

Válasz Pálvölgyi Dömötör bírálatára

Köszönöm a bírálónak a rengeteg munkát, amit a dolgozat alapos elolvasásába belefektetett, valamint a támogató véleményyt. A bíráló által feltett kérdésekre, ill. apróbb megjegyzésekre az alábbiakban válaszolok:

Kérdések:

- **1. kérdés:** A 3.2-es megjegyzésnek van-e megfelelője, ha az átmérő helyett más paramétert veszünk, például ha bármely három pontra azt nézzük, hogy legfeljebb mekkora sugarú körrel fedhetők? Tehát $b_k(S)$ legyen az a legkisebb szám, hogy az S halmaz k -szorosán fedhető $b_k(S)$ darab halmazzal, amik mindegyike olyan, hogy bármely három pontjának a körülírt köre kisebb, mint az S valamely három pontjának körülírt köre. Ekkor $b_1(S) = 3$ ekvivalens azzal, hogy $b_k(S) = 3k$?

Válasz: Minden bizonnyal a 3.2-es megjegyzésnek attól függően van megfelelője, hogy milyen jellegű geometriai paramétereket veszünk, és érdekes felvetésnek tartom általában a Borsuk-problémával kapcsolatban, ha a halmaz átmérője helyett más mennyiségeket vizsgálunk. Speciálisan a bíráló által említett mennyiséggel kapcsolatban felvetett kérdést némileg pontosítani próbáltam a Borsuk-probléma alapján az alábbi módon: Legyen S egy tetszőleges korlátos halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben. Legyen $d_2(S) = \sup\{\text{cr}\{a, b, c\} : a, b, c \in S\}$, ahol egy komplanáris, kompakt X halmazra $\text{cr}(X)$ jelöli az X halmaz *köréírt sugarát*, azaz a legkisebb X -et tartalmazó kör sugarát. Rögzített $k \geq 1$ egészre jelölje $b_k(S)$ a legkisebb m pozitív egészt, hogy S k -szorosán fedhető az $S_1, S_2, \dots, S_m$ halmazokkal úgy, hogy minden i -re $d_2(S_i) < d_2(S)$.

Kérdés: igaz-e, hogy $b_1(S) = 3$ pontosan akkor teljesül, ha $b_k(S) = 3k$ teljesül minden $k \geq 1$ egészre?

A válasz nemleges. Ha pl. S egy egységsugarú körvonal, akkor $b_k(S) = a_k(S) = 2k + 1$ minden $k \geq 1$ egészre. Ehhez két észrevételt elég tenni: ha $S_1, S_2, \dots, S_m$ olyan kompakt halmazok, melyek k -szor fedik az S körvonalat és $\text{cr}(S_i) < 2$ minden i -re, akkor S_i nem tartalmaz átellenes pontpárt. Ez az S_i halmazok minden, a feltételeket kielégítő választása esetén teljesül, tehát $b_k(S) \geq a_k(S) = 2k + 1$. Másrészt, ha a P egy S -be írt szabályos $2k + 1$ -szög, és az S_i halmazok a P leghosszabb átlóihoz tartozó ívek, akkor $\text{cr}(S_i) < 2$, tehát $b_k(S) \geq 2k + 1 = a_k(S)$.

- **2. kérdés:** Honnan jött az ellenpélda ötlete a Goodman-Goodman sejtésre?

Válasz: Megvizsgáltuk a sejtést a legegyszerűbb esetre, azaz egy síkbeli halmaz három eltoltjára.

- **3. kérdés:** Igaz a 4.3-as tételnek olyan verziója is, hogy $\mathcal{G}$ bármelyik elemének a középpontja lehet a fedő $d \sum \tau_i$ -szeres homotetikus középpontja?

Válasz: Nem igaz. Legyen pl. K egy tetszőleges origóra szimmetrikus d -dimenziós konvex test, és legyen N egy tetszőleges pozitív egész. Ha $\mathcal{G} = \{x_i + K : i = 1, 2, \dots, N\}$ K N darab eltoltját tartalmazza, melyek x_i középpontjai kollineárisak, és a szomszédos $x_{i-1} + K$, $x_i + K$ elemek páronként érintik egymást, akkor az $x_1 + K$ eltoltat választva a legkisebb x_1 középpontú homotetikus, mely tartalmazza $\mathcal{G}$ minden elemét, $x_1 + (2N - 1)K$. Ha itt N -t úgy választjuk, hogy $2N - 1 > d$, akkor egy ellenpéldát kapunk.

- **4. kérdés:** A 6.2-es állításban használt ellenpéldához hasonló konstrukció nem működhet már hat dimenzióban is?

Válasz: Annak idején próbáltuk optimalizálni a konstrukciót a dimenzióra. Nekünk a legkisebb d dimenzió, amiben működött, $d = 7$, de előfordulhat, hogy megváltoztatva a konstrukciót lehet alacsonyabb dimenziós ellenpéldát is találni.

Apró/nyelvi megjegyzések:

- **Megjegyzés:** „four of which are written by co-authors” - Ez úgy hangzik mintha (csak) a társszerzők írták volna a cikkeket.

Válasz: Szerencsésebb lett volna a „with co-authors” kifejezés használata.

- **Megjegyzés:** „conjecture of Goodman and Goodman [91] in 1945” - made in 1945 vagy from 1945 lenne helyes.

Válasz: Igaza van a bírálónak.

- **Megjegyzés:** A 10. oldalon definiálva van az $A + B$ Minkowski sum, de utána kicsit összekeverednek a fogalmak. Ha jól értem, ezt hívjuk Minkowski additionnek is, a később definiált $A \div B$ pedig subtraction és difference is lehet. De sehol nem láttam definiálva az $A - B$ jelölést, ami gondolom $A + (-B)$, ahol $-B$ a B origóra vett tükrözése.

Válasz: A konvex geometriai szakirodalomban a standard jelölése az $A + (-1)B$ halmaznak az $A - B$. Ez a dolgozatban közvetve van definiálva: a (2.2) formula adja $A + B$ definícióját, míg az utána következő formula λA definícióját tetszőleges

$\lambda \in \mathbb{R}$ esetén. Ezzel együtt érdemes lett volna megjegyezni, hogy a $-A$ szimbólum a $(-1)A$ halmazt jelöli.

- **Megjegyzés:** 18. oldalon J és $\bar{J}$ nagyon nehezen megkülönböztethető, a 19. oldalon meg a $\bar{Q}$ tetején látszik a vonal nehezen (vagy nekem kell új szemüveg).

Válasz: A dolgozat megírása során problémát jelentett a helyes és egységes jelölésrendszer megválasztása a sok különböző téma miatt, így minden bizonnyal többször előfordult, hogy nem a legegyszerűsebb jelölést alkalmaztam.

- **Megjegyzés:** Mi a 3.2-es Remark forrása? Nagyon frappáns! Igazolható hasonló ekvivalencia $a(S) = 3$ esetén is? Később gyakorlatilag ez a Problem 3.4 a fejezet végéről, érdemes lenne már korábban megemlíteni!

Válasz: a 3.2-es Remark forrása az a megfigyelés, hogy egy átmérő két végpontját k -szoros fedésnél pontonként legalább k halmazzal kell fednünk, és ezek páronként diszjunktak. Ha tudjuk, hogy az S halmaz tartalmaz egy $\text{diam}(S)$ élhosszú szabályos háromszöget, akkor amellett, hogy $a(S) = 3$, az is következik, hogy tetszőleges k -ra $a_k(S) = 3k$. De S Borsuk-száma úgy is lehet 3, hogy nem tartalmaz egy $\text{diam}(S)$ élhosszú szabályos háromszöget, tehát $a(S) = 3$ esetén nem feltétlenül igaz, hogy $a_k(S) = 3k$. Annyit tudunk csak a 3.1-es Remark alapján, hogy $a(S) = 3$ esetén $a_k(S) \leq 3k$. A bírálónak igaza van, hogy Problem 3.4 kapcsolódik ehhez a megjegyzéshez, de ha a válasz a felvetett problémára igenlő, akkor a megoldása lényegesen mélyebb eszközöket igényel, mint a 3.2-es Remark bizonyítása.

- **Megjegyzés:** A k -fold chromatic numbert jó lenne definiálni.

Válasz: A bírálónak teljesen igaza van. Teljesebbé tette volna a dolgozatot.

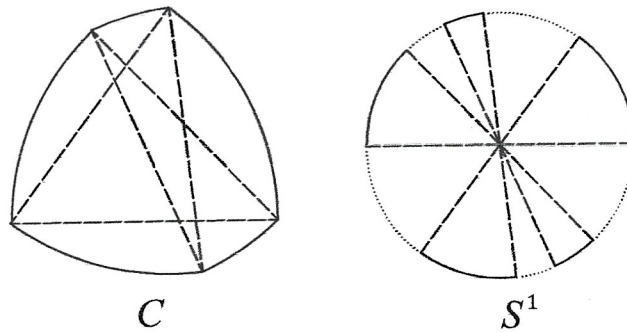
- **Megjegyzés:** „By Remark 3.2, we have that $a_k(C) \geq 2k+1$.” - Itt persze azt is használni kell, hogy $a(C) > 2$, ami nem tudom, hogy volt-e már említve.

Válasz: Theorem 3.1 alapján tudjuk, hogy mivel egyértelműen létezik C -nek kiterjesztése egy ugyanilyen átmérőjű, állandó szélességű síkidomra, ezért $a(C) = 3$ (sőt, $a(S) = 3$ a tétel feltételei szerint).

- **Megjegyzés:** „ S^1 is not covered by the union of finitely many Gaussian images and their antipodal arcs” - Ez nem volt bizonyítva, hogy mindig teljesül, ha nem Reuleaux-sokszög az alakzat, de persze nagyjából ez a definíció.

Válasz: Tudjuk, hogy egy állandó szélességű C síkidom tetszőleges p határpontjánál, ha p sima pont, akkor egyértelműen

létezik vele átellenes pont, míg ha nem az, akkor a vele átellenes pontok egy körívet alkotnak, melynek sugara $\text{diam}(C)$, és melynek belső pontjai mind sima pontok. Ezen ívek a végpontjaiktól eltekintve diszjunktak. Az a tulajdonság, hogy S^1 -et fedi véges sok pont Gauss-képe és a velük antipodális ívek azzal ekvivalens, hogy C határát lefedhetjük véges sok ponttal átellenes ívekkel. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy C egy Reuleaux-sokszög. Az 1. ábrán próbáltam szemléltetni a megfeleltetést.



1. ábra. Illusztráció a C Reuleaux-sokszög határában található körívek és a határpontok Gauss-képei közötti megfeleltetéshez.

- **Megjegyzés:** A 22. oldali bizonyítás tele van elírással. Az f definíciójában a második Q_1 indexe 2 kéne, hogy legyen. Később a bizonyításban A_i van írva Q_i helyett, a $d - 1$ helyett pedig $n - 1$.

VálaszA bírálónak teljesen igaza van, valahogy több helyen sajnos az eredeti cikk jelölése benne maradt, illetve a második Q_1 indexe sajnos a publikált cikkben is rosszul jelent meg.

- **Megjegyzés:** A 3.1-es problémát érdemes lehet megkérdezni Damásdi Gábortól.

Válasz: Beszéltem Damásdi Gáborral, aki elmondta a probléma megoldásának alapötletét. A problémát ugyancsak megoldotta 2016-ban Andrei Kupavskii egy lényegesen különböző módon, de az eredmény nem lett publikálva. Sajnos Andrey eredménye nem lett említve a dolgozatban.

- **Megjegyzés:** „Remark 3.1 readily implies that $a_k(S) \leq 4k$ ” - Érdemes lenne megemlíteni, hogy itt használjuk, hogy $a(S) \leq 4$.

Válasz: Ebben a részben 3-dimenziós véges pontthalmazok k -szoros Borsuk-számaait vizsgáljuk, így tudtuk, hogy bármely ilyen halmaz Borsuk-száma legfeljebb 4. Mindamellet követet-
hetőbbé tette volna az olvasó számára a gondolatmenetet, ha ez le van írva a szövegben.

- **Megjegyzés:** „Then clearly $Q \subset -dQ$.” - Sajnos nekem ez nem clearly, de biztos egyszerű.

Válasz: Ez geometriából egy gyakran használt tény: Jelölje S valamelyik Q -ba írt legnagyobb térfogatú szimplexet. Ha S középpontja o , akkor $S \subseteq Q \subseteq -dS$, ugyanis mivel egy F hiperlapú és m magasságú d -dimenziós szimplex térfogata $\frac{1}{d} \cdot \text{vol}_{d-1}(F) \cdot m$, ahol $\text{vol}_{d-1}(\cdot)$ $(d-1)$ -dimenziós térfogatot jelent, ha Q -nak lenne pontja $-dS$ -en kívül, akkor tartalmazna nagyobb térfogatú szimplexet. De ebből $Q \subseteq -dS \subseteq -dQ$ következik.

- **Megjegyzés:** A Lemma 6.1. viszont nem más, mint egy ismétléses kombináció, ami alap tananyag.

Válasz: Lemma 6.1 azt állítja, hogy ha $N_d(t)$ jelöli azon nem-negatív egész koordinátájú $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ pontok számát, melyekre teljesül a $\sum_{i=1}^d x_i = t$ egyenlőség, akkor $N_d(t) = \binom{t+d-1}{d-1}$, erre adtunk egy d -re vonatkozó indukción alapuló bizonyítást. A bírálónak igaza van, hogy ezen formula közvetlenül következik abból az észrevételből, hogy a probléma ekvivalens azzal, hogy az egyes koordinátákból választunk ismétléses kombinációval t darabot. Ezt sajnos nem vettem észre sem én, sem annak idején a társszerzőim, Matthieu Fradelizi és Artëm Zvavitch.

Budapest, 2026.02.03.

Tisztelettel,



Lángi Zsolt