

Válasz Vígh Viktor bírálataira

Naszódi Márton jelölt

Nagyon köszönöm Vígh Viktornak a dolgozat gondos olvasását és értékelését.

A bíráló **első kérdése** az, hogy az 1. fejezetben használt kombinatorikus technikának – az 1.3 lemmát használva – van-e kapcsolata a Bárány–Larman-féle sapkafedési tétellel. Igen, nagyon szoros a kapcsolat, amit itt részletesen kifejték.

Egy K konvex test metszetét egy féltérrel hívhatjuk *sapkának*. Többféle módon kapott sapkát is lehet használni. Egyrészt tekinthetjük azokat, melyek térfogata $\varepsilon \text{vol}(K)$ valamely $\varepsilon \in (0, 1)$ számra, másrészt azokat, amelyeknél a féltér határoló H hipersíkja a K egy támaszhipersíkjának adott távolságú eltoltja, harmadrészt pedig az olyan sapkákat, melyeknél H az $\frac{1}{\lambda}K$ test egy támaszhipersíkja (ahol $\lambda > 1$, és a féltér nem tartalmazza $\frac{1}{\lambda}K$ -t). Ezek a különböző sapka-fogalmak valamelyest átjátszhatók egymásba, ahogy az Bárány és Larman munkáiból világosan kiderül.

Mi a harmadik típusú sapkával foglalkozunk, persze feltételezve, hogy K a belsejében tartalmazza az origót. Adott λ esetén ezen sapkák családjának keressük egy kis elemszámú T lefogó pontthalmazát azért, hogy ezáltal egy kevés csúccsal rendelkező konvex politóppal ($P = \text{conv}(T)$) közelítsük K -t.

A Sapkafedési tétel használata is pontosan ez: sapkák családját lehet segítségével hatékonyan lefogni. A két módszer között két különbség van. A kisebbik az, hogy a Sapkafedési tétel, ahogyan eredeti változatában ki van mondva, térfogattal adott sapkákkal foglalkozik, míg mi, tekintve, hogy $P \subseteq K \subseteq \lambda P$ alakú közelítést keresünk, ezért a harmadik típusúakat vizsgáljuk. Ez a különbség még áthidalható lenne a sapka-típusok közötti fent említett 'átjátszással'. A nagyobb különbség az, hogy a Sapkafedési tétel csak nagyon kis térfogatú sapkákat kezel, a feltételei között szerepel, hogy $\varepsilon < (2d)^{-2d}$. Ezért azzal csak nagyon finom közelítést tudunk elérni.

A bíráló **második kérdése** az, hogy módosítható-e a 4. fejezetbeli, gömbhöz közeli, de exponenciálisan nagy megvilágítási számmal rendelkező K test konstrukciója úgy, hogy K politóp legyen. Igen.

Ugyan nem ismert olyan általános állítás (bár nagyon érdekes lenne), hogy tetszőleges K test közelíthető olyan konvex politóppal, melynek megvilágítási száma (nagyjából) legalább annyi, mint K megvilágítási száma, ennél a konstrukciónál ez mégis megtehető. Ennek az az oka, hogy a 'tüskés gömb' (*spiky ball*), K , megvilágítási számára azáltal kapunk alsó korlátot, hogy K tüskéinek csúcsában pontosan tudjuk, hogy a megvilágítási tartomány (tehát azon irányok halmaza, amelyek a csúcsot megvilágítják) micsoda: egy ismert sugarú gömbsapka. A megvilágítási szám megegyezik az ezen gömbsapkák családját lefogó pontthalmaz minimális elemszámával. Ha kicsit nagyobb gömbsapkák családját tekintjük, a lefogó pontthalmaz

minimális elemszáma ugyan csökken, de d -ben, a dimenzióban, exponenciálisan nagy marad. Márpedig ha K -t olyan politóppal közelítjük finoman, amely tartalmazza a tüskék csúcsait, akkor minden egyes tüskecsúcs megvilágítási tartománya benne van egy az eredetinel csak kicsit nagyobb gömbsapkában. Ezen kicsit megnövelt gömbsapkák családjának is exponenciálisan nagy a lefogási száma, sőt, tetszőlegesen közel lehet az eredeti gömbsapka-család lefogási számához.

Megjegyzem, hogy a konstrukció kicsit alaposabb vizsgálatából az is kiderül, hogy elérhető, hogy a közelítő politóp azon csúcsainak a megvilágítási tartománya, amelyek K -nak tüskecsúcsai voltak, *része legyen* a K -nál kapott megvilágítási tartomálynak. Ehhez az kell, hogy a gömbből is sok pontot válasszunk elérve, hogy (hasonlóan K -hoz) a kapott P politópban is igaz legyen, hogy a tüskecsúcsok egymás megvilágítási tartományait „nem zavarják”. Ezáltal a megvilágítási számokra azt kapjuk, hogy $i(P) \geq i(K)$.

Tisztelettel,



Naszódi Márton

Budapest, 2026. január 29.