

langi.zsolt_176_24

Egyenlőtlenségek a diszkrét és konvex geometriában

(Inequalities in Discrete and Convex
Geometry)

MTA doktori disszertáció tézisfüzete

Lángi Zsolt
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet
Magyarország

2024

1. BEVEZETÉS

1.1. Történeti áttekintés. A geometriai egyenlőtlenségek fontos szerepet játszottak a matematika történetében. Az egyik első dokumentált geometriai egyenlőtlenség Zenodórosz nevéhez fűződik [6], aki kb. i.e. 150. körül belátta, a kor standardjának megfelelő egzaktságú szinten, hogy a sík adott kerületű tartományai közt a körlemez területe maximális. Ezen állítást *izoperimetrikus egyenlőtlenségnek* nevezzük, ami antik eredete ellenére nagy hatással bír még ma is, számos változattal és alkalmazással, melyek közül néhány ebben a disszertációban is megjelenik.

A disszertáció célja hasonló szélsőérték-problémák megoldása, és ezekhez kapcsolódó kérdések vizsgálata. Az itt tárgyalt problémák a diszkrét és konvex geometria témaköréhez kapcsolódnak. Ezen részben átfedő területek, bár a gyökereik az ókori görögökhöz vezetnek vissza, a matematika viszonylag fiatal ágának számítanak, kialakulásuk a 19. század második feléig, illetve a 20. század első feléig vezethető vissza. Ide tartoznak geometriai objektumok véges, vagy diszkrét családjaihoz kapcsolódó kérdések, valamint konvex halmazok tulajdonságainak vizsgálata. A diszkrét és konvex geometriai kutatások amellett, hogy századok óta nyitott kérdések megoldásához járultak hozzá (ld. [51]), számos új kérdést is felvetettek, melyek némelyike meglepő válaszhoz vezetett.

A második fejezet témája ezen problémák egyike, a Borsuk probléma. Ez a probléma Karol Borsuk lengyel matematikus egy sejtéséhez kötődik [18], mely szerint minden $D > 0$ átmérőjű halmaz az $\mathbb{R}^d$ d -dimenziós euklideszi térben felbontható $d + 1$ halmaz uniójára, melyek átmérői szigorúan kisebbek, mint D . A sejtést több speciális esetben igazolták [18, 34, 45, 53, 73, 74, 49, 50], de az általános eset 1993-ig nyitott maradt, amikor Kahn és Kalai [57] adott rá egy ellenpéldát. Eredményük ellenére a korlátos halmazok *Borsuk számának* meghatározása, azaz az a kérdés, hogy egy S korlátos halmazt legalább hány részre kell bontani, ha mindegyik rész átmérője szigorúan kisebb S átmérőjénél, a diszkrét geometria egyik alapvető problémája. A Borsuk probléma számos általánosítása és változata jelent meg a szakirodalomban. A fejezet célja halmazok k -szoros *Borsuk számának* vizsgálata euklideszi térben, és az [55] cikk eredményeit mutatja be. A fogalom normált terekre vonatkozó változatáról a [62] cikkben találhatunk információt.

Erdős Pált követve mondjuk azt, hogy konvex testek egy véges családja az euklideszi térben *nemszeparálható*, ha bármely hipersík, mely metszi a testek uniójának konvex burkát, metszi valamelyik testet is.

Erdős egy sejtése szerint körlemezek tetszőleges nemszeparálható családját a síkon lefedhető egy olyan körlemezrel, melynek sugara a körök sugarainak összege. Ezt a sejtést Goodman és Goodman igazolta 1945-ben [43], akik azt az általánosabb sejtést tették, hogy egy konvex test $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ arányú pozitív homotetikus képeinek tetszőleges nemszeparálható családját lefedhető a test egy $\sum_{i=1}^n \tau_i$ arányú homotetikus képével. Ezt a sejtést Bezdek és Lángi cáfolta 2016-ban [12], akik emellett belátták a sejtést több speciális esetben. A harmadik fejezetben a [12] cikkbeli eredményeket mutatjuk be.

A konvex testek statikai egyensúlyi pontjainak vizsgálata Arkhimédész munkásságával kezdődött, és végigkísérte a természettudományok történetét több különböző tudományágban is [31, 82, 86, 15, 83, 1, 32]. A modern matematikán belül a fenti fogalom vizsgálata Conway és Guy egy 1966-os problémájával kezdődött [23], akik felvetették, hogy nincs olyan homogén (azaz állandó sűrűségű) tetraéder melynek csak egy lapjára igaz, hogy ezen lapjával vízszintes síkra lerakva egyensúlyban marad, de van olyan homogén konvex poliéder, melyre ez a tulajdonság teljesül. Ezen kérdéseket Goldberg és Guy [42] válaszolta meg 1969-ben, akik a fenti tulajdonságú poliédereket *monostabil* vagy *unistabil* poliédereknek nevezték. A fenti bizonyítások mellett a [42] cikkben Guy felsorolt néhány monostabil poliéderekre vonatkozó problémát, melyekről háromról azt állította, Conwaytól erednek (ugyanezen kijelentés található pl. a [24] könyvben és a [26, 33] cikkekben). Ezen három kérdés Problem B12 néven megjelent a [24] könyvben is, valamint egyikük, több más monostabil poliéderekre vonatkozó kérdéssel együtt, megjelent Shephard egy 1968-as cikkében [79] is. A disszertáció negyedik fejezetében ezen három kérdés közül kettő megoldását mutatjuk be, melyek a [61] cikkben jelentek meg. A cikk alapja egy sima testek politópokkal való approximációjáról szóló tétel. A tétel a fenti eredmény egy erősebb verziójához vezetett [30], melyben Domokos, Várkonyi és a dolgozat szerzője karakterizálta a Gömböc-osztályú, azaz mono-monostatikus konvex poliéderek szimmetriacsoportjait.

Az euklideszi d -dimenziós térhez tartozó K, L halmazok Minkowski összegét a $K+L = \{x+y : x \in K, y \in L\}$ módon definiáljuk, és az egyszerűség kedvéért bevezetjük az $A[k] = \sum_{i=1}^k A$ jelölést minden $k \in \mathbb{N}$ egész és minden $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz esetén. Bobkov, Madiman és Wang [14] egy sejtése azt állítja, hogy a $\{\text{vol}(\text{conv}(A) \setminus \frac{1}{k}A[k])\}_{k \geq 1}$ sorozat monoton csökkenő, vagy ekvivalens módon, a $\{\text{vol}(\frac{1}{k}A[k])\}_{k \geq 1}$ sorozat monoton növekvő. Ezt a sejtést Fradelizi, Madiman, Marsiglietti és Zvavitch részben megoldotta a [38, 39] cikkekben, ahol a [48] cikk megközelítését követve igazolták a sejtést minden 1-dimenziós kompakt

halmazra, de konstruáltak ellenpéldát $\mathbb{R}^d$ -ben minden $d \geq 12$ egészre. Itt érdemes megjegyezni, hogy az általuk konstruált ellenpélda csillagszerű halmaz volt. Általánosabban a szerzők azt is megmutatták, hogy tetszőleges rögzített $k \geq 2$ egész esetén minden elegendően nagy d egészre létezik olyan S csillagszerű, kompakt halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, melyre $\text{vol}(\frac{1}{k}A[k]) > \text{vol}(\frac{1}{k+1}A[k+1])$ egyenlőtlenség teljesül. Ezen eredmény ellenpontjának tekinthető Fradelizi, Lángi és Zvavitch [37] egy eredménye, mely szerint minden rögzített d dimenzió esetén minden $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, csillagszerű halmazra a $\{\text{vol}(\frac{1}{k}A[k])\}_{k \geq 1}$ sorozat monoton nő elegendően nagy k értékekre. Ez, és egy kompakt, összefüggő síkbeli halmazokra vonatkozó hasonló eredmény található a disszertáció ötödik fejezetében.

A hatodik fejezetben 3-dimenziós konvex paralleloédereket, azaz olyan konvex poliédereket vizsgálunk, melyek eltoltjai átfedés nélkül és hézagmentesen kitöltik az $\mathbb{R}^3$ teret. Minden 3-dimenziós paralleloéder előáll legfeljebb hat szakasz Minkowski összegeként, melyek kielégítenek előírt lineáris összefüggőségi relációkat, így mindegyik 3-dimenziós paralleloéder egy *zonotóp*. A paralleloéderek kapcsolatban vannak a rácsszerű gömbpakolások Voronoi celláival is Voronoi híres megoldatlan sejtésén keresztül, mely szerint minden paralleloéder egy ilyen Voronoi cella affin képe. Ezen poliéder-család tagjai közt tudhat több igen ismert poliédert; elemei közt szerepel pl. a kocka, a szabályos rombikus dodekaéder és a szabályos csonkolt oktaéder, ahol a két utóbbi poliéder rendre a lapcentrált, valamint a tércentrált kockarács Voronoi cellája. A geometriában ismert szerepük ellenére a szakirodalomban lényegében nem szerepel (Hales híres bizonyításától eltekintve, melyben belátta a Kepler sejtést) paralleloéderekre vonatkozó geometriai szélsőérték-probléma megoldása. A [60] cikkben végzett munkát ismertette ebben a fejezetben bemutatjuk egy 3-dimenziós paralleloéderekre vonatkozó geometriai szélsőérték-feladat megoldását, és ismertetjük ennek kapcsolatát Lord Kelvin minimális felszínű térbeli mozaikokra vonatkozó 1887-es sejtésével [58].

A hetedik fejezet témája zonotópokra vonatkozó izoperimetrikus egyenlőtlenségek. Ezen, véges sok szakasz Minkowski összegeként definiált konvex halmazok a 20. század közepe óta vannak a geometriai kutatások fókuszában, és a matematika számos területével kapcsolatosak. Erre példaként megemlíthetjük a centrált hipersík-elrendezések kombinatorikus tulajdonságait [46, 88], konvex testek vetületeinek tulajdonságait [70, 40], de a zonotópok kapcsolatban állnak paralleloéderekkel [35, 69], és megjelennek a rácsgometriában is [63, 54, 7]. Zonotópokat gyakran használnak az elméleti matematikán kívül [3, 8, 47].

A zonotópokra vonatkozó izoperimetrikus egyenlőtlenségeknek gazdag irodalma van [10, 36, 25]. Egy ezekben gyakran használt formula egy zonotóp térfogatára ad egy elegáns és egyszerű képletet a generáló szakaszok függvényében. Ezen formulát rendszerint McMullennek [68] vagy Shephardnak [80] tulajdonítják, és azonnal következik Shephard egy zonotópok felbontására adott eredményéből [80]. Integrálgeometriai megközelítést alkalmazva, egy nemrég megjelent cikkben Brazitikos és McIntyre [22] igazolta ezen formula egy általánosítását egy zonotóp tetszőleges belső térfogatára. Joós és a dolgozat szerzője [56] általánosította Shephard felbontási tételét, mellyel új, geometriai bizonyítást adtak erre az eredményre. Az eredményt arra használták, hogy számos izoperimetrikus egyenlőtlenséget igazoljanak d -dimenziós zonotópok két típusára: $d + 1$ szakasz által, és $n \gg d$ szakasz által generált zonotópokra. Ezen eredményeket más matematikai problémákra is alkalmazni lehet. A fejezetben az [56] cikkbeli eredményeket mutatjuk be, és ismertetjük ezek kapcsolatát két másik problémával: az ℓ_p -polarizációs problémával [5, 71], és a jól ismert Maclaurin-egyenlőtlenség [13] egy [22] cikkben szereplő általánosításával.

Két konvex test konvex burkának térfogata az 1950-es évektől kezdve lett a kutatás tárgya. Az első erre vonatkozó eredmények Rogers és Shephard három majdnem ugyanakkor publikált cikkében [75, 76, 77] jelentek meg, akik többek között egy konvex test két egymást metsző eltoltjára vizsgálták meg ezen mennyiséget. Egyik eredményük a

$$(1) \quad c_{tr}(K) = \frac{\max\{\text{vol}(\text{conv}(K \cup (x + K))) : (x + K) \cap K \neq \emptyset, x \in \mathbb{R}^d\}}{\text{vol}(K)}$$

mennyiség minimumának és maximumának meghatározása volt a konvex testek családján, ahol rendre vol és conv jelöli a d -dimenziós Lebesgue mértéket és egy halmaz konvex burkát. Arra vonatkozó sejtésük, hogy a $c_{tr}(K)$ mennyiség a minimumát milyen K konvex testek esetén veszi fel, majdnem ötven évig nyitott kérdés volt [66, 41]. A fenti probléma normált terekre való átültetésének egyik módja, ha a számlálóban szereplő halmaz, azaz a két egymást metsző eltolt konvex burkának térfogatát olyan normában mérjük, melyet maga a test határoz meg. Ez történt az [59] cikkben, ahol a szerző meghatározta a fenti halmaz Busemann térfogatának, Holmes-Thompson térfogatának, Gromov tömegének és tömeg*-ának szélsőértékeit a K test relatív normájára nézve, a konvex síkidomok családján. A kilencedik fejezetben ezen eredményt ismertetjük.

1.2. Jelölések és alapfogalmak. A dolgozatban $\mathbb{R}^d$ jelöli a d -dimenziós euklideszi teret, melyet egy d -dimenziós valós vektortérnek tekintünk, ellátva egy pozitív definit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ belső szorzással. A belső szorzás által indukált euklideszi normát $\|\cdot\|$ jelöli, míg az $\mathbb{R}^d$ vektortér nullvektorát o , melyet origónak hívunk. Az *origó középpontú zárt egységgömbre* a $\mathbf{B}^d$, míg ennek határára az $\mathbb{S}^{d-1}$ jelölést alkalmazzuk.

Ha $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ nemüres halmazok, akkor A és B *Minkowski összege* vagy *vektorösszege*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

míg tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Tetszőleges nemüres $S \subseteq \mathbb{R}^d$ és $x \in \mathbb{R}^d$ esetén az $\{x\} + S$ halmazt S x vektorral vett *eltoltjának* nevezzük, és az egyszerűség kedvéért $x + S$ módon jelöljük. Általánosabban, ha $\lambda > 0$, akkor az $x + \lambda S$ halmazt S egy λ arányú *pozitív homotetikus képének* hívjuk. A tér lineáris altereinek egy $\mathbb{R}^d$ -beli vektorral vett eltoltjait *affin altereknek* nevezzük. Az 1, 2, illetve $(d - 1)$ -dimenziós affin alterek neve rendre *egyenesek*, *síkok* és *hipersíkok*. A nemdegenerált lineáris transzformációk és az eltolások kompozícióit *affin transzformációknak* nevezzük, egy halmaz affin transzformációval kapott képét pedig röviden a halmaz egy *affin képének* hívjuk.

Ha $p, q \in \mathbb{R}^d$, akkor a p, q végpontú *zárt szakasz*

$$[p, q] = \{(1 - t)p + tq : t \in [0, 1]\}.$$

Egy halmaz *konvex*, ha bármely két pontját összekötő zárt szakaszt tartalmazza. Egy nemüres halmaz *konvex burka* az őt tartalmazó konvex halmazok metszete; ez a halmaz maga is konvex. Az $S \subset \mathbb{R}^d$ halmaz belsejét, határát és konvex burkát rendre $\text{int}(S)$, $\text{bd}(S)$ és $\text{conv}(S)$ jelöli. Egy $K \subset \mathbb{R}^d$ halmaz egy *konvex test*, ha kompakt, konvex és a belseje nem üres. Egy konvex test minden határpontjához található ezen pontot tartalmazó hipersík, mely a test belsejét nem metszi. Ezen hipersíkokat a test *támaszhipersíkjainak* nevezzük. Könnyen látható, hogy tetszőleges K konvex testre és $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ vektorra a testnek pontosan kettő, u -ra merőleges támaszhipersíkja van. Ha ezen támaszhipersíkok távolsága $D > 0$ az u vektor választásától függetlenül, azt mondjuk, hogy K *állandó D szélességű*. Ha K -nak minden p határpontjára pontosan egy p -t tartalmazó támaszhipersíkja van, akkor azt mondjuk, hogy K *síma*. Ha K határa nem tartalmaz szakaszt, akkor azt mondjuk, hogy K *szigorúan konvex*.

Ha egy konvex test előáll véges sok pont konvex burkaként, akkor a testet *konvex politópnak*, illetve $d = 2$ és $d = 3$ esetén rendre *konvex sokszögnek* és *konvex poliédernek* hívjuk. Egy konvex test, speciálisan egy konvex politóp *lapjai* a testnek a támaszhipersíkjaival vett metszetei. Közismert, hogy egy konvex politóp lapjai, illetve $\emptyset$ és maga a politóp, a tartalmazásra nézve egy algebrai hálót alkotnak, melyet a politóp *laphálójának* nevezünk. Két konvex politóp *kombinatorikusan ekvivalensek*, ha laphálójuk izomorfak. Némileg következetlenül (de az irodalomban megszokott módon), konvex poliéderek 0-, 1- és 2-dimenziós lapjait rendszerint a poliéder *csúcsainak*, *éleinek* és *lapjainak* nevezük.

Egy konvex test térfogatát (Lebesgue mértékét) $\text{vol}(\cdot)$ fogja jelölni. Steiner egy eredménye szerint tetszőleges K d -dimenziós konvex testre a $\text{vol}(K + \lambda \mathbf{B}^d)$ térfogat előáll, mint λ egy d -edfokú polinomja:

$$(2) \quad \text{vol}(K + \lambda \mathbf{B}^d) = \sum_{i=0}^d V_i(K) \kappa_{d-i} t^{d-i},$$

ahol κ_{d-i} jelöli $\mathbf{B}^{d-i}$ térfogatát. A $V_i(K)$ mennyiséget K i -edik *belső térfogatának* nevezzük. Érdekes meggondolni, hogy $V_0(K) = 1$ és $V_d(K) = \text{vol}(K)$ tetszőleges K d -dimenziós konvex test esetén.

Legyenek K, L kompakt, konvex halmazok $\mathbb{R}^d$ -ben. Ekkor K és L *Hausdorff távolsága* a

$$(3) \quad d_H(K, L) = \inf\{\lambda > 0 : K \subseteq L + \lambda \mathbf{B}^d \text{ és } L \subseteq K + \lambda \mathbf{B}^d\}$$

mennyiség. Megjegyezzük, hogy az $\mathbb{R}^d$ -beli kompakt, konvex halmazok családja a Hausdorff-távolságra nézve egy teljes metrikus teret alkot.

Végül, de nem utolsósorban, tetszőleges $X \subseteq \mathbb{R}^d$ halmaz esetén X *polárisa* az

$$(4) \quad X^\circ = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1\}$$

halmaz. Könnyen látható, hogy bármely halmaz polárisa egy o -t tartalmazó zárt, konvex halmaz, és $(X^\circ)^\circ = X$ pontosan akkor teljesül, ha X is rendelkezik ezen tulajdonságokkal. Ha K egy o -szimmetrikus konvex test, azaz teljesíti a $-K = K$ feltételt, akkor a

$$\text{vol}(K) \text{vol}(K^\circ)$$

mennyiséget K *térfogatszorzatának* vagy *Mahler térfogatának* nevezük. A Blaschke-Santaló egyenlőtlenség szerint ezen mennyiség az o -szimmetrikus konvex testek családján belül a maximumát ellipszoidok esetén veszi fel. A térfogatszorzat minimumát nem ismerjük. A konvex geometria egyik híres megoldatlan sejtése, az úgynevezett *Mahler-sejtés* szerint a fenti mennyiség minimális pl. az o középpontú kockák esetén.

2. HALMAZOK TÖBBSZÖRÖS BORSUK-SZÁMAI

Az alábbi fogalom jól ismert a szakirodalomban.

2.1. definíció. *Tetszőleges $S \subset \mathbb{R}^d$ $D > 0$ átmérőjű halmazra a legkisebb m pozitív egészt, melyre teljesül, hogy S lefedhető m darab, D -nél szigorúan kisebb átmérőjű halmazzal, S Borsuk számának nevezzük, és $a(S)$ -sel jelöljük.*

Mi ezen fogalom egy általánosításával foglalkozunk, melyet a 2.2. definícióban vezetünk be.

2.2. definíció. *Legyen $S \subset \mathbb{R}^d$ egy $D > 0$ átmérőjű halmaz. A legkisebb m pozitív egészt, melyre teljesül, hogy S k -szorosan lefedhető m darab, D -nél szigorúan kisebb átmérőjű halmazzal, S k -szoros Borsuk számának nevezzük, és $a_k(S)$ -sel jelöljük.*

Nyilván $a_1(S) = a(S)$. Először három megjegyzést teszünk halmazok többszörös Borsuk-számaival kapcsolatban.

2.3. megjegyzés (Hujter, Lángi, 2014). *Az $a_k(S)$ sorozat szubadditív minden S -re. Pontosabban, tetszőleges k, l pozitív egészekre fennáll az $a_{k+l}(S) \leq a_k(S) + a_l(S)$ egyenlőtlenség.*

2.4. megjegyzés (Hujter, Lángi, 2014). *Minden $S \subset \mathbb{R}^d$ $D > 0$ átmérőjű halmaz és minden $k \geq 1$ egész esetén $a_k(S) \geq 2k$. Emellett tetszőleges k értékre, ha $a(S) = 2$, akkor $a_k(S) = 2k$, és ha $a(S) > 2$, akkor $a_k(S) > 2k$.*

2.5. megjegyzés (Hujter, Lángi, 2014). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^d$ egy pozitív átmérőjű halmaz. Ekkor tetszőleges k pozitív egészre $a_k(S) = a_k(\text{bd } S)$.*

Most idézzük fel Boltyanszkij egy ismert eredményét [16, 17].

2.6. tétel (Boltyanszkij, 1960). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ egy $D > 0$ átmérőjű halmaz. Ekkor S Borsuk száma pontosan akkor három, ha egyértelműen létezik egy állandó D szélességű halmaz, mely S -et tartalmazza.*

2.7. tétel (Hujter, Lángi, 2014). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ egy $D > 0$ átmérőjű halmaz, melyre $a(S) = 3$, és legyen C az egyértelműen létező állandó D szélességű halmaz, mely S -et tartalmazza. Ekkor k bármely értékére $a_k(S) = a_k(C)$.*

A következő tétel előtt idézzük fel, hogy egy D állandó szélességű konvex síkidom egy *Reuleaux-poligon*, ha a határa véges sok D sugarú körív uniója.

2.8. tétel (Hujter, Lángi, 2014). *Legyen C egy állandó szélességű konvex síkidom $\mathbb{R}^2$ -ben, és k egy pozitív egész. Ha C egy $2s + 1$ oldalú*

Reuleaux-poligon, akkor $a_k(C) = 2k + \lceil \frac{k}{s} \rceil$. Ellenkező esetben $a_k(C) = 2k + 1$.

Két speciális halmazcsalád, melyre igazolták Borsuk eredeti sejtését, a középpontosan szimmetrikus és a sima konvex testek családja (ld. [73, 49, 50]). A bizonyítás mindkét esetben visszavezeti a problémát a $\mathbf{B}^d$ euklideszi gömb esetére, majd meghatározza az $a(\mathbf{B}^d)$ mennyiséget. A következő eredményünkben a fenti halmazok k -szoros Borsuk-számát ugyanezen módon vizsgáljuk.

2.9. tétel (Hujter, Lángi, 2014). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^d$ egy $D > 0$ átmérőjű halmaz.*

- (1) *Ha S egy sima vagy egy centrálszimmetrikus test, akkor minden k -ra $a_k(S) \leq a_k(\mathbf{B}^d)$.*
- (2) *Ha S egy állandó szélességű konvex test, akkor $a_k(S) \geq a_k(\mathbf{B}^d)$.*
- (3) *Tetszőleges k -ra $a_k(\mathbf{B}^d) = 2k + d - 1$.*

Ebből a tételből nyilvánvalóan következik, hogy ha S egy sima, állandó szélességű test, akkor minden k -ra $a_k(S) = 2k + d - 1$.

2.10. definíció. *Legyen $S \subset \mathbb{R}^d$ egy $D > 0$ átmérőjű halmaz. Ekkor az*

$$a_{frac}(S) = \inf \left\{ \frac{a_k(S)}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}$$

mennyiséget S frakcionális Borsuk számának nevezzük.

2.11. probléma (Hujter, Lángi, 2014). *Igazoljuk vagy cáfoljuk, hogy ha $S \subset \mathbb{R}^3$ egy véges ponthalmaz, melyre $a_{frac}(S) = 4$, akkor az átmérőgráfjának K_4 részgráfja.*

Az alábbi tételben $g(G)$ a G gráf *derékbőssége*, azaz a legrövidebb G -beli kör hossza. Az S halmaz átmérőgráfját G_S -sel fogjuk jelölni.

2.12. tétel (Hujter, Lángi, 2014). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^3$ egy véges ponthalmaz, melyre $g(G_S) > 3$. Ekkor $a_k(S) < 4k$ valamely k értékre.*

2.13. tétel (Hujter, Lángi, 2014). *Ha $S \subset \mathbb{R}^3$ és $\text{card } S \leq 7$, akkor vagy $a_k(S) < 4k$ minden $k > 1$ esetén, vagy G_S -nek K_4 részgráfja.*

Jelölje $\text{Sym}(S)$ az S halmaz szimmetriacsoportját, és $\mathcal{T}_4$ a szabályos tetraéder szimmetriacsoportját.

2.14. tétel (Hujter, Lángi, 2014). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^3$ egy véges halmaz, melyre $\mathcal{T}_4 \subseteq \text{Sym}(S)$. Ha $g(G_S) = 3$, akkor G_S tartalmazza K_4 -et részgráfként.*

2.15. megjegyzés (Hujter, Lángi, 2014). *A 2.14. és 2.12. tételeket kombinálva kapjuk, hogy ha valamely $S \subset \mathbb{R}^3$ véges halmazra $\mathcal{T}_4 \subseteq \text{Sym}(S)$, és $a_k(S) = 4k$ minden k -ra, akkor G_S -nek K_4 részgráfja.*

Megjegyezzük, hogy a [81] cikk következményeként tetszőleges $S \subset \mathbb{R}^3$ véges halmazra G_S beágyazható a projektív síkba. Másrészt a [81] cikkbeli példa mutatja, hogy ezen gráfok nem mindegyike síkgráf.

2.16. megjegyzés (Hujter, Lángi, 2014). *Ismert, hogy minden háromszögmentes síkgráf kromatikus száma legfeljebb három. Így a 2.14. tétel szerint, ha G_S síkgráf és $\mathcal{T}_4 \subseteq \text{Sym}(S)$, akkor G_S -nek K_4 részgráfja.*

2.17. probléma (Hujter, Lángi, 2014). *Igazoljuk vagy cáfoljuk, hogy ha $S \subset \mathbb{R}^3$ egy véges halmaz, melyre $\mathcal{T}_4 \subseteq \text{Sym}(S)$ és $a(S) = 4$, akkor G_S -nek K_4 részgráfja.*

Következő célunk megvizsgálni azon S halmazokat, melyekre $a(S) = 4$ és $\mathcal{D}_{2k+1} \subseteq \text{Sym}(S)$, ahol $\mathcal{D}_m$ jelöli a szabályos m -szög szimmetriacsoportját. Egy ezen feltételeket kielégítő halmazcsaládot konstruálunk. A konstrukcióban használjuk egy G gráf p -edik Mycielski gráfjának fogalmát (ld. [85]), melyet $\mu_p(G)$ -vel jelölünk. A W_{2k+2} kerékgérfot a C_{2k+1} páratlan kör 0-rendű Mycielski gráfjának tekintjük.

2.18. tétel (Hujter, Lángi, 2014). *Minden $p \geq 0$ és $k > 0$ egészre, $\mu_p(C_{2k+1})$ egy véges $S \subset \mathbb{R}^3$ halmaz átmérőgráfja.*

2.19. megjegyzés (Hujter, Lángi, 2014). *Legyen S egy pontthalmaz, melyre $G_S = \mu_p(C_{2k+1})$. Ekkor $a(S) = 4$ bármely p és k értékre. Mint-hogy tetszőleges $k \geq 2$ és $p > 1$ esetén $\mu_p(C_{2k+1})$ háromszögmentes, ezen gráf nem egy síkgráf. Másrészt könnyű belátni, hogy G_S éleinek száma $2 \text{card } S - 2$. Tehát ezen gráfok a Vázsonyi-kritikus gráfok egy végtelen családját alkotják, melyek nem síkgráfok.*

Következő megjegyzésünkben $\chi_k(G)$ jelöli a G gráf k -szoros színezési számát.

2.20. megjegyzés (Hujter, Lángi, 2014). *Nyilván, ha $p = 0$, akkor $a_k(S) = k + \chi_k(C_{2m+1}) = 3k + \lceil \frac{k}{m} \rceil$. A [64] cikk alapján, $p = 1$ esetén*

$$a_k(S) = \begin{cases} 4 & \text{if } k = 1, \\ \frac{5k}{2} + 1 & \text{ha } k \text{ páros,} \\ 2k + \frac{k+3}{2}, & \text{ha } k \text{ páratlan és } k \leq m \leq \frac{3k+3}{2}, \text{ és} \\ 2k + \frac{k+5}{2}, & \text{ha } k \text{ páratlan és } m \geq \frac{3k+5}{2}. \end{cases}$$

2.21. tétel (Hujter, Lángi, 2014). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^3$ egy véges halmaz, melyre $\mathcal{D}_{2m+1} \subseteq \text{Sym}(S)$ valamely $m \geq 2$ esetén. Ha $a(S) = 4$ és $g(G_S) = 3$, akkor G_S tartalmaz egy topologikus W_{2m+2} kerékgérfot, mint részgráfot.*

2.22. következmény (Hujter, Lángi, 2014). *Legyen $S \subset \mathbb{R}^3$ egy véges halmaz, melyre $\mathcal{D}_{2m+1} \subseteq \text{Sym}(S)$ valamely $m \geq 2$ esetén. Ha $a(S) = 4$ és G_S egy síkgráf, akkor G_S tartalmaz egy topologikus W_{2m+2} kerékgráfot, mint részgráfot.*

2.23. probléma (Hujter, Lángi, 2014). *Igaz, hogy ha $S \subset \mathbb{R}^3$ egy véges halmaz, melyre $\mathcal{D}_{2m+1} \subseteq \text{Sym}(S)$ valamely $m \geq 2$ esetén, és $a(S) = 4$, akkor G_S -nek $\mu_p(C_{2t+1})$ részgráfja alkalmas p -re és t -re, melyekre $(2m+1)|(2t+1)$ teljesül? Ha a válasz nemleges, igaz az állítás Vázsonyi-kritikus gráfokra?*

Jelölje $a_k(d)$ a d -dimenziós pozitív átmérőjű halmazok k -szoros Bor-suk számainak maximumát, és legyen $a(d) = a_1(d)$.

2.24. megjegyzés (Hujter, Lángi, 2014). *Ha d elegendően nagy, akkor k minden értékére $a_k(d) \geq k \cdot 1.2^{\sqrt{d}}$.*

2.25. probléma (Hujter, Lángi, 2014). *Igaz, hogy k, d minden értékére $a_k(d) = ka(d)$? Ha nem, igaz, hogy a két oldal nagyságrendje ugyanaz?*

3. NEMSZEPARÁLHATÓ CSALÁDOK VIZSGÁLATA

A fejezet fő fogalma az alábbi.

3.1. definíció. *Legyen $d, n \geq 2$. Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, és legyen*

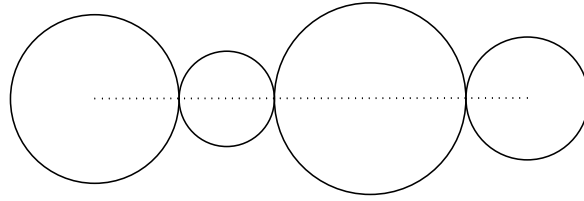
$$\mathcal{K} = \{x_i + \tau_i K \mid x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

K pozitív homotetikus képeinek egy véges családja. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ egy nemszeparálható család, vagy NS-család, ha tetszőleges H hipersíkra, ha H metszi a $\text{conv}(\bigcup \mathcal{K})$ halmazt, akkor metszi $\mathcal{K}$ valamelyik elemét is, azaz nincs olyan hipersík, amely $\mathcal{K}$ elemeinek egy részét szigorúan elválasztja a többitől. Ha $\mathcal{K}$ egy NS-család, jelölje $\lambda(\mathcal{K})$ a legkisebb pozitív λ számot, melyre igaz, hogy $\lambda(\sum_i^n \tau_i) K$ egy eltoltja fedi az $\bigcup \mathcal{K}$ halmazt.

Erdős egy sejtése szerint körlemezek tetszőleges $\mathcal{K}$ nemszeparálható családjára $\mathbb{R}^2$ -ben

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq 1$$

teljesül. Ezt a sejtést A.W. Goodman és R.E. Goodman igazolta 1945-ben [43]. Megjegyezzük, hogy ha $\mathcal{K}$ elemei sorozatba rendezhetőek úgy, hogy a szomszédos elemek egymást érintik, és a körlemezek középpontjai egy egyenesen vannak, akkor $\mathcal{K}$ körlemezek egy olyan NS-családja, melyre $\lambda(\mathcal{K}) = 1$ (ld. 1. ábra), így az 1 érték Goodman és Goodman eredményében optimális. A fenti [43] cikkben a szerzők megfogalmazták az alábbi sejtést.



1. ábra. Példa körlemezek olyan $\mathcal{K}$ NS-családjára, melyre $\lambda(\mathcal{K}) = 1$.

3.2. sejtés (Goodman-Goodman, 1945). *Legyen $n, d \geq 2$. Ekkor tetszőleges K konvex testre $\mathbb{R}^d$ -ben, és ezen test pozitív homotetikus képeinek tetszőleges*

$$\mathcal{K} = \{x_i + \tau_i K \mid x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$$

NS-családjára a

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq 1$$

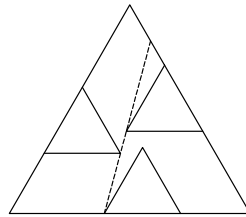
egyenlőség teljesül.

Ezen sejtést illetően az első eredményünk az alábbi.

3.3. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Legyen $d \geq 2$ és $n \geq 3$ tetszőleges, és legyen K egy szimplex $\mathbb{R}^d$ -ben. Ekkor létezik olyan $\mathcal{K}$ NS-család, mely K n darab eltoltját tartalmazza, és melyre*

$$\lambda(K) \geq \frac{n-1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}{n} > 1$$

(ld. 2. ábra).



2. ábra. Egy ellenpélda a Goodman-Goodman sejtésre $n = 3$ és $d = 2$ esetén. A fenti $\mathcal{K}$ elrendezésre $\lambda(\mathcal{K}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Ha $d = 2$ és $n = 3$, az előző tételben szereplő becslés optimális:

3.4. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Ha $\mathcal{K}$ egy K konvex síkidom 3 pozitív homotetikus képét tartalmazó NS-család, akkor*

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq \frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Az általános esetre az alábbi becslés adható.

3.5. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Legyen $d \geq 2$. Ha K egy konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, és $\mathcal{K}$ K pozitív homotetikus képeinek egy NS-családja, akkor*

$$(5) \quad \lambda(\mathcal{K}) \leq d.$$

A következő eredmény előtt idézzük fel, hogy egy $S \subset \mathbb{R}^d$ halmaz *o-szimmetrikus*, ha $-S = S$.

3.6. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Legyen $d \geq 2$. Ha K egy o-szimmetrikus konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, és $\mathcal{K}$ K pozitív homotetikus képeinek egy NS-családja, akkor*

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq 1.$$

Utolsó eredményünk előtt általánosítjuk az NS-család fogalmát.

3.7. definíció. *Legyen $\mathcal{K} = \{x_i + \tau_i K : x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ a K $\mathbb{R}^d$ -beli konvex test pozitív homotetikus képeinek egy családja, és legyen $0 \leq k \leq d-1$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ egy k -áthatolhatóan elrendezés, röviden egy k -ÁH-család, ha az $\mathbb{R}^d$ tér tetszőleges k -dimenziós L affin alterére, mely metszi a $\text{conv}(\bigcup \mathcal{K})$ halmazt, L metszi $\mathcal{K}$ egy elemét. Emellett, ha $\mathcal{K}$ egy k -ÁH elrendezés, akkor jelölje $\lambda_k(\mathcal{K}) > 0$ azt a legkisebb λ pozitív valós számot, melyre teljesül, hogy $\lambda \left(\sum_{i=1}^n \tau_i \right) K$ egy eltoltja fedi az $\bigcup \mathcal{K}$ halmazt.*

Vegyük észre, hogy az előző definícióban, ha $k < l$, akkor egy k -ÁH család szükségképpen egy l -ÁH-család is, valamint egy $(d-1)$ -ÁH család valójában egy NS-család, és ebben az esetben $\lambda_{d-1}(\mathcal{K}) = \lambda(\mathcal{K})$. Ahhoz, hogy a Goodman-Goodman sejtés ÁH-családokra vonatkozó esetének egy erősebb változatát kimondjuk, néhány konvex geometriai fogalmat idézünk fel.

3.8. definíció. *Legyen L és M két konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, ahol $d \geq 2$. Azt mondjuk, hogy L M egy összeadandója, ha létezik olyan N konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, melyre*

$$L + N = M.$$

3.9. definíció. *Legyen L és M két konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, ahol $d \geq 2$. Azt mondjuk, hogy L szabadon gördül M -ben, ha M minden x határpontjához létezik egy olyan $y \in \mathbb{R}^d$ eltolásvektor, melyre $y + L$ belülről érinti*

M -et x -ben, azaz

$$x \in y + L \subseteq M.$$

Jól ismert (ld. [78, Section 3.2]), hogy tetszőleges L, M konvex testekre $\mathbb{R}^d$ -ben L pontosan akkor M egy összeadandója, ha szabadon gördül M -ben. Vegyük észre, hogy ebben az esetben M nyilván tartalmazza L egy eltoltját.

Mi az alábbi formában igazoltuk a 3.2. sejtést k -ÁH-családokra ($0 \leq k \leq d-2$).

3.10. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Legyen K egy konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, és legyen $\mathcal{K} = \{K_i = x_i + \tau_i K : x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ K pozitív homotetikus képeinek egy k -ÁH-családja valamilyen $0 \leq k \leq d-2$ egészre. Ekkor $\text{conv}(\bigcup \mathcal{K})$ szabadon gördül a $(\sum_{i=1}^n \tau_i) K$ konvex testben, azaz $\lambda_k(\mathcal{K}) \leq 1$.*

Szigorúan konvex testekre az előző tétel egy erősebb változata is teljesül.

3.11. tétel (Bezdek-Lángi, 2016). *Legyen $d \geq 2$ és $0 \leq k \leq d-2$, valamint legyen K egy szigorúan konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben. Ha $\mathcal{K} = \{K_i = x_i + \tau_i K : x_i \in \mathbb{R}^d, \tau_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ K pozitív homotetikus képeinek egy k -ÁH-családja, akkor alkalmas $x_{i^*} \in \mathbb{R}^d$ esetén*

$$\bigcup \mathcal{K} = x_{i^*} + \tau_{i^*} K = K_{i^*},$$

ahol $\tau_{i^*} = \max\{\tau_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$.

Ezt a fejezetet a Goodman-Goodman sejtés két módosított verziójával zárjuk.

3.12. probléma (Bezdek-Lángi, 2016). *Igazoljuk vagy cáfoljuk, hogy ha K egy konvex síkidom, és $\mathcal{K}$ K pozitív homotetikus képeinek egy NS-családja, akkor*

$$\lambda(\mathcal{K}) \leq \frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

3.13. probléma (Bezdek-Lángi, 2016). *Keressük meg a $\sup_{\mathcal{K}} \lambda(\mathcal{K})$ mennyiséget minden rögzített $d \geq 2$ értékre, ahol $\mathcal{K}$ végigfut az összes $\mathbb{R}^d$ -beli konvex test összes NS-családján. Speciálisan, létezik olyan c abszolút (dimenziótól független) konstans, melyre*

$$\sup_{\mathcal{K}} \lambda(\mathcal{K}) \leq c$$

teljesül minden $d \geq 2$ esetén?

Megjegyezzük, hogy a közelmúltban Akopyan et al. [2] megjavította a 3.5. tételben szereplő felső korlátot d -ről $\frac{d+1}{2}$ -re, míg Polyanskii [72] igazolta Fejes Tóth László híres zóna sejtésének egy erősítéseként Goodman és Goodman euklideszi körrendszerekre vonatkozó eredményének egy gömbi geometriai változatát.

4. MONOSTABIL POLIÉDEREK VIZSGÁLATA

A monostabil, azaz egy stabil egyensúlyi ponttal rendelkező konvex poliéderek tanulmányozása Conway és Guy két 1966-ban felvetett sejtésével kezdődött, melyek szerint tetszőleges (homogén sűrűségű) tetraédernek legalább két stabil pontja van, de van olyan (homogén sűrűségű) konvex poliéder, melynek csak egy. Ezen sejtéseket rendre Goldberg és Guy [42] válaszolta meg 1969-ben, melyben többek között megadták egy 19 lapú monostabil poliéder konstrukcióját. Ez utóbbi cikk több monostabil poliéderekre vonatkozó problémát ismertet, többek között az alábbi három, Conway által felvetett problémát, melyek Croft, Falconer és Guy [24] megoldatlan geometriai problémákról szóló könyvében Problem B12 név alatt is megtalálhatóak.

4.1. probléma (Conway-Guy, 1969). *Lehet-e egy $\mathbb{R}^3$ -beli monostabil poliédernek n -edrendű forgásszimmetriája valamely $n > 2$ értékre?*

A következő probléma előtt idézzük fel, hogy egy 3-dimenziós konvex test *körmérete* a síkokra vett merőleges vetületeinek minimális kerülete.

4.2. probléma (Conway-Guy, 1969). *Mi az infimuma a egységnyi körméretű monostabil poliéderek átmérőjének?*

4.3. probléma (Conway-Guy, 1969). *Mi azon konvex testek halmaza, melyek tetszőleges pontossággal egyenletesen megközelíthetőek monostabil poliéderekkel? Speciálisan a gömb eleme ezen halmaznak?*

Érdemes megjegyezni, hogy a [42] cikk szerint Conway belátta, hogy forgástest nem lehet monostabil, valamint azt, hogy a cikkben konstruált monostabil poliéder másodrendű forgásszimmetriával rendelkezik. A 4.2. probléma megtalálható Shephard egy 1968-as problémagyűjteményében is [79].

Fő eredményünk az alábbi tétel, ahol a $d_H(\cdot, \cdot)$ szimbólum Hausdorff távolságot jelöl.

4.4. tétel (Lángi, 2022). *Tetszőleges $n \geq 3$, $n \in \mathbb{Z}$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik egy olyan P monostabil poliéder, mely n -edrendben forgásszimmetrikus, és melyre $d_H(P, \mathbf{B}^3) < \varepsilon$ teljesül.*

Vegyük észre, hogy a 4.4. tétel választ ad a 4.1. problémára, és megoldja a 4.3. probléma gömbre vonatkozó részét is. Emellett könnyen levezethető belőle a 4.5. következmény, mely megválaszolja a 4.2. problémát. A következményben a $K \subset \mathbb{R}^3$ konvex test átmérőjét és körmértét rendre $\text{diam}(K)$ és $g(K)$ jelöli. Az értelmezéséhez megjegyezzük, hogy az egységnyi körmértetű konvex testek családján belül az átmérő az $\frac{1}{\pi}$ átmérőjű gömb esetén minimális.

4.5. következmény (Lángi, 2022). *A $\frac{\text{diam}(P)}{g(P)}$ hányados infimuma a monostabil poliéderek családján $\frac{1}{\pi}$.*

A 4.4. tétel igazolása egy általános approximációs tétel, mely a saját jogán is érdekes lehet. Ennek kimondásához vezessük be az $(S, U)_c$ jelölést az S stabil és U instabil egyensúlyi ponttal rendelkező, azon sima testek családjára, melyre igaz, hogy bármely egyensúlyi pontjukban a határfelületük Gauss-görbülete pozitív. Emellett az S stabil és U instabil egyensúlyi ponttal rendelkező konvex poliéderek családját $(S, U)_p$ -vel fogjuk jelölni. Ha egy test súlypontja az origó, akkor a testet *centrált* testnek fogjuk hívni.

4.6. tétel (Lángi, 2022). *Legyen $\varepsilon > 0$, $S, U \geq 1$ tetszőlegesek, és legyen G az $\mathcal{O}(3)$ ortogonális csoport egy tetszőleges részcsoportja. Ekkor tetszőleges $K \in (S, U)_c$ centrált, G -invariáns konvex test esetén létezik egy $P \in (S, U)_p$ centrált, G -invariáns konvex poliéder, melyre $d_H(K, P) < \varepsilon$.*

A fenti tétel kapcsán megjegyezzük, hogy az a tény, hogy egy nemdegenerált konvex poliéder tetszőleges pontossággal közelíthető egy ugyanannyi egyensúlyi ponttal rendelkező nemdegenerált sima testtel, folklór formájában jelenik meg a szakirodalomban. Másrészt viszont a [28] cikkbeli eredmény mutatja, hogy az állítás megfordítása nem triviális: egy konvex test határát tetszőleges paraméterezés mellett ekvidisztáns felosztást használva közelítve egy poliedrikus felülettel, a kapott felületnek általában szigorúan több egyensúlyi pontja van, mint az eredeti konvex testnek.

Végül, habár az eredeti Gömböc nem C^2 -osztályú az egyensúlyi pontjaiban, a [29] cikkben beláttuk, hogy az $(1, 1)_c$ osztály nem üres. Így a 4.6. tételt felhasználva egyből megkapjuk az alábbi, egy a [27] cikkben felvetett díjhoz kapcsolódó eredményt.

4.7. következmény (Lángi, 2022). *Van olyan nemdegenerált konvex poliéder, melynek pontosan egy stabil és egy instabil pontja van.*

5. KOMPAKT HALMAZOK MINKOWSKI ÁTLAGA TÉRFOGATÁNAK
MONOTONITÁSA

Ismert, hogy az $A[k] = \sum_{i=1}^k A$ jelöléssel tetszőleges $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmazra, az $\left\{\frac{1}{k}A[k]\right\}_{k \geq 1}$ halmazsorozat határértéke, Hausdorff távolságra nézve, A konvex burka. Ezen fejezet célja Bobkov, Madiman, Wang [14] alábbi sejtésének vizsgálata, melyben a fenti sorozat elemeinek térfogatát hasonlítják össze.

5.1. sejtés (Bobkov-Madiman-Wang, 2011). *Legyen A egy $\mathbb{R}^d$ -beli kompakt halmaz valamely $d \in \mathbb{N}$ egészre. Ekkor a*

$$\left\{ \text{vol} \left(\text{conv}(A) \setminus \left(\frac{1}{k}A[k] \right) \right) \right\}_{k \geq 1}$$

halmaz (nem feltétlen szigorúan) monoton csökkenő, vagy ekvivalens módon, a

$$\left\{ \text{vol} \left(\frac{1}{k}A[k] \right) \right\}_{k \geq 1}$$

sorozat monoton növekvő.

Átfogalmazva, ez a sejtés azt kérdezi, hogy igaz-e tetszőleges $k \geq 1$ egészre és $A \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmazra, hogy

$$(6) \quad \text{vol} \left(\frac{1}{k}A[k] \right) \leq \text{vol} \left(\frac{1}{k+1}A[k+1] \right).$$

A fenti egyenlőtlenség triviálisan igaz minden A kompakt halmazra $k = 1$ esetén, mivel $A \subseteq \frac{1}{2}A[2]$. Ugyanilyen módon könnyű monoton részsorozatokat találni ebben a sorozatban, pl. $\{\text{vol}(\frac{1}{2^m}A[2^m])\}_{m \geq 0}$. Másrészt úgy tűnik, hogy már az első nemtriviális eset, azaz a $\text{vol}(\frac{1}{2}A[2]) \leq \text{vol}(\frac{1}{3}A[3])$ egyenlőtlenség igazolása is új eszközöket igényel. Az 5.1. sejtést részben megoldották a [38, 39] cikkekben, ahol a szerzők, a [48] cikkbeli módszert követve, igazolták a sejtést minden 1-dimenziós kompakt halmazra, de találtak ellenpéldát $\mathbb{R}^d$ -ben minden $d \geq 12$ esetén.

5.2. definíció. *Az $S \subset \mathbb{R}^d$ nemüres halmaz csillagszerű a p pontra nézve, ha tetszőleges $q \in S$ esetén $[p, q] \subseteq S$.*

A fő eredményünk az alábbi:

5.3. tétel (Fradelizi, Lángi, Zvavitch, 2022). *Legyen $d \geq 2$ és $k \geq \max\{2, (d-1)(d-2)\}$ tetszőleges egész. Ekkor bármely $S \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, csillagszerű halmazra*

$$\text{vol} \left(\frac{1}{k+1}S[k+1] \right) \geq \text{vol} \left(\frac{1}{k}S[k] \right).$$

A fenti egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $\dim(S) < d$, vagy ha $\frac{1}{k}S[k] = \text{conv}(S)$.

Érdemes megjegyezni, hogy a [38, 39] cikkekben bemutatott ellenpélda csillagszerű halmaz, így az 5.3. tétel ezen konstrukció ellenpontjaként tekinthető. Az 5.4. tételben összefüggő, kompakt, síkbeli halmazokra vizsgáljuk az 5.1. sejtés érvényességét.

5.4. tétel (Fradelizi, Lángi, Zvavitch, 2022). *Legyen $k \geq 2$. Legyen K egy konvex síkidom, és legyen $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ páronként diszjunkt, nyílt topologikus lemezek egy családja, melyekre ha $F_i \cap \text{bd } K \neq \emptyset$ valamely $i \in I$ -re, akkor $F_i \cap \text{bd } K$ egy összefüggő görbe, és F_i konvex. Legyen $X = K \setminus (\bigcup_{i \in I} F_i)$. Ekkor*

$$\text{area}\left(\frac{1}{k}X[k]\right) \leq \text{area}\left(\frac{1}{k+1}X[k+1]\right).$$

5.5. megjegyzés (Fradelizi, Lángi, Zvavitch, 2022). *Megkérdezhetjük, hogy az 5.3. tétel állítása igaz marad-e, ha térfogat helyett tetszőleges más mértéket vizsgálunk. A válasz erre a kérdésre nemleges. Valóban, tekintsük a $\mu(K) = \text{vol}(K \cap C)$ mértéket, ahol $C = [-\frac{1}{d}, \frac{1}{d}]^d$, és $S = \bigcup_{i=1}^d [o, e_i]$, ahol $e_1, e_2, \dots, e_d$ a szokásos ortonormált bázis vektorai. Ekkor nyilván*

$$\mu\left(\frac{1}{2k}S[2k]\right) = \frac{1}{2^d} \text{vol}(C) > \mu\left(\frac{1}{2k+1}S[2k+1]\right).$$

5.6. megjegyzés (Fradelizi, Lángi, Zvavitch, 2022). *Az 5.3. tétel állítása nem marad igaz még tetszőleges síkbeli forgásszimmetrikus mértékek esetén sem: k tetszőleges értékeire van olyan $S \subset \mathbb{R}^2$ kompakt csillagszerű halmaz, melyre $\text{vol}\left(\frac{1}{k}S[k] \cap \mathbf{B}^2\right) > \text{vol}\left(\frac{1}{k+1}S[k+1] \cap \mathbf{B}^2\right)$. Ennek belátásához vehetjük az $S = [o, e_1] \cup [o, e_2]$ halmazt, és az alábbi mértéket: jelölje E azt az o -szimmetrikus ellipszist, mely tartalmazza az $(1 - 1/k, 0)$ és $(1 - 2/k, 1/k)$ pontokat. Elemi számolással adódik, hogy ebben az esetben $\text{vol}\left(\frac{1}{k}S[k] \cap E\right) = \frac{1}{4} \text{vol}(E)$. Másrészt, az $\frac{1}{k+1}S[k+1]$ halmaz $(1 - 2/(k+1), 1/(k+1))$ határpontja E belsejébe esik, melyből $\text{vol}\left(\frac{1}{k+1}S[k+1] \cap E\right) < \frac{1}{4} \text{vol}(E)$ következik. Most ha $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ az a lineáris transzformáció, melynél E képe $\mathbf{B}^2$, akkor $f(S)$ kielégíti a megkívánt feltételeket.*

Csillagszerű halmazokat és a [39] cikkbeli ötleteket használva megcáfolhatjuk az 5.1. sejtés alábbi, [14] cikkbeli általánosabb változatát is.

5.7. sejtés (Bobkov, Madiman, Wang, 2011). *Tetszőleges $k \geq 2$ egész és $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ $\mathbb{R}^d$ -beli kompakt halmazok esetén,*

$$\text{vol} \left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i \right)^{1/d} \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k+1} \text{vol} \left(\sum_{j \neq i} A_j \right)^{1/d}.$$

Speciálisan, $k = 2$ esetén,

$$(7) \quad \text{vol}(A_1 + A_2 + A_3)^{1/d} \geq \frac{1}{2} \left(\text{vol}(A_1 + A_2)^{1/d} + \text{vol}(A_1 + A_3)^{1/d} + \text{vol}(A_2 + A_3)^{1/d} \right).$$

A fenti sejtés konvex halmazokra triviálisan teljesül. Emellett (7) igaz, ha $A_1 = A_2$ konvex. Valóban, ebben az esetben (7) ekvivalens a

$$\text{vol}(A_1 + A_1 + A_3)^{1/d} \geq \text{vol}(A_1)^{1/d} + \text{vol}(A_1 + A_3)^{1/d}$$

egyenlőtlenséggel, ami következik a Brunn-Minkowski egyenlőtlenségből [78].

A [39] cikk szerzői belátták, hogy az 5.7. sejtés igaz $\mathbb{R}$ -ben. Minthogy az 5.7. sejtésből következik az 5.1. sejtés, az előbbi is hamis, ha $d \geq 12$, a [38, 39] cikkek miatt. Megmutatjuk, hogy az 5.7. sejtés hamis $\mathbb{R}^d$ -ben már $d \geq 7$ esetén is.

5.8. állítás (Fradelizi, Lángi, Zvavitch, 2022). *Tetszőleges $d \geq 7$ egészre léteznek $A_1, A_2, A_3 \subset \mathbb{R}^d$ kompakt, csilagszerű halmazok, melyekre a*

$$\begin{aligned} \text{vol}(A_1 + A_2 + A_3)^{1/d} &< \\ &< \frac{1}{2} \left(\text{vol}(A_1 + A_2)^{1/d} + \text{vol}(A_1 + A_3)^{1/d} + \text{vol}(A_2 + A_3)^{1/d} \right) \end{aligned}$$

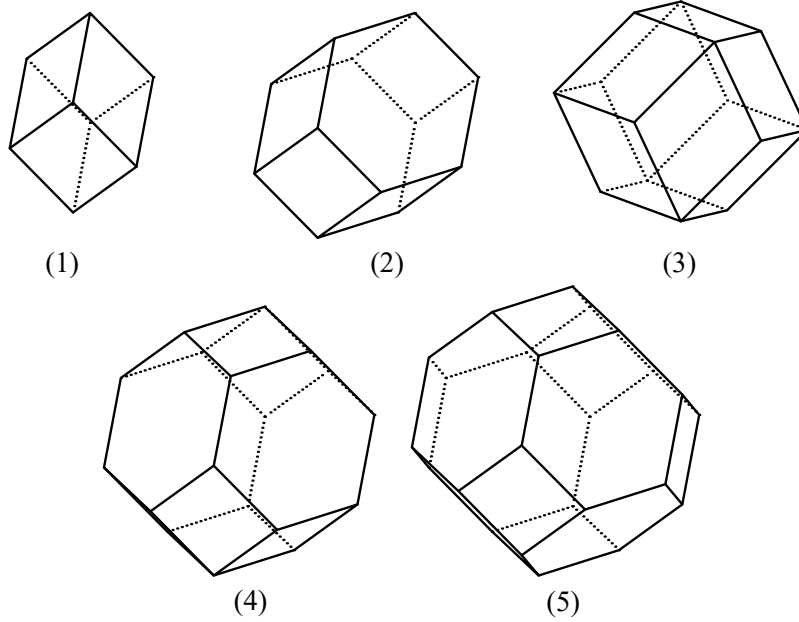
egyenlőtlenség teljesül.

6. HÁROM-DIMENZIÓS PARALLELOÉDEREK

Néhány definícióval kezdjük. Ha $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, \dots, K_n, \dots\}$ halmazok egy megszámlálható családja, melyre $\bigcup_{K_i \in \mathcal{K}} K_i = \mathbb{R}^d$, és $\mathcal{K}$ elemeinek belsejei páronként diszjunktak, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ egy *kitöltés* vagy *mozaik*, és $\mathcal{K}$ elemei a *mozaik cellái*. A mozaik *konvex*, ha $\mathcal{K}$ elemei konvexek. Közismert, hogy egy konvex mozaik cellái konvex politópok.

A 3-dimenziós *paralleloéderek*, azaz azon 3-dimenziós konvex poliéderek, melyek eltoltjaival az $\mathbb{R}^3$ euklideszi tér kitölthető, a legismertebb konvex poliéderek közé tartoznak. Ennek ellenére, Hales híres bizonyításától eltekintve, melyben belátta a Kepler sejtést, és amely mellékesen azt is igazolja, hogy adott térfogatú 3-dimenziós paralleloéderek

között a szabályos rombikus dodekaéder beírható gömbjének sugara maximális, nincs ismert izoperimetrikus egyenlőtlenség 3-dimenziós paralleloéderekre.



3. ábra. A 3-dimenziós paralleloéderek kombinatorikus típusai. (1) Parallelepipedon. (2) Közepponstoson szimmetrikus hatszög alapú hasáb. (3) Rombikus dodekaéder. (4) Hosszított rombikus dodekaéder. (5) Csonkolt oktaéder.

A [60] cikk fő célja a 3-dimenziós paralleloéderek egy új reprezentációjának az ismertetése, melyet alkalmazva igazoljuk a 6.1. tételt. A tétel ismertetése előtt idézzük fel, hogy egy $\mathbb{R}^d$ -beli K konvex test $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ irányú $\text{width}_u(K)$ szélessége az u -ra merőleges két támaszhipersíkjának távolsága, míg *átlagszélessége*

$$\text{mwidth}(K) = \frac{1}{d\kappa_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \text{width}_u(K) du,$$

ahol $d\kappa_d$ az $\mathbb{S}^{d-1}$ gömbfelület felszíne. Ezen mennyiséggel kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy egy 3-dimenziós K konvex test esetén

a Steiner-polinomban (ld. (2)) megjelenő $V_1(K)$ és $V_2(K)$ belső térfogatokra

$$\text{surf}(K) = 2V_2(K) \text{ és } \text{mwidth}(K) = \frac{1}{2}V_1(K)$$

teljesül, ahol $\text{surf}(K)$ jelöli K felszínét.

6.1. tétel (Lángi, 2022). *Az egységnyi térfogatú 3-dimenziós paraleleóederek közt a szabályos csonkolt oktaéder átlagszélessége minimális.*

A bizonyítás két lépésből áll. Az első lépésben belátjuk, hogy ha egy fenti P paraleleóéder átlagszélessége nem csökkenhet egy egységnyi determinánsú lineáris transzformáció alkalmazásakor, akkor a hat generáló vektor úgynevezett *felszíni izotropikus helyzetben* van. A második lépésben pedig az ezen feltételt kielégítő paraleleóederek között meghatározzuk a minimális átlagszélességű elemeket.

A fenti eredményhez kapcsolódóan megemlíjtük Lord Kelvin híres 1887-es sejtését [58], mely szerint egységnyi térfogatú cellákból álló mozaikok között minimális felszínű mozaikot kaphatunk, ha egy szabályos csonkolt oktaéder cellákból álló rács celláit alkalmas módon enyhén deformáljuk. Habár a sejtést Weaire és Phelan 1994-ben cáfolta [87], a probléma azóta is intenzív kutatás tárgya. Ennek ellenére a szerző tudomása szerint nincs a mozaikoknak olyan részcsaládja, melyben Kelvin problémáját megoldották volna. Ez a motivációja az alábbi sejtésnek [11], melyet a [60] cikk szerzője újra megfogalmazott.

6.2. sejtés (Bezdek, 2006). *Az egységnyi térfogatú 3-dimenziós paraleleóederek közt a szabályos csonkolt oktaéder felszíne minimális. Ekvivalens módon, azon $\mathbb{R}^3$ -beli mozaikok között, melyek cellái egy adott egységnyi térfogatú konvex test eltoltjai, azon mozaikok felszíne minimális, melyek cellái szabályos csonkolt oktaéederek.*

Megjegyezzük, hogy a 6.1. tétel bizonyításának módszere részben alkalmazható a 6.2. sejtés vizsgálatára is, de technikai nehézségek miatt a sejtés teljes megoldása egyelőre még várat magára.

7. IZOPERIMETRIKUS PROBLÉMÁK ZONOTÓPOKRA

Egy elegáns, egyszerű formula létezik egy zonotóp térfogatára a generáló szakaszok függvényében; ezt a képletet rendszerint McMullennek [68] vagy Shephardnak [80] tulajdonítják, és könnyen adódik egy [80] cikkbeli, zonotópok felbontására vonatkozó tételből. A [44] cikkben ezt a képletet a szerzők kiterjesztették olyan zonotópokra, melyek dimenziója kisebb, mint a teljes tér dimenziója. Egy integrálgeometriai megközelítést használva, Brazitikos és McIntyre [22] egy nemrég

megjelent cikkükben ezen formula egy általánosítását publikálták egy zonotóp tetszőleges belső térfogatára.

Előzetes eredményként Shephard felbontási tételének egy általánosítását igazoljuk, mellyel újra levezetjük a [22]-beli formulát zonotópok belső térfogataira. Ezt az eredményt zonotópokra vonatkozó izoperimetrikus egyenlőtlenségek igazolására fogjuk alkalmazni. Két típusú zonotóppal fogunk foglalkozni: d vagy $d + 1$ szakasz által generált $\mathbb{R}^d$ -beli zonotópokkal, valamint olyan n szakasz által generált $\mathbb{R}^d$ -beli zonotópokkal, ahol $n \gg d$.

A fenti probléma két alkalmazását is bemutatjuk. Az első az ún. ℓ_p -polarizációs probléma, melyről információt pl. az [5, 71] cikkekben találunk. A másik a jól ismert Maclaurin-egyenlőtlenség [13] egy Bra-zitikos and McIntyre [22] által javasolt általánosítása.

Először az eredmények ismertetéséhez szükséges jelölést és fogalmakat tárgyaljuk. Adott $v_1, v_2, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$ vektorokra az ezen vektorokból, mint oszlopokból álló $d \times d$ -es mátrixot $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ -nel jelöljük. A vizsgálatunkban megkülönböztetünk egyes speciális tulajdonságot kielégítő zonotópokat. Konkrétabban, ha egy zonotóp összes generáló vektora egyenlő hosszú (vagy egységnyi hosszú), akkor azt mondjuk, hogy a zonotóp *egyenlő élhosszú* (vagy *egységnyi élhosszú*). Érdeemes észrevenni, hogy eltolás erejéig minden Z zonotóp felírható $Z = \sum_{i=1}^n [o, p_i]$ alakban alkalmas $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$ vektorokra. Ekkor azt mondjuk, hogy $Z = \sum_{i=1}^n [o, p_i]$ *kanonikus alakban adott*. Nyilván egy fenti alakban adott Z zonotóp pontosan akkor o -szimmetrikus, ha $\sum_{i=1}^n p_i = o$; ekkor azt mondjuk, hogy Z -nek *centrált kanonikus alakja* van. Az n szakasz által generált $\mathbb{R}^d$ -beli zonotópok családját $\mathcal{Z}_{d,n}$ -nel jelöljük.

Legyen $d \geq 2$, és tekintsünk egy $Z = \sum_{i=1}^n [o, p_i]$ zonotópot, ahol $p_i \in \mathbb{R}^d$ i minden értékére. Legyen $\mathcal{P}^Z = \{p_1, \dots, p_n\}$, és minden $0 \leq k \leq d$ egészre jelölje $\mathcal{P}_k^Z$ a $\mathcal{P}^Z$ halmaz k -elemű, lineárisan független vektorokból álló részhalmazainak halmazát. Emellett minden $I \in \mathcal{P}_k^Z$ halmazra $k \geq 1$ esetén, legyen $P(I) = \sum_{i \in I} [o, p_i]$, és a továbbiak kedvéért kiterjesztjük ezt a jelölést a $k = 0$ esetre úgy, hogy $P(\emptyset) = \{o\}$ legyen, melyet egy 0-dimenziós paralelotópnak tekintünk. Vegyük észre, hogy bármely $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in \mathcal{P}_k^Z$ esetén $P(I)$ k -dimenziós térfogata $V_k(P(I))$, mely egyenlő a p_{i_j} vektorok külső szorzatának hosszával [22], azaz $V_k(P(I)) = |p_{i_1} \wedge p_{i_2} \wedge \dots \wedge p_{i_k}|$. Emellett minden $P(I)$ paralelotópra, ahol $I \in \mathcal{P}_k^Z$, bevezetjük a $B^\perp(I) = \mathbf{B}^d \cap (\text{aff}(P(I)))^\perp$ és $\mathcal{S}^\perp(I) = \mathbb{S}^{d-1} \cap (\text{aff}(P(I)))^\perp$ jelöléseket, ahol $(\text{aff}(P(I)))^\perp$ jelöli $\text{aff}(P(I))$ ortogonális komplementumát. Végül egy K konvex test egy

felbontásán páronként nem átfedő konvex testek véges családját értjük, melyek uniója K .

7.1. tétel (Joós, Lángi, 2023). *Az előző bekezdés jelöléseivel tetszőleges $t \geq 0$ esetén a $Z + t\mathbf{B}^d$ halmaz felbontható páronként nem átfedő $X + tB_X$ konvex testek véges $\mathcal{F}_Z$ családjára, ahol*

- (1) $X + tB_X \in \mathcal{F}_Z$ esetén X egy $P(I)$ paralelotóp eltoltja, melyre $I \in \mathcal{P}_k^Z$ alkalmas $0 \leq k \leq d$ egészre, és $B_X \subseteq B^\perp(I)$ az origó o és egy $S^\perp(I)$ -beli, gömbi konvex, kompakt halmaz eltoltja;
- (2) ha minden $0 \leq k \leq d$ és $I \in \mathcal{P}_k^Z$ esetén $\mathcal{F}_Z(I)$ jelöli az $\mathcal{F}_Z$ család azon $X + tB_X$ elemeinek halmazát, ahol X $P(I)$ egy eltoltja, akkor $\{B_X : X + tB_X \in \mathcal{F}_Z(I)\}$ a $B^\perp(I)$ gömb egy felbontása.

A 7.2. következmény megtalálható a [22] cikkben is.

7.2. következmény (Joós, Lángi, 2023). *Bármely $Z = \sum_{i=1}^n [o, p_i]$ zonotópra $\mathbb{R}^d$ -ben és $0 \leq k \leq d$ egészre, Z k -adik belső térfogata*

$$(8) \quad V_k(Z) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |p_{i_1} \wedge p_{i_2} \wedge \dots \wedge p_{i_k}|.$$

Tetszőleges $p > 0$ valós és $\omega_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $\mathbb{S}^{d-1}$ -beli multihalmaz esetén ω_n ℓ_p -polarizációja alatt a

$$M_p(\omega_n) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |\langle x_i, u \rangle|^p : u \in \mathbb{S}^{d-1} \right\},$$

menyiséget értjük. A

$$M_n^p(\mathbb{S}^{d-1}) = \min \{M_p(\omega_n) : \omega_n \subset \mathbb{S}^{d-1}\}$$

kifejezés értékét az $\mathbb{S}^{d-1}$ gömb ℓ_p -polarizációs (vagy Csebisev) konstansának nevezzük. A gömbi ℓ_p -polarizációs problémában arra keressük a választ, hogy mennyi az $M_n^p(\mathbb{S}^{d-1})$ konstans értéke p és d minden értékére.

Ha $Z = \sum_{i=1}^n [o, x_i]$ egy zonotóp $\mathbb{R}^d$ -ben, akkor

$$(9) \quad \text{cr}(Z) = \frac{1}{2} \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| : \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

vagy ekvivalens módon, a támaszfüggvényt használva:

$$(10) \quad \text{cr}(Z) = \frac{1}{2} \max \left\{ \sum_{i=1}^n |\langle u, x_i \rangle| : u \in \mathbb{S}^{d-1} \right\},$$

ahol $\text{cr}(Z)$ jelöli a Z zonotóp köréírható gömbjének (azaz a legkisebb, Z -t tartalmazó gömbnek) a sugarát. Így $\mathbb{S}^{d-1}$ ℓ_1 -polarizációs konstansa kétszerese az n egységnyi hosszú szakasz által generált zonotópok köréírható gömbjei minimális sugarának. Egy zonotóp átlagszélessége a generáló vektorok összhosszának egy skalárszorosa. Így ezt a problémát megfogalmazhatjuk úgy, mint az n szakasz által generált, egységnyi élhosszú zonotópok köréírható gömbjei minimális sugarának meghatározását. Speciálisan a (9) és (10)-beli kifejezések egyenlőségét az [5] cikk Proposition 3 néven igazolja a Lagrange módszer segítségével.

A továbbiakban a $\sigma_m^k(x_1, \dots, x_m) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$ jelölést vezetjük be az $x_1, x_2, \dots, x_m$ változókon értelmezett k -adik elemi szimmetrikus függvényre. Az alábbi, Maclaurin egyenlőtlenség néven ismert állítás megtalálható pl. a [13] könyvben.

7.3. lemma (Maclaurin-egyenlőtlenség). *Legyenek $1 \leq k < m$ egészek, és $x_1, \dots, x_m > 0$ pozitív valós számok. Ekkor*

$$\left(\frac{\sigma_m^k(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\binom{m}{k}} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \left(\frac{\sigma_m^{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\binom{m}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k+1}},$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha minden x_i egyenlő.

A fenti egyenlőtlenség egy vektorokra vett általánosítására fogalmaztak meg egy sejtést a szerzők a [22] cikkben.

7.4. sejtés (Brazitikos, McIntyre, 2022). *Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ vektorok, ahol $1 \leq d \leq n$. Ekkor bármely $p \in [0, \infty]$ és $2 \leq k \leq d$ esetén*

$$(11) \quad \left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_k}|^p}{\binom{n}{k}} \right)^{\frac{1}{pk}} \leq \left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n} |x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}}|^p}{\binom{n}{k-1}} \right)^{\frac{1}{p(k-1)}},$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $n = d$ és a vektorok egy ortonormált bázist alkotnak.

A [22] cikk szerzői igazolták ezt a sejtést $p = 0$ és $p = \infty$, $p = 2$ és $n = d$, valamint $p = 1$, $n = d$ és $k = 2, 3, d$ esetén. Megmutatták azt is (ld. a 7.2. következményt), hogy ha $p = 1$, a (11)-beli egyenlőtlenség két oldalán levő törtek számlálói megegyeznek a $\sum_{i=1}^n [o, x_i]$ zonotóp k -adik és $(k-1)$ -edik belső térfogataival, ami mutatja, hogy a 7.4. sejtés ezen esete közvetlenül zonotópokra vonatkozó izoperimetrikus problémákhoz vezet.

A $\mathcal{Z}_{d,d}$ család elemeit parallelotópoknak, míg a $\mathcal{Z}_{d,d+1}$ család elemeit rombikus dodekaédereknek nevezzük [10]. Ezeket a családokat rendre $\mathcal{Z}_p$ -vel és $\mathcal{Z}_{rd}$ -vel fogjuk jelölni. A fejezet első részében ezen zonotópokra vonatkozó izoperimetrikus egyenlőtlenségeket mutatunk be. Megjegyezzük, hogy ha a $p_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2, \dots, d+1$ vektorok egy o középpontú szabályos szimplex csúcsai, akkor a $Z = \sum_{i=1}^{d+1} [o, p_i]$ zonotóp egy *szabályos rombikus dodekaéder*. Egy $\mathbb{R}^3$ -beli szabályos rombikus dodekaéder eltoltjai egy lapcentrált kockarács Voronoi cellái. Így Hales [51] híres eredménye szerint, melyben igazolta a Kepler sejtést, az $\mathbb{R}^3$ -beli, egységnyi beírható sugarú rombikus dodekaéderek között a minimális térfogatúak a szabályos rombikus dodekaéderek. Hales eredményének ezen következményét egy erősítése található a [10] cikkben, melyet a teljesség kedvéért közlünk. Ehhez vezessük be az $\text{ir}(\cdot)$ jelölést egy halmaz beírható gömbje sugarának, azaz a halmaz által tartalmazott valamelyik legnagyobb sugarú gömb sugarának jelölésére.

7.5. tétel (Bezdek, 2000). *Legyen $1 \leq k \leq d$ tetszőleges. Az $\mathbb{R}^d$ -beli egységnyi beírható sugarú rombikus dodekaéderek között a szabályosak k -adik belső térfogata minimális.*

A további vizsgálatunkhoz választunk egy $Z_p^{\text{reg}} \in \mathcal{Z}_p$ kockát és egy $Z_{rd}^{\text{reg}} \in \mathcal{Z}_{rd}$ szabályos rombikus dodekaédert.

7.6. tétel (Joós, Lángi, 2023). *Legyen $1 \leq k \leq d-1$. Ekkor minden $Z_i \in \mathcal{Z}_i$ zonotópra, melyre $V_d(Z_i) = V_d(Z_i^{\text{reg}})$ teljesül, ahol $i \in \{p, rd\}$, igaz a*

$$V_k(Z_i) \geq V_k(Z_i^{\text{reg}})$$

egyenlőtlenség. Itt egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha Z_i és Z_i^{reg} egybevágóak. Továbbá teljesül a

$$\text{cr}(Z_i) \geq \text{cr}(Z_i^{\text{reg}}).$$

egyenlőtlenség.

A 7.7. következmény az előző két tétel kombinációjából adódik.

7.7. következmény (Joós, Lángi, 2023). *Minden $Z_i \in \mathcal{Z}_i$ zonotópra, ahol $\text{ir}(Z_i) = \text{ir}(Z_i^{\text{reg}})$ és $i \in \{p, rd\}$, igaz a*

$$\text{cr}(Z_i) \geq \text{cr}(Z_i^{\text{reg}})$$

egyenlőtlenség, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha Z_i és Z_i^{reg} egybevágóak.

A 7.6 tétel bizonyításának módszerét alkalmazva adódik az alábbi állítás.

7.8. megjegyzés (Joós, Lángi, 2023). Legyen $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$, ahol $d \leq n \leq d+1$. Ekkor bármely $1 \leq k \leq d$ esetén

$$\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_k}|}{\binom{n}{k}} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n} |x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_d}|}{\binom{n}{d}} \right)^{\frac{1}{d}},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $n = d$, és a vektorok páronként merőlegesek és egyenlő hosszúak, vagy a lineáris burkuk dimenziója legfeljebb $k-1$. Továbbá bármely $p > 1$ esetén igaz a

$$\left(\frac{\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} |x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_k}|^p}{\binom{n}{k}} \right)^{\frac{1}{pk}} \geq |x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_d|^{\frac{1}{d}}$$

egyenlőtlenség, ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a vektorok páronként merőlegesek és egyenlő hosszúak, vagy a lineáris burkuk dimenziója legfeljebb $k-1$.

Minden $S \subset \mathbb{R}^d$ szimplex, $1 \leq k \leq d-1$ egész, és $m \in \mathbb{R}$ valós szám esetén jelölje $g_k^m(S)$ S k -dimenziós lapjai térfogatai m -edik hatványainak összegét. Tanner [84] igazolta, hogy ha $2 \leq k \leq d-1$ és $m \in (0, 2]$, azok $\mathbb{R}^d$ -beli S szimplexek közt, melyre $g_1^2(S)$ egy rögzített értéket vesz fel, $g_k^m(S)$ pontosan akkor maximális, ha S szabályos. Következő eredményünk a 7.9. állítás, melyet Tanner fenti eredményének analogonjaként gondolhatunk. Ez az eredmény a 7.6. tétel bizonyításának természetes módosításával igazolható.

7.9. állítás (Joós, Lángi, 2023). Legyenek $1 \leq k \leq d-1$ egészek, és $m \geq 1$ valós. Ekkor tetszőleges $\mathbb{R}^d$ -beli, egységnyi térfogatú S szimplexre $g_k^m(S)$ pontosan akkor maximális, ha S szabályos.

A következő tételek zonotópok átlagszélességével foglalkoznak.

7.10. tétel (Joós, Lángi, 2023). Ha $Z \in \mathcal{Z}_{\mathbb{P}}$ kielégíti az $\text{mwidth}(Z) = \text{mwidth}(Z_{\mathbb{P}}^{\text{reg}})$ feltételt, akkor $\text{cr}(Z) \geq \text{cr}(Z_{\mathbb{P}}^{\text{reg}})$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha Z egy kocka.

7.11. tétel (Joós, Lángi, 2023). Legyen $d \geq 2$ és $Z_{\text{rd}}^{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{d+1} [o, q_i]$. Ekkor bármely $Z = \sum_{i=1}^{d+1} [o, p_i] \in \mathcal{Z}_{\text{rd}}$ esetén, ha van centrált kanonikus alakja és $\text{mwidth}(Z) = \text{mwidth}(Z_{\text{rd}}^{\text{reg}})$, akkor

$$(12) \quad \text{cr}(Z) \geq \text{cr}(Z_{\text{rd}}^{\text{reg}}),$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha Z és $Z_{\text{rd}}^{\text{reg}}$ egybevágóak. Emellett, ha d páratlan, akkor van olyan $Z' = \sum_{i=1}^{d+1} [o, p'_i]$ rombikus dodekaéder, melyre $\text{mwidth}(Z') = \text{mwidth}(Z_{\text{rd}}^{\text{reg}})$ és $\text{cr}(Z') < \text{cr}(Z_{\text{rd}}^{\text{reg}})$.

7.12. állítás (Joós, Lángi, 2023). Tetszőleges $Z \in \mathcal{Z}_{\text{p}}$ esetén, ha $\text{mwidth}(Z) = \text{mwidth}(Z_{\text{p}}^{\text{reg}})$, akkor $V_2(Z) \leq V_2(Z_{\text{p}}^{\text{reg}})$, és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha Z egy kocka.

7.13. tétel (Joós, Lángi, 2023). Legyen $Z_{\text{rd}}^{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{d+1} [o, q_i]$, ahol $q_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ minden i -re. Ekkor, ha $Z = \sum_{i=1}^{d+1} [o, p_i]$ egy rombikus dodekaéder, melyre $p_i \in \mathbb{S}^{d-1}$ minden i -re, akkor

$$V_2(Z) \geq V_2(Z_{\text{rd}}^{\text{reg}}),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha Z szabályos.

7.14. definíció. Legyen $Z = \sum_{i=1}^n [o, p_i]$ egy $\mathbb{R}^d$ -beli zonotóp, és legyen $\alpha > 0$. A

$$V_{k,\alpha}(Z) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} V_k^\alpha(P(i_1, \dots, i_k))$$

menyiséget Z teljes α -hatványú k -térfogatának nevezzük.

A következő eredményünk egy általánosított izoperimetrikus egyenlőtlenség rombikus dodekaéderek teljes négyzetes k -térfogatára. Megjegyezzük, hogy hasonló állítás található a [22] cikkben parallelotópokra.

7.15. tétel (Joós, Lángi, 2023). Legyen Z egy $\mathbb{R}^d$ -beli rombikus dodekaéder. Ekkor tetszőleges $1 \leq k < m \leq d$ esetén a

$$\frac{(V_{k,2}(Z))^m}{(V_{m,2}(Z))^k}$$

menyiség pontosan akkor minimális, ha Z szabályos.

7.16. tétel (Joós, Lángi, 2023). Legyen $n \geq d$ és legyen $Z = \sum_{i=1}^n [o, x_i]$ egy zonotóp $\mathbb{R}^d$ -ben. Ekkor bármely $1 \leq k < d$ esetén

$$\left(\frac{V_{k,2}(Z)}{\binom{n}{k}} \right)^{\frac{1}{k}} \geq \left(\frac{V_{k+1,2}(Z)}{\binom{n}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k+1}},$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $n = d$ és Z egy kocka, vagy ha Z dimenziója legfeljebb $k - 1$.

Idézzük fel, hogy tetszőleges $d \geq 2$ és $n \geq d$ esetén $\mathcal{Z}_{d,n}$ jelöli a d -dimenziós, n szakasz által generált zonotópok családját. A következőkben elegendően sok szakasz által generált zonotópokra vonatkozó izoperimetrikus problémákat vizsgálunk. Érdekes megjegyezni, hogy

mivel az euklideszi gömb tetszőlegesen jól megközelíthető zonotópokkal, és sok izoperimetrikus probléma megoldása az euklideszi gömb, az általunk vizsgált problémák szorosan kapcsolódnak ahhoz a kérdéshez, hogy egy euklideszi gömb milyen pontossággal közelíthető meg adott számú szakasz által generált zonotóppal. Az utóbbi problémát a szakirodalomban alaposan vizsgálták, azon kérdés kapcsán, hogy legalább hány irányban kell egy konvex test merőleges vetületének a térfogatát megmérni ahhoz, hogy a felszínét adott ε hibán belül meg tudjuk becsülni. A szükséges irányok számának nagyságrendjét a legtöbb dimenzióban Linhart, Bourgain, Lindestrauss, Milman and Matoušek [9, 65, 19, 21, 67] munkája eredményeként sikerült meghatározni. Konkrétabban, ismert, hogy ha $d \geq 2$, akkor léteznek $c_1 = c_1(d)$ és $c_2 = c_2(d)$ csak dimenziótól függő konstansok az alábbi tulajdonsággal: ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén $N(\varepsilon)$ jelöli a legkisebb n számot, melyre létezik olyan $Z \in \mathcal{Z}_{d,n}$ zonotóp, amely kielégíti a $\mathbf{B}^d \subseteq Z \subseteq (1 + \varepsilon)\mathbf{B}^d$ tartalmazási relációkat, akkor

$$(13) \quad c_1 \varepsilon^{-\frac{2(d-1)}{d+2}} \leq N(\varepsilon) \leq \begin{cases} c_2 \varepsilon^{-\frac{2(d-1)}{d+2}}, & \text{ha } d = 2 \text{ vagy } d \geq 5, \\ c_2 (\varepsilon^{-2} |\log \varepsilon|)^{\frac{(d-1)}{d+2}}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Emellett Bourgain és Lindestrauss [20] igazolta, hogy a (13) jobb oldalán szereplő gyengébb korlát megvalósítható egyenlő élhosszú zonotóppal is, azaz van olyan $n \leq c_2 (\varepsilon^{-2} |\log \varepsilon|)^{\frac{(d-1)}{d+2}}$ egyenlő hosszú szakaszok által generált Z zonotóp, melyre $\mathbf{B}^d \subseteq Z \subseteq (1 + \varepsilon)\mathbf{B}^d$ teljesül.

Ugyanúgy, ahogy a fenti problémánál, a d dimenziót rögzített paraméternek, és a szakaszok n számát változónak tekintjük. Továbbá bevezetjük az

$$U_d(n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\log n}}{n^{\frac{d+2}{2d-2}}}, & \text{ha } d = 3 \text{ vagy } d = 4, \\ \frac{1}{n^{\frac{d+2}{2d-2}}}, & \text{ha } d = 2 \text{ vagy } d \geq 5 \end{cases}$$

jelölést.

Első eredményünk (13) közvetlen következménye.

7.17. tétel (Joós, Lángi, 2023). *Legyen $d \geq 2$ rögzített. Ekkor léteznek olyan pozitív $c = c(d)$ és $C = C(d)$ csak dimenziótól függő konstansok, melyekre bármely $n \geq d + 1$ esetén*

$$(14) \quad \frac{c}{n^{\frac{d+2}{2d-2}}} \leq \min \left\{ \frac{\text{cr}(Z)}{\text{ir}(Z)} - 1 : Z \in \mathcal{Z}_{d,n} \right\} \leq C U_d(n).$$

Az alábbiakban hasonló problémákat vizsgálunk.

7.18. tétel (Joós, Lángi, 2023). *Legyen $1 \leq i \leq d$. Ekkor van olyan $C = C(d)$ csak dimenziótól függő pozitív konstans, hogy elegendően nagy n esetén*

$$\frac{4i}{5dn^2} \leq \min \left\{ \frac{V_i(Z)}{V_i(\mathbf{B}^d)} - 1 : Z \in \mathcal{Z}_{d,n}, \text{ir}(Z) = 1 \right\} \leq CU_d(n).$$

7.19. tétel (Joós, Lángi, 2023). *Legyen $1 \leq i \leq d$. Ekkor van olyan $C = C(d)$ csak dimenziótól függő pozitív konstans, hogy elegendően nagy n esetén*

$$\frac{2i}{5n^2} \leq \min \left\{ 1 - \frac{V_i(Z)}{V_i(\mathbf{B}^d)} : Z \in \mathcal{Z}_{d,n}, \text{cr}(Z) = 1 \right\} \leq CU_d(n).$$

7.20. tétel (Joós, Lángi, 2023). *Legyen $1 \leq i < k \leq d$. Ekkor vannak olyan $c = c(d)$ és $C = C(d)$ csak dimenziótól függő pozitív konstansok, hogy elegendően nagy n esetén*

$$(15) \quad \frac{c}{n^{\frac{(d+2)(d+3)}{4d-4}}} \leq \min \left\{ \frac{(V_i(Z))^{\frac{1}{i}}}{(V_k(Z))^{\frac{1}{k}}} - \frac{(V_i(\mathbf{B}^d))^{\frac{1}{i}}}{(V_k(\mathbf{B}^d))^{\frac{1}{k}}} : Z \in \mathcal{Z}_{d,n} \right\} \leq \frac{C}{n}.$$

Emellett van olyan csak d -től függő $\bar{c} > 0$ konstans, melyre

$$(16) \quad \frac{\bar{c}}{n^2} \leq \min \left\{ \frac{(V_{d-1}(Z))^{\frac{1}{d-1}}}{(V_d(Z))^{\frac{1}{d}}} - \frac{(V_{d-1}(\mathbf{B}^d))^{\frac{1}{d-1}}}{(V_d(\mathbf{B}^d))^{\frac{1}{d}}} : Z \in \mathcal{Z}_{d,n} \right\}.$$

Az előző tételben szereplő törtek némileg átrendezett különbségére vonatkozik a 7.21. megjegyzés.

7.21. megjegyzés (Joós, Lángi, 2023). *Megjegyezzük, hogy ha $Z_0 \in \mathcal{Z}_{d,n}$ kielégíti az $\text{ir}(Z_0) = 1$ feltételt és*

$$V_i(Z_0) = \min\{V_i(Z) : Z \in \mathcal{Z}_{d,n}, \text{ir}(Z) = 1\},$$

akkor a 7.18. tétel miatt minden $1 \leq i < k \leq d$ esetén

$$0 \leq \left(\frac{V_i(Z_0)}{V_d(\mathbf{B}^d)} \right)^{\frac{1}{i}} - \left(\frac{V_k(Z_0)}{V_k(\mathbf{B}^d)} \right)^{\frac{1}{k}} \leq \left(\frac{V_i(Z_0)}{V_d(\mathbf{B}^d)} \right)^{\frac{1}{i}} - 1 \leq CU_d(n)$$

alkalmas $C > 0$ konstansra, és elegendően nagy n értékre.

Az ismertetett eredményekre vonatkozóan néhány megoldatlan kérdést fogalmazunk meg.

7.22. probléma (Joós, Lángi, 2023). *Igaz, hogy egy egységnyi térfogatú Z rombikus dodekaéder köréírható gömbjének sugara pontosan akkor minimális, ha Z szabályos?*

7.23. probléma (Joós, Lángi, 2023). *Legyen $1 \leq k < d$. Keressük meg azon $Z \in \mathcal{Z}_{d,d+1}$ zonotópokat, melyekre $\text{cr}(Z) = 1$ és maximális k -adik belső térfogatuk van.*

Megjegyezzük, hogy a 7.23. problémában, a 7.6. tétel miatt Z egy szabályos rombikus dodekaéder ha $k = d$, és a 7.11. tétel miatt Z nem szabályos, ha $k = 1$ és d páratlan.

7.24. probléma (Joós, Lángi, 2023). *Igazoljuk vagy cáfoljuk, hogy minden $1 < k < d$ esetén az $\text{mwidth}(Z) = 1$ feltételt kielégítő $Z \in \mathcal{Z}_{d,d+1}$ zonotópok között a maximális k -adik belső térfogattal rendelkező zonotópok szabályosak.*

7.25. probléma (Joós, Lángi, 2023). *Keressük meg a 7.18-7.20. tételekben szereplő mennyiségek pontos nagyságrendjét.*

8. EGY NORMÁLT TEREKRE VONATKOZÓ ROGERS-SHEPHARD JELLEGŰ KÉRDÉS

Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test. Ekkor, ha valamely $x \in \mathbb{R}^d$ esetén $K \cap (x + K)$ nem üres, akkor a $\text{conv}(K \cup (x + K))$ konvex testet K egy *eltolási testjének* hívjuk. Rogers és Shephard [77] egy 1958-as eredménye meghatározta a

$$c_{tr}(K) = \frac{1}{\text{vol}(K)} \max\{\text{vol}(\text{conv}(K \cup (x + K))) : (x + K) \cap K \neq \emptyset, x \in \mathbb{R}^d\}$$

mennyiség minimumát és maximumát az $\mathbb{R}^d$ -beli konvex testek családján. Sejtésüket azon konvex testekre vonatkozóan, melyre ezen két mennyiség valamelyike felvételik, csak 2006-ban oldotta meg Martini és Mustafaev [66] (ld. még a [41] cikket egy egyszerűbb bizonyításért).

Ebben a fejezetben a fenti probléma egy normált változatát mutatjuk be, melynél a d -dimenziós egységömb térfogatát κ_d -vel jelöljük. Jól ismert, hogy egy normált tér egységömbje egy origóra szimmetrikus konvex test, és minden origóra szimmetrikus konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben természetes módon indukál egy $\mathbb{R}^d$ -beli normát. Az M origóra szimmetrikus normált test által $\mathbb{R}^d$ -n definiált normált teret $\mathcal{M}$ -mel fogjuk jelölni. Az is jól ismert, hogy minden véges dimenziós normált tér felruházható egy Haar mértékkel, és ezen mérték konstans szorzó erejéig megegyezik a szokásos Lebesgue mértékkel. Attól függően, hogy a konstans szorzót a normált térben hogyan választjuk, a szakirodalomban négy különböző értelemben is beszélünk a normált téren definiált térfogatról [4]. Azon Haar mértéket, melynél a norma M egységömbjének térfogata κ_d , *Busemann térfogatnak* nevezzük. A *Holmes-Thompson térfogat* esetében az M egységömb M° polárisának térfogata κ_d . Gromov-féle tömegről beszélünk, ha az M -be beírható legnagyobb térfogatú

keresztapolitóp térfogata $\frac{2^d}{d!}$, és Gromov-féle tömeg*-ról (vagy Benson-féle térfogatról) ha az M köré írható minimális térfogatú paralelotóp térfogata 2^d . Ha a normált tér egységsgömbje M , ezen négy térfogatot rendre a $\text{vol}_M^{\text{Bus}}(\cdot)$, $\text{vol}_M^{\text{HT}}(\cdot)$, $\text{vol}_M^m(\cdot)$ és $\text{vol}_M^{m*}(\cdot)$ szimbólumokkal jelöljük. Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, akkor azt mondjuk, hogy K *relatív normája* az $\frac{1}{2}(K - K)$ o -szimmetrikus konvex test által generált norma. Ez a norma azon konstans szorzó erejéig egyértelműen létező norma, melyben K egy állandó szélességű test, azaz melyben K tetszőleges párhuzamos támaszhipersík-párja közti normált távolság független a hipersíkok választásától.

Vezessük be az alábbi mennyiségeket.

8.1. definíció. *Legyen K egy konvex test $\mathbb{R}^d$ -ben, és legyen $\mathcal{M}$ azon normált tér, mely normája K relatív normája. Ekkor tetszőleges $\tau \in \{\text{Bus}, \text{HT}, m, m^*\}$ esetén legyen*

$$(17) \quad c_{tr}^\tau(K) = \max\{\text{vol}_M^\tau(\text{conv}(K \cup (x + K))) : (x + K) \cap K \neq \emptyset, x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Megemlítyük, hogy a fenti mennyiségek affin invariáns mennyiségek, azaz az értékük nem változik, amennyiben a testre egy affin transzformációt alkalmazunk.

A fő eredményünk kimondásához definiálunk egy konvex síkidomot. Tekintsük azon S_0 négyzetet, melynek csúcsai $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ a szokásos bázisban mérve. Cseréljük ki S_0 vízszintes éleit az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletű ellipszis megfelelő íveivel, ahol $a = 1.61803\dots$ és $b = \frac{a}{\sqrt{2a^2-1}}$, ahol megjegyezzük, hogy a és b ezen választása esetén S_0 csúcsai az ellipszis pontjai. Cseréljük ki S_0 függőleges éleit a fenti két ellipszis ív o középpontú, $\frac{\pi}{2}$ szögű elforgatottjával, és jelöljük az így kapott konvex síkidomot M_0 -lal.

Az a mennyiségnek a fenti definícióban szereplő értéke egy transzcendens egyenlet gyöke, és azon tulajdonsággal rendelkezik, hogy a $\text{vol}(M_0^\circ) (\text{vol}(M_0) + 4)$ kifejezés, ahol M_0° jelöli M_0 polárisát, maximális minden $a > 1$ esetén.

A fő eredményünk az alábbi.

8.2. tétel (Lángi, 2016). *Legyen K egy konvex síkidom. Ekkor*

8.2.1. $2\pi \leq c_{tr}^{\text{Bus}}(K) \leq 3\pi$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha K egy háromszög, és a jobb oldalon, ha K egy parallelogramma;

- 8.2.2. $\frac{18}{\pi} \leq c_{tr}^{HT}(K) \leq 7.81111\dots$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha K egy háromszög, és a jobb oldalon egyenlőség van, ha K M_0 egy affin képe,
- 8.2.3. $6 \leq c_{tr}^m(K) \leq \pi + 4$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha K egy (esetleg elfajuló) konvex négyszög, és a jobb oldalon, ha K egy ellipszis;
- 8.2.4. $6 \leq c_{tr}^{m^*}(K) \leq 12$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha K egy háromszög, és a jobb oldalon, ha K egy paralelogramma.

Természetes kérdés a fenti mennyiségnek a középpontosan szimmetrikus konvex síkidomok halmazán is megkeresni a szélsőértékeit.

8.3. tétel (Lángi, 2016). *Legyen M egy o -szimmetrikus konvex síkidom. Ekkor*

- 8.3.1. $\pi + 4 \leq c_{tr}^{Bus}(M) \leq 3\pi$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha M egy ellipszis, és a jobb oldalon, ha M egy paralelogramma;
- 8.3.2. $\frac{21}{\pi} \leq c_{tr}^{HT}(M) \leq 7.81111\dots$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha M egy affin szabályos hatszög, és a jobb oldalon egyenlőség van, ha M az M_0 affin képe;
- 8.3.3. $6 \leq c_{tr}^m(M) \leq \pi + 4$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha M egy paralelogramma, és a jobb oldalon, ha M egy ellipszis;
- 8.3.4. $7 \leq c_{tr}^{m^*}(M) \leq 12$, ahol a bal oldalon pontosan akkor van egyenlőség, ha M egy affin szabályos hatszög, és a jobb oldalon, ha M egy paralelogramma.

Legyen most $d \geq 3$. A konvex testekre vonatkozó Brunn-Minkowski egyenlőtlenség szerint

$$\text{vol} \left(\frac{1}{2}(K - K) \right)^{1/d} \geq \frac{1}{2} \text{vol}(K)^{1/d} + \frac{1}{2} \text{vol}(-K)^{1/d} = \text{vol}(K),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha K és $-K$ egymás pozitív homotetikus képei. Ez utóbbi feltétel pontosan akkor teljesül, ha K o -szimmetrikus, tehát a $c_{tr}(K)$ mennyiség a maximumát a d -dimenziós konvex testek halmazán középpontosan szimmetrikus konvex testnél veheti fel. Innen, és a [77] és [41] cikkbeli eredmények alapján adódik az alábbi állítás.

8.4. megjegyzés (Lángi, 2016). *Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ egy konvex test, akkor*

$$c_{tr}^{Bus}(K) \leq d + 1,$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha K egy centrálszimmetrikus pszeudo dupla piramis, a [77] cikkben definiált értelemben. Hasonlóan, ha $M \subset \mathbb{R}^d$ egy o -szimmetrikus konvex test, akkor

$$c_{tr}^{Bus}(K) \geq 1 + \frac{2\kappa_{d-1}}{\kappa_d},$$

ahol egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha K egy ellipszoid.

8.5. probléma (Lángi, 2016). Keressük meg a $c_{tr}^\tau(K)$ mennyiség maximumát a d -dimenziós konvex testek halmazán tetszőleges $d \geq 3$ és $\tau \in \{HT, m, m*\}$ esetén.

8.6. probléma (Lángi, 2016). Keressük meg a $c_{tr}^\tau(K)$ mennyiség minimumát a d -dimenziós konvex testek halmazán tetszőleges $d \geq 3$ és $\tau \in \{Bus, HT, m, m*\}$ esetén.

Érdemes megjegyezni, hogy a $c_{tr}^{HT}(K)$ mennyiség minimumának meghatározása ekvivalens az o -szimmetrikus konvex testek térfogatszorzata minimumának meghatározásával, azaz a bevezetőben is említett Mahler-sejtéssel.

HIVATKOZÁSOK

- [1] A. Abramson et al., *An ingestible self-orienting system for oral delivery of macromolecules*, Science **363** (6427) (2019), 611-615.
- [2] A. Akopyan, A. Balitskiy and M. Grigorev, *On the Circle Covering Theorem by A.W. Goodman and R.E. Goodman*, Discrete Comput. Geom. **59** (2018), 1001-1009.
- [3] T. Alamo, J.M. Bravo and E.F. Camacho, *Guaranteed state estimation by zonotopes*, Automatica J. IFAC **41** (2005), 1035-1043.
- [4] J.C. Álvarez Paiva and A.C. Thompson, *Volumes on normed and Finsler spaces*, In: A Sampler of Riemann-Finsler Geometry, MSRI Publ. **49** (2004).
- [5] G. Ambrus and S. Nietert, *Polarization, sign sequences and isotropic vector systems*, Pacific J. Math. **303** (2019), 385-399.
- [6] C. Bandle, *Dido's problem and its impact on modern mathematics*, Notices Amer. Math. Soc. **64** (2017), 980-984.
- [7] M. Beck, K. Jochemko and E. McCullough, *h^* -polynomials of zonotopes*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), 2021-2042.
- [8] M.W. Bern and D. Eppstein, *Optimization over zonotopes and training support vector machines*, Proc. 7th Intern. Workshop Algorithms, Data Structures (2001), 111-121.
- [9] V. Betke and F. McMullen, *Estimating the sizes of convex bodies by projections*, J. Lond. Math. Soc. (2) **27** (1983), 525-538.
- [10] K. Bezdek, *On rhombic dodecahedra*, Beiträge Algebra Geom. **41** (2000), 411-416.
- [11] K. Bezdek, *Sphere packings revisited*, European J. Combin. **27** (2006), 864-883.
- [12] K. Bezdek and Z. Lángi, *On non-separable families of positive homothetic convex bodies*, Discrete Comput. Geom. **56** (2016), 802-813.

- [13] P. Biler and A. Witkowski, *Problems in mathematical analysis*, M. Dekker, New York, 1990.
- [14] S. G. Bobkov, M. Madiman, and L. Wang, *Fractional generalizations of Young and Brunn-Minkowski inequalities*, In C. Houdré, M. Ledoux, E. Milman, and M. Milman, editors, *Concentration, Functional Inequalities and Isoperimetry*, volume 545 of *Contemp. Math.*, pages 35-53. Amer. Math. Soc., 2011.
- [15] K.F. Bohringer, B.R. Donald, L.E. Kavraki and F. Lamiriaux, *Part orientation with one or two stable equilibria using programmable vector fields*, IEEE Transactions on Robotics Automation. **16**(2) (2000), 157-170.
- [16] V. G. Boltyanskii, *The problem on illuminating the boundary of a convex body*, Izv. Mold. Filiala AN SSSR **76** (1960), 77-84.
- [17] V. G. Boltyanskii and I. C. Gohberg, *The Decomposition of Figures into Smaller Parts*, translated from Russian, The University of Chicago Press, Chicago, 1980.
- [18] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933), 177-190.
- [19] J. Bourgain and J. Lindenstrauss, *Distribution of points on spheres and approximation by zonotopes*, Israel J. Math. **64** (1988), 25-31.
- [20] J. Bourgain and J. Lindenstrauss, *Approximating the ball by a Minkowski sum of segments with equal length*, Discrete Comput. Geom. **9** (1993), 131-144.
- [21] J. Bourgain, J. Lindenstrauss and V. Milman, *Approximation of zonoids by zonotopes*, Acta Math. **162** (1989), 73-141.
- [22] S. Brazitikos and F. McIntyre, *Vector-valued Maclaurin inequalities*, Commun. Contemp. Math. **24**(06) (2022), 2150044.
- [23] J.H. Conway and R.K. Guy, *Stability of polyhedra*, SIAM Rev. **8**(3) (1966), 381.
- [24] H.T. Croft, K. Falconer and R.K. Guy, *Unsolved Problems in Geometry*, Springer, New York, NY, 1991.
- [25] A. Deza, L. Pournin and N. Sukegawa, *The diameter of lattice zonotopes*, Proc. Amer. Math. Soc. **148**(8) (2020), 3507-3516.
- [26] R. Dawson and W. Finbow, *What shape is a loaded die?*, Math. Intelligencer **22** (1999), 32-37.
- [27] G. Domokos, F. Kovács, Z. Lángi, K. Regős and P.T. Varga, *Balancing polyhedra*, Ars Math. Contemp. **19** (2020), 95-124.
- [28] G. Domokos, Z. Lángi and T. Szabó, *On the equilibria of finely discretized curves and surfaces*, Monatsh. Math. **168** (2012) 321-345.
- [29] G. Domokos, Z. Lángi and T. Szabó, *A topological classification of convex bodies*, Geom. Dedicata **182** (2016), 95-116.
- [30] G. Domokos, Z. Lángi and P. Várkonyi, *A characterization of the symmetry groups of mono-monostatic convex bodies*, Monatsh. Math. **201** (2023), 703-724.
- [31] G. Domokos, A.Á. Sipos, T. Szabó and P.L. Várkonyi, *Pebbles, shapes and equilibria*, Math. Geosci. **42**(1) (2010), 29-47.
- [32] G. Domokos and P. Várkonyi, *Geometry and self-righting of turtles*, Proc. R. Soc. B. **275** (2007), 11-17.
- [33] A. Dumitrescu and C.D. Tóth, *On the cover of the rolling stone*, Proceedings of the 31st Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (2020), 2575-2586.

- [34] H.G. Eggleston, *Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*, J. London Math. Soc. **30** (1955), 11-24.
- [35] R.M. Erdahl, *Zonotopes, dicings, and Voronoi's conjecture on parallelohedra*, European J. Combin. **20** (1999), 527-549.
- [36] P. Filliman, *Extremum problems for zonotopes*, Geom. Dedicata **27** (1988), 251-262.
- [37] M. Fradelizi, Z. Lángi and A. Zvavitch, *Volume of the Minkowski sums of star-shaped sets*, Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B **9** (2022), 358-372.
- [38] M. Fradelizi, M. Madiman, A. Marsiglietti and A. Zvavitch, *Do Minkowski averages get progressively more convex?*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **354** (2016), 185-189.
- [39] M. Fradelizi, M. Madiman, A. Marsiglietti and A. Zvavitch, *The convexification effect of Minkowski summation*, EMS Surv. Math. Sci. **5** (2018), 1-64.
- [40] R.J. Gardner, *Geometric tomography*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **58**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [41] Á. G. Horváth and Z. Lángi, *On the volume of the convex hull of two convex bodies*, Monatsh. Math. **174** (2014), 219-229.
- [42] M. Goldberg and R.K. Guy, *Stability of polyhedra (J.H. Conway and R.K. Guy)*, SIAM Rev. **11** (1969), 78-82.
- [43] A.W. Goodman and R.E. Goodman, *A circle covering theorem*, Amer. Math. Monthly **52** (1945), 494-498.
- [44] E. Gover and N. Krikorian, *Determinants and the volumes of parallelotopes and zonotopes*, Lin. Alg. Appl. **433** (2010), 28-40.
- [45] B. Grünbaum, *A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **53** (1957), 776-778.
- [46] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Graduate Texts in Mathematics **221**, second edition, Springer, New York, 2003.
- [47] L.J. Guibas, A. Nguyen and L. Zhang, *Zonotopes as bounding volumes*, Proceedings of the 14th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete algorithms (2003), 803-812.
- [48] K. Gyarmati, M. Matolcsi, and I. Z. Ruzsa, *A superadditivity and submultiplicativity property for cardinalities of sumsets*, Combinatorica, **30**(2) (2010), 163-174.
- [49] H. Hadwiger, *Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers*, Comment. Math. Helv. **18** (1945), 73-75.
- [50] H. Hadwiger, *Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers*, Comment. Math. Helv. **19** (1946), 72-73.
- [51] T.C. Hales, *A proof of the Kepler conjecture*, Ann. Math. (2) **162** (2005), 1065-1185.
- [52] T.I. Heath (Ed.), *The Works of Archimedes*, Cambridge University Press, 1897.
- [53] A. Heppes, *Térbeli pontthalmazok felosztása kisebb átmérőjű részhalmazok összegére*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **7** (1957), 413-416.
- [54] M. Henze and R.-D. Malikiosis, *On the covering radius of lattice zonotopes and its relation to view-obstructions and the lonely runner conjecture*, Aequationes Math. **91** (2017), 331-52.
- [55] M. Hujter and Z. Lángi, *On the multiple Borsuk numbers of sets*, Israel J. Math. **199** (2014), 219-239.

- [56] A. Joós and Z. Lángi, *Isoperimetric problems for zonotopes*, *Mathematika* **69** (2023), 508-534.
- [57] J. Kahn, and G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1993), 60-62.
- [58] Lord Kelvin (Sir William Thomson), *LXIII. On the division of space with minimum partitional area*, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **24** (1887), 503-514.
- [59] Z. Lángi, *On a normed version of a Rogers-Shephard type problem*, *Israel J. Math.* **202** (2016), 203-217.
- [60] Z. Lángi, *An isoperimetric problem for three-dimensional parallelohedra*, *Pacific J. Math.* **316** (2022), 169-181.
- [61] Z. Lángi, *A solution to some problems of Conway and Guy on monostable polyhedra*, *Bull. Lond. Math. Soc.* **54**(2) (2022), 501-516.
- [62] Z. Lángi and M. Naszódi, *On multiple Borsuk numbers in normed spaces*, *Studia Sci. Math. Hungar.* **54** (2017), 13-26.
- [63] M. Lenz, *Interpolation, box splines, and lattice points in zonotopes*, *Int. Math. Res. Not.* **2014** (2014), 5697-5712.
- [64] W. Lin, D. D.-F. Liu, and X. Zhu, *Multi-coloring the Mycielskians of graphs*, *J. Graph Theory* **63** (2010), 311-323.
- [65] J. Linhart, *Approximation of a ball by zonotopes using uniform distribution on the sphere*, *Arch. Math. (Basel)* **53** (1989), 82-86.
- [66] H. Martini and Z. Mustafaev, *Some applications of cross-section measures in Minkowski spaces*, *Period. Math. Hungar.* **53**(1-2) (2006), 185-197.
- [67] J. Matoušek, *Improved upper bounds for approximation by zonotopes*, *Acta Math.* **177** (1996), 55-73.
- [68] P. McMullen, *On zonotopes*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **159** (1971), 91-109.
- [69] P. McMullen, *Space tiling zonotopes*, *Mathematika* **22**(2) (1975), 202-211.
- [70] P. McMullen, *Volumes of projections of unit cubes*, *Bull. Lond. Math. Soc.* **16**(3) (1984), 278-280.
- [71] N. Nikolov and R. Rafailov, *On the sum of powered distances to certain sets of points on the circle*, *Pacific J. Math.* **253** (2011), 157-168.
- [72] A. Polyanskii, *A cap covering theorem*, *Combinatorica* **41** (2021), 695-702.
- [73] A.S. Riesling, *Borsuk's problem in three-dimensional spaces of constant curvature*, *Ukr. Geom. Sb.* **11** (1971), 78-83.
- [74] C.A. Rogers, *Symmetrical sets of constant width and their partitions*, *Mathematika* **18** (1971), 105-111.
- [75] C.A. Rogers and G.C. Shephard, *The difference body of a convex body*, *Arch. Math. (Basel)* **8** (1957), 220-233.
- [76] C.A. Rogers and G.C. Shephard, *Convex bodies associated with a given convex body*, *J. London Math. Soc.* **33** (1958), 270-281.
- [77] C.A. Rogers and G.C. Shephard, *Some extremal problems for convex bodies*, *Mathematika* **5** (1958), 93-102.
- [78] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **151**, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [79] G.C. Shephard, *Twenty problems on convex polyhedra part II*, *Math. Gaz.* **52** (1968), 359-367.

- [80] G.C. Shephard, *Combinatorial properties of associated zonotopes*, Canad. J. Math. **24** (1974), 302-331.
- [81] K. J. Swanepoel, *A new proof of Vázsonyi's conjecture*, J. Combin. Theory, Ser. A **115** (2008), 888-892.
- [82] T. Szabó and G. Domokos, *A new classification system for pebble and crystal shapes based on static equilibrium points*, Central European Geology, **53**(1) (2010), 1-19.
- [83] T. Szabó, G. Domokos, J.P. Grotzinger and D.J. Jerolmack, *Reconstructing the transport history of pebbles on Mars*, Nature Comm. **6** (2015), paper 8366.
- [84] R.M. Tanner, *Some content maximizing properties of the regular simplex*, Pacific J. Math. **52** (1974), 611-616.
- [85] C. Tardif, *Fractional chromatic numbers of cones over graphs*, J. Graph Theory **38** (2001), 87-94.
- [86] P.L. Várkonyi, *Estimating Part Pose Statistics With Application to Industrial Parts Feeding and Shape Design: New Metrics, Algorithms, Simulation Experiments and Datasets*, IEEE Transactions on Automation Science and Engineering **11**(3) (2014), 658 - 667.
- [87] D. Weaire and R. Phelan, *A counter-example to Kelvin's conjecture on minimal surfaces*, Phil. Mag. Lett. **69**(2) (1994), 107-110.
- [88] M. Winter, *Classification of vertex-transitive zonotopes*, Discrete Comput. Geom. **66** (2021), 1446-1462.