

Opponensi vélemény Naszódi Márton doktori pályázatáról

Naszódi Márton tehetséges matematikus, aki elsősorban a diszkrét és konvex geometriában, azon belül is approximációs kérdésekkel, fedési problémákkal, és Helly híres és több mint százéves tételének általánosításaival foglalkozik. Ez a terület nemzetközi szinten is nagyon aktív és népszerű kutatási téma, és az itteni kérdéskörnek rengeteg alkalmazása van. A disszertáció Naszódi Márton ilyen irányú eredményeit ismerteti, és körülbelül 10 cikkből van felépítve.

A dolgozat három részből és összesen nyolc fejezből áll. Most rátérek ezek részletesebb ismertetésére. Az első rész approximációs kérdéseket tárgyal: Egy adott $\mathbb{R}^d$ -beli K konvex halmazt milyen pontossággal lehet megközelíteni egy "kevés" csúcsú politóppal. Az első két eredmény (1.1 és 1.2 Tétel) arról szól, hogy egy beírt véletlen politóp nagy valószínűséggel jól approximál. Az 1.2 Tétel az erősebb (kimondása viszont bonyolultabb) és következik belőle az 1.1 Tétel, amely szerint ha a véletlen pontok száma $t = 60(d+1)$, akkor konvex burkuk legalább $1 - 4e^{-d-1}$ valószínűséggel tartalmazza $(1/d)K$ -t (feltéve hogy K súlypontja az origóban van). A bizonyítás szép és érdekes, kombinatorikai módszereket használ, például a VC dimenzió fogalmát, és Haussler és Welzl egy híres eredményét. Továbbá szükség van Grünbaum egy egyenlőtlenségének a stabilitására. Naszódi felismeri, hogy ez kell és be is bizonyítja. Megjegyzem, hogy ezek a tételek Giannopoulos és Milman illetve Brazitikos, Chasapis és Hioni korábbi eredményeit általánosítják és javítják.

Másirányú approximációról szól a 2.1 Tétel: hány csúcs kell ahhoz, hogy a K konvex testet közelítő P politópra fennálljon az $(1 - \varepsilon)K \subset P \subset K$ reláció? (K súlypontja megint az origóban van). A válasz az, hogy $C_d \varepsilon^{(d-1)/2}$. Ez javítja Barvinok egy korábbi hasonló eredményét. A bizonyítás nagyon ötletes, technikailag nehéz és hosszú. Két speciális tulajdonságoknak eleget tevő mértéket kell konstruálni, egy segéd konvex testet kell definiálni. Szükség van még a Bronstein-Ivonov féle hálóra és Rogers egy tételére. Az erről szóló cikk, ami Nazarov és Ryaboginnal közös, a nagyon rangos Journal of the AMS-ben jelent meg 2020-ban.

A második rész fedési és illuminációs kérdéseket tárgyal. A fedésekre vonatkozó eredmények kimondásához sok előkészület kellene. Emiatt csak azt említem meg itt, hogy a 3.2 Tétel az $N(K, L)$ fedési számra ad felső

becslést az $N^*(K, L)$ frakcionális fedési szám függvényében. Minden ilyen irányú egyenlőtlenség érdekes. (Itt $N(K, L)$ a K -t fedő L -eltoltak minimális számát jelöli, K és L Borel mérhető halmazok R^d -ben.) A 4.1 Tétel alsó exponenciális becslést ad $N(K, \text{int}K)$ -ra. Pontosabban igazolja, hogy van olyan 0-szimmetrikus K konvex test R^d -ben (elég nagy d esetén), amire a K illuminációs konstansa, vagyis $N(K, \text{int}K)$ nagyobb mint $0.05D^d$ és $\frac{1}{D}B^d \subset K \subset B^d$, ahol $D \in (1, 1.116)$ egy adott szám. Naszódi véletlen módszerrel konstruálja meg az itt szereplő K konvex testet. Ez a konstrukció meglepő és szép, a bizonyítás valószínűségiszámítási és kombinatorikus eszközöket használ. A tézisekben (12 oldal) az $\frac{1}{D}B^d \subset K \subset B^d$ sajtóhiba zavaró.

A harmadik részben kvantitatív Helly típusú tételek szerepelnek. Ez az a téma, amely legközelebb van hozzám. Egy régi, 1984-es (Pach és Katchalskival közös) cikkben bizonyítottuk, hogy ha R^d -beli konvex halmazok egy véges családjában bármely $2d$ halmaz metszetének térfogata legalább egy, akkor a család összes tagjának metszete legalább $c_d = d^{-2d^2}$ térfogatú. (Itt a "térfogatos" $2d$ Helly szám nem javítható.) Azt sejtettük, hogy ugyanez igaz $c_d = d^{-cd}$ -vel is alkalmas $c > 0$ abszolút konstanssal. Ezt a sejtést igazolta Naszódi Márton, lényegében $c_d \approx d^{-2d}$ formában. Ez az 5.1 tétel disszertációban, erről szóló cikke a rangos Discrete and Computational Geometryben jelent meg 2016-ban. A bizonyítás Fritz John klasszikus eredményét használja. A John féle identitás felírásban

$$\sum_1^m c_i w_i = 0 \text{ and } \sum_1^m c_i w_i \otimes w_i = \text{Id},$$

és a w_i kontakt pontok közül d darabot kell ügyesen kiválasztani úgy, hogy az általuk és az origó által meghatározott szimplex térfogata elég nagy legyen. Ehhez a Dvoretzky-Rogers lemmát használja, és még további geometriai és kombinatorikus észrevételek kellenek, illetve egy jól megválasztott polaritás. Szép és elegáns bizonyítás. Talán ez az eredmény Naszódi Márton eddigi legszebb és legismertebb tétele.

Hasonlóan szép és jelentős a színezett Helly számra vonatkozó 6.3 Tétel és a kvantitatív Steinitz tétel (7.3 Tétel). Ez utóbbi Grigirij Ivanovval közös eredmény. Vele Naszódi nagyon sikeresen dolgozik, de további eredményeiket itt hely és idő hiányában nem ismertetem.

A fenti tételek bizonyításához Naszódi Márton a konvex geometria szokásos

eszköztárán kívüli módszereket is gyakran és sikeresen használ, például a valószínűségi és kombinatorikai módszereket.

A disszertáció szépen megírt, gondosan elkészített munka. Összesen 128 oldal, talán túl hosszú, ami sok munkát követel meg a lelkesmeretes olvasótól. Mint már mondtam, több angolul megjelent cikk alapján lett összeállítva.

A jelölt publikációs tevékenysége számszerűleg és minőségileg is bőven megfelel a doktori követelményeknek: több mint ötven publikált cikk, néhány közülük konferencia kiadványban is megjelent. Többségük nívós folyóiratban, a matematika vezető újságjaiban jelent meg, mint például Discrete and Computational Geometry, Combinatorica, Journal Comb. Theory A, Bulletin of the LMS, Journal of the AMS. A jelölt idézettsége teljesen megfelelő: sok dolgozat hivatkozik az ő munkáira.

Naszódi Márton tehetséges matematikus, a magyar geometriai iskola egyik jelentős alakja, aki a konvexitás és a diszkrét geometria több területén is fontos, nemzetközi visszhangot kiváltó eredményt ért el, aki ennek a kutatási területnek egyik vezető szakértője.

Összefoglalva: Naszódi Márton sokat és eredményesen dolgozó matematikus. Tudományos eredményei és disszertációja bőven eléri a doktori szintet. A fentiek alapján Naszódi Mártont az akadémiai doktori címre teljes mértékben alkalmasnak találom, és határozottan azt javaslom, hogy a doktori bizottság támogassa a cím odaítélését.



Bárány Imre

Budapest, 2025 július 14.