfordulnak apróbb tipográfiai hibák, ezek közül felsorolom azokat, amelyeket megtaláltam:

diophantine $\rightarrow$ Diophantine (többször)

stein $\rightarrow$ Stein

Nota that $\rightarrow$ Note that

whi $\rightarrow$ who

amall $\rightarrow$ small

multiplied $\rightarrow$ multiplied

thusly $\rightarrow$ thus

Bizonyos vagyok benne, hogy ez a pár elírás nem szándékos. De, az is lehet, hogy a fájl az egyik adathordozónak a másikra transzformálása során a disszertáció szövegének egy-egy bitje megváltozott. A disszertáció matematikai tudományos értékét és a kutatás mélységét azonban ez semmiképpen nem befolyásolja.

Összefoglalva: Magyar Ákos jelen doktori értekezése mélyreható és eredeti kutatást mutat be a diofantikus egyenletek, a diszkrét harmonikus analízis és az ergodelmélet metszéspontjában. Az értekezés kiemelkedő hozzájárulást jelent a prímszámokban keresett diofantikus megoldások eloszlásának elméletéhez, valamint polinomiális ergodikus tételek – különösen a Furstenberg–Bergelson–Leibman-sejtés – bizonyításához. Az alkalmazott komplex analitikus és algebrai módszerek igazolják a jelölt kivételes szakértelmét és a terület iránti elkötelezettségét. **Mindezek alapján javaslom a doktori védés megtartását, és az MTA doktora cím odaítélését.**

Budapest, 2025 június 29.

Dr. Gyarmati Katalin
ELTE TTK, Matematikai Intézet
(egyetemi docens)