

Opponensi vélemény
Lángi Zsolt
Inequalities in Discrete and Convex Geometry
című MTA doktori disszertációjáról

A disszertáció 9+120 oldal terjedelmű, ábrákkal tarkított, gondosan megírt mű. A disszertáció a pályázónak a mű benyújtását megelőző tíz éven belül született hét cikke alapján készült. A cikkek közül négy társszerzős és mindegyik cikk rangos nemzetközi folyóiratban jelent meg (egy Q2-es, a többi Q1-es). Mindegyik cikk a konvex és diszkrét geometria egy-egy klasszikus problémájával foglalkozik vagy annak egy érdekes általánosítását vizsgálja. A különböző problémákat tárgyaló cikkek közös vezérfonala, hogy valamilyen geometriai mennyiségre igyekszik lehetőleg éles korlátokat adni, illetve tisztázni az egyenlőség esetét.

A bevezetésben áttekinti az egyes problémák eredetét és a korábbi eredményeket.

A harmadik fejezetben bevezeti a k -szoros Borsuk szám fogalmát. Ez az a legkisebb egész amire létezik a halmaznak ennyi elemű kisebb átmérőjű halmazokkal való k -szoros fedése. Boltyanskii klasszikus eredményét felhasználva belátja, hogy ha egy síkbeli halmaz Borsuk száma 3, akkor a k -szoros Borsuk száma egyenlő a halmazt tartalmazó ugyanolyan átmérőjű egyetlen konstans szélességű halmaz k -szoros Borsuk számával, majd pontos értéket ad síkbeli konstans szélességű halmazok k -szoros Borsuk számára: egy $2s+1$ oldalú Reuleaux sokszög esetén $2k + \lceil \frac{k}{s} \rceil$, egyébként $2k+1$. Magasabb dimenzióban általánosítja a Borsuk számra ismert egyenlőtlenségeket k -szoros Borsuk számra és meghatározza a gömb k -szoros Borsuk számát. A fejezet további részében véges ponthalmazok k -szoros Borsuk számát vizsgálja.

A negyedik fejezet Goodman és Goodman egy sejtéséhez kapcsolódik: Egy konvex test τ_i arányú homotetikus képeiből álló nem-szeperálható család lefedhető a test egy $\sum \tau_i$ arányú homotetikus képével. A 4.1. szakaszban cáfolja ezt a sejtést. Először a síkon konstruál ellenpéldát egy szabályos háromszög alkalmas három homotetikus képe segítségével, majd ezt kiterjeszti magasabb dimenzióba. Ezután belátja, hogy a síkon ez az ellenpélda szolgáltatja a legjobb λ értéket, amire igaz, hogy bármely síkbeli konvex test három elemű nem-szeperálható homotetikusai lefedhetők a test $\lambda \sum \tau_i$ arányú homotetikus képével. Ugyanakkor az eredeti Goodman és Goodman eredmény igazolásának finomításával belátja, hogy a sejtés igaz centrálszimmetrikus konvex testekre minden dimenzióban. A fejezet végén a nem-szeperálható családok helyett k -impassable családokat vizsgál és belátja, hogy ebben az esetben a sejtés igaz tetszőleges konvex tesre, sőt erősebbet igazol: a család konvex burka szabadon mozog $(\sum \tau_i)K$ -ban, ami ekvivalens azzal, hogy a konvex burok összeadandója $(\sum \tau_i)K$ -nak.

Az ötödik fejezet 3 dimenziós monostabil poliéderekről szól. A szerző egyik vezető kutatója a konvex testek stabilitási elméletének, társszerzőkkel számos cikke született a témában. Jelen fejezetben egy egyszerzős cikket tárgyalja, amelyben Conway és Croft által felvetett három problémát vizsgál. Ezek közül kettőre teljes megoldást, a harmadikra

részmegoldást igazol. A fejezet fő eredménye az igen általános 5.2. Tétel, mely szerint tetszőleges $G \subset SO(3)$ csoport és $S, U \geq 1$ egészek esetén, ha K egy G invariáns konvex test S stabil és U instabil egyensúlyi pontokkal, akkor K tetszőlegesen közelíthető G invariáns konvex poliéderekkel amiknek S stabil és U instabil egyensúlyi pontjai vannak. Ennek következményeként adódik a meglepő válasz Conway és Croft első problémájára: bármely $n \geq 1$ esetén létezik monostabil poliéder n -edrendű tengelyes forgásszimmetriával. Meglepő a bizonyításban, hogy előbb konstruál egy sima monostabil konvex testet az adott tulajdonágokkal és aztán alkalmazza az 5.2. Tételt. Az 5.1. Következményben monostabil poliéderek esetén pontos értéket ad az átmérő és a körméret hányadosának infimumára.

A hatodik fejezet témája Bobkov, Madiman, Wang egy 2011-es sejtése. Eszerint egy kompakt halmaz n -dik Minkowski számtani közepének térfogata nem csökkenő sorozat. Pár évvel később ellenpéldát adtak minden $d \geq 12$ dimenzió esetén, továbbá ezek az ellenpéldák csillagszerű halmazok. Ezért is meglepő a fejezet fő eredménye, a 6.1. Tétel, mely szerint a sejtés igaz kompakt csillagszerű halmazokra $n \geq \max\{2, (d-1)(d-2)\}$ esetén. A 6.1. szakaszban ezt élesítik bizonyos összefüggő halmazokra.

A hetedik fejezetben 3 dimenziós paralleloéderekre igazol egy izoperimetrikus tételt. A paralleloéderek intenzíven vizsgált poliéderek a mozaikokkal való szoros kapcsolatuk miatt. A Kepler sejtés igazolása során Hales belátta, hogy az adott térfogatú 3-dimenziós paralleloéderek között a szabályos rombikus dodekaéder beírható gömbjének sugara maximális. Ezen kívül nem volt ismert más izoperimetrikus tétel paralleloéderekre. A fejezet fő eredménye a 7.1. Tétel, mely szerint az egységnyi térfogatú 3-dimenziós paralleloéderek közül a szabályos csonkolt oktaéder átlagszélessége minimális. A fejezet végén jelzi a szerző, hogy kéziratban vannak további paralleloéderekre vonatkozó izoperimetrikus tételek, ami a bizonyításban kidolgozott módszer erejét mutatja.

A nyolcadik fejezetben zonotópokra igazol izoperimetrikus tételeket. Először a kevés szakasz összegeként előálló zonotópokat tekinti: a d szakasz összegeként előálló parallelo-tópokat ($\mathcal{Z}_p$ osztály) illetve a $d+1$ szakasz összegeként előálló rombikus dodekaédereket ($\mathcal{Z}_{rd}$ osztály). A 8.3. Tétel szerint a $\mathcal{Z}_i$ ($i \in \{p, rd\}$) osztály azonos térfogatú elemei közül a szabályosnak a legkisebb a k -dik belső térfogata és egyenlőség csak szabályos esetén áll fenn, továbbá a körülírható gömb sugara is a szabályos esetén a legkisebb. Ebből és Bezdek egy tételéből következik, hogy mindkét osztályban az adott beírható gömb sugarúak közül a szabályosnak a legkisebb a köréírható gömb sugara. A 8.5. Tételben belátja, hogy a centrált kanonikus alakkal rendelkező adott átlagszélességű rombikus dodekaédek közül a szabályos esetén lesz a köréírható gömb sugara minimális, továbbá páratlan dimenzióban példát ad olyan rombikus dodekaéderre aminek átlagszélessége ugyanannyi mint a szabályosé de a köréírható gömbjének sugara kisebb mint a szabályosé. Ezen tételek bizonyításában hasznos eszköz a 8.1. Tétel, amely egy zonotóp paralleltartományára általánosítja a zonotópok klasszikus McMullen-Shephard felbontását.

A fejezet második részében olyan zonotópokat tekint, amelyeknél a definiáló szakaszok száma jóval nagyobb mint a dimenzió, pontosabban aszimptotikus korlátokat ad bizonyos

izoperimetrikus hányadosokra. A 8.10. Tételben egységnyi sugarú beírható gömb esetén ad korlátokat a $\min\{(V_i(Z)/V_i(\mathbf{B}^d)) - 1\}$ mennyiségre, a 8.11. Tételben egységnyi sugarú köréírható gömb esetén ad korlátot a $\min\{1 - (V_i(Z)/V_i(\mathbf{B}^d))\}$ mennyiségre, a 8.12. Tételben pedig a $\min\{(V_i(Z)^{\frac{1}{i}}/(V_k(Z)^{\frac{1}{k}} - V_i(\mathbf{B}^d)^{\frac{1}{i}}/(V_k(\mathbf{B}^d)^{\frac{1}{k}}))\}$ mennyiségre ad korlátot. A bizonyításokban többször ügyesen alkalmazza Bourgain, Lindenstrauss, Milman és Matuszewska-Paźmier mély eredményét, amely adott ε esetén aszimptotikus korlátot ad a legkisebb n egészre, amire létezik n összeadandójú zonotóp, hogy $\mathbf{B}^d \subseteq Z \subseteq (1 + \varepsilon)\mathbf{B}^d$.

A kilencedik fejezet témája egy 1958-as Rogers-Shephard tétel vizsgálata Minkowski terekben. Egy K nem feltétlenül konvex halmaz által indukált relatív normájú M Minkowski térben a $c_{tr}^\tau(K)$ mennyiséget vizsgálja, ami a K test és az azt metsző eltoltja konvex burka τ -térfogatának maximuma, ahol τ a Busemann térfogat, a Holmes-Thompson térfogat, a Gromov tömeg vagy a Gromov tömeg*. Az eredeti Rogers-Shephard tételben τ az euklidesz térfogat és ebben az esetben adtak éles korlátokat a c_{tr} -re. A 9.2. Tételben síkbeli konvex halmazokra éles alsó és felső korlátokat ad c_{tr}^τ -ra mind a négy térfogat esetén és az egyenlőség esetét is pontosan tisztázza. A 9.3. Tétel c_{tr}^τ -ra igazolja éles korlátokat centrálszimmetrikus testekre.

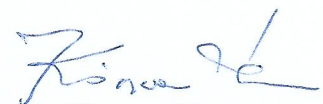
Minden fejezet végén a szerző számos problémát, sejtést, további kutatási irányt fogalmaz meg. Ezzel kapcsolatban kérdezem, hogy a disszertáció benyújtása óta történt-e előrelépés ezek bármelyikében?

Összefoglalva, elmondható, hogy az értekezés anyaga lényeges, új eredményekkel gyarapította a témakört. Egy részük mások által megfogalmazott, sokak által vizsgált sejtésekre adnak rész- vagy teljes választ, más részük érdekes, saját problémafelvetés.

A jelölt jól ismeri a modern konvex és diszkrét geometriai módszereket, mind az analitikus mind a kombinatorikus technikákat magabiztosan használja, több esetben élesíti, továbbfejleszti az ismert eljárásokat.

A disszertáció anyaga bőségesen elegendő az MTA doktorával szemben támasztható követelményeknek. Javasolom az értekezés nyilvános vitára bocsátását és Lángi Zsolt számára az MTA doktora cím odaítélését.

Szeged, 2025. november 26.


Kincses János