

Válasz Kincses János bírálataira

Köszönöm a bírálónak a sok munkát, amit a dolgozat alapos elolvasásába belefektetett, valamint a támogató véleményét. A bíráló által feltett kérdésre az alábbiakban válaszolok:

Kérdés: Minden fejezet végén a szerző számos problémát, sejtést, további kutatási irányt fogalmaz meg. Ezzel kapcsolatban kérdezem, hogy a disszertáció benyújtása óta történt-e előrelépés ezek bármelyikében.

Válasz: Három téma kapcsán történt a disszertáció beadása óta olyan előrelépés, ami szorosan kapcsolódik a disszertációban megfogalmazott problémákhoz és kutatási irányokhoz.

3. fejezet: *Multiple Borsuk numbers of sets.*

A fejezet egyik témája azon 3-dimenziós véges pontthalmazok karakterizációja, melyek Borsuk-száma 4. Tavaly decemberben jelent meg Lopez-Campos, Oliveros és Alfonsín egy ide vonatkozó cikke:

G. Lopez-Campos, D. Oliveros and J.L.R. Alfonsín, *Borsuk and Vázsonyi problems through Reuleaux polyhedra*, European J. Combin. **130** (2025), 104215

A cikk fő eredménye az alábbi:

Tétel. (Lopez-Campos, Oliveros és Alfonsín, 2025) *Legyen $V \subset \mathbb{R}^3$ egy n elemű és egységnyi átmérőjű halmaz. Ekkor az alábbiak ekvivalensek.*

- (1) *V -nek van egy V' részhalmaza, mely extrémális a Vázsonyi problémára nézve, azaz ha V' elemszáma k , akkor a halmaz $2k - 2$ átmérőt tartalmaz.*
- (2) *V Borsuk-száma 4.*
- (3) *V -nek van egy V' részhalmaza, hogy a V' -beli pontok körüli egységgömbök metszete egy Reuleaux politóp.*

4. fejezet: *Non-separable families of positive homothets.*

A disszertációban megfogalmazott egyik kérdés az alábbi:

Probléma. (Bezdek és Lángi, 2016) *Határozzuk meg a $\sup_{\mathcal{G}} \lambda(\mathcal{G})$ mennyiséget minden $d \geq 2$ esetén, ahol $\mathcal{G}$ végigfut a tetszőleges K konvex testek pozitív homotetikus képei alkotta nemszeparálható véges családokon $\mathbb{R}^d$ -ben. Speciálisan, van olyan abszolút konstans $c > 0$, melyre $\sup_{\mathcal{G}} \lambda(\mathcal{G}) \leq c$ minden $d \geq 2$ esetén?*

A fenti kérdésre a jelenlegi legjobb becslés Akopyan, Balitskiy és Grigorev egy 2018-as eredménye.

Tétel. (Akopyan, Balitskiy és Grigorev, 2018.) *Bármely $d \geq 2$ esetén $\sup_{\mathcal{G}} \lambda(\mathcal{G}) \leq \frac{d+1}{2}$.*

Nemrég készült el Bezdek Károllyal közösen egy témával kapcsolatos kéziratunk:

K. Bezdek and Z. Lángi, *Notes on non-separable arrangements of convex bodies*, arXiv:2512.23651, (math.MG), December 29, 2025.

Ebben az előző eredményt igazoljuk ún. *gyengén nemszeparálható* elrendezésekre. Ezen elrendezésekre a fenti korlát éles.

5. fejezet: *Monostable polyhedra*.

Conway és Guy monostabil poliéderekre vonatkozó 1969-ben feltett három problémájából az alábbi maradt nyitott a fejezetben ismertett eredmények után.

Probléma. (Conway, Guy, 1969) *Határozzuk meg azon konvex testek családját $\mathbb{R}^3$ -ban, melyeket tetszőleges pontossággal lehet közelíteni Hausdorff távolságra nézve monostabil konvex poliéderekkel.*

Erre vonatkozólag fogalmaztam meg egy sejtést a disszertációban, illetve a fejezetben ismertett 2022-es cikkben. A sejtés ismertetéséhez az alábbi fogalomra lesz szükség.

Definíció. Legyen $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Tetszőleges $\Gamma \subset \mathbb{S}^2$ Jordan görbe (azaz egyszerű, folytonos, zárt görbe) esetén jelölje Γ^+ és Γ^- a gömbfelület két kompakt, összefüggő tartományát, melyet Γ határol. Defináljuk az

$$\begin{aligned} F(g) &= \sup_{\Gamma} \sup_{p_1 \in \Gamma^+, p_2 \in \Gamma^-} \frac{\min\{g(s) : s \in \Gamma\}}{\max\{g(p_1), g(p_2)\}} \\ &= \sup_{\Gamma} \frac{\min\{g(s) : s \in \Gamma\}}{\max\{\min\{g(p) : p \in \Gamma^+\}, \min\{g(p) : p \in \Gamma^-\}\}}, \end{aligned}$$

és az

$$\begin{aligned} T(g) &= \sup_{\Gamma} \sup_{p_1 \in \Gamma^+, p_2 \in \Gamma^-} \frac{\min\{g(p_1), g(p_2)\}}{\max\{g(s) : s \in \Gamma\}} \\ &= \inf_{\Gamma} \frac{\min\{\max\{g(p) : p \in \Gamma^+\}, \max\{g(p) : p \in \Gamma^-\}\}}{\max\{g(s) : s \in \Gamma\}}. \end{aligned}$$

mennyiségeket. Ha $g = \rho_K$ a K konvex test távolságfüggvénye, ahol $o \in \text{int } K$, akkor legyen $T(\rho_K) = T(K)$ és $F(g) = F(\rho_K)$, ahol ezen mennyiségeket rendre K laposságának és vékonyságának hívjuk.

Sejtés. (Lángi, 2022) *Egy $K \subset \mathbb{R}^3$ konvex test pontosan akkor közelíthető tetszőleges pontossággal monostabil konvex poliéderrel ha $F(K) = 1$, mono-instabil konvex poliéderrel, ha $T(K) = 1$, és mononostatikus konvex poliéderrel, ha $F(K) = T(K) = 1$.*

A sejtésre vonatkozólag leírás alatt van az alábbi, Tóth D. Csabával közös eredmény.

Tétel. (Lángi és C.D.Tóth, 2026) Tetszőleges $K \subset \mathbb{R}^3$ konvex testre az alábbiak ekvivalensek:

- (a) Bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan P monostabil konvex poliéder, melynek Hausdorff távolsága K -tól kisebb, mint ε .
- (b) $F(K) = F(\rho_K) = 1$ teljesül.
- (c) A ρ_K függvény minden nemüres alsó szinthalmaza (azaz az $\{x \in \mathbb{S}^2 : \rho_K(x) \leq \alpha\} \neq \emptyset$ halmaz) összefüggő.
- (d) A ρ_K függvénynek egyértelműen létezik szigorú lokális minimumhalmaza (azaz egyértelműen létezik olyan $U \subseteq \mathbb{S}^2$ halmaz, ahol valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $f(x) = \alpha$ teljesül minden $x \in U$ esetén, és $f(x) > \alpha$ teljesül U egy környezetében minden $x \notin U$ esetén).
- (e) $F(h_K) = 1$ teljesül, ahol h_K jelöli K támaszfüggvényét.
- (f) A h_K függvény minden nemüres alsó szinthalmaza összefüggő.
- (g) A h_K függvénynek egyértelműen létezik szigorú lokális minimumhalmaza.

Ezen tétel bizonyítása analóg módon igazol egy hasonló állítást konvex testek közelíthetőségére mono-instabil poliéderekkel, de nem alkalmazható konvex testek közelítésére mono-monostatikus poliéderekkel.

Budapest, 2026.02.03.

Tisztelettel,


Lángi Zsolt