

Opponensi vélemény

Lángi Zsolt

Inequalities in Discrete and Convex Geometry

(Egyenlőtlenségek a diszkrét és konvex geometriában)

c. MTA doktori értekezéséről

Lángi Zsolt disszertációjában a diszkrét és konvex geometria területére eső optimalizálási problémákkal foglalkozik. A disszertáció alapját a szerző 3 önálló és 4 társszerzős publikációja alkotja, melyek rangos, nemzetközi, egy kivételével Q1-es besorolású folyóiratokban jelentek meg. Az angol nyelven írt 128 oldalas disszertáció 9 fejezetből, egy tartalomjegyzékből, a használt jelölések listájából és egy hivatkozásjegyzékből áll.

A disszertáció 1. fejezete a disszertáció téziseit foglalja össze röviden, kiemelve a disszertáció legfontosabb eredményeit.

A 2. fejezet első fele bemutatja a disszertációban vizsgált problémák történeti előzményeit, és ismerteti a szerző hozzájárulásait ezekhez a problémákhoz. A fejezet második fele összegyűjti a disszertációban felhasznált előismereteket és a használt fogalmak definícióit. A disszertáció további fejezetei mind a szerző egy-egy kiemelt cikkének eredményeit ismertetik.

A 3. fejezet Borsuk klasszikus problémájához kapcsolódik, mely azt kérdezi, hogy lefedhető-e a d -dimenziós euklideszi tér bármely Δ átmérőjű halmaza legfeljebb $d+1$ Δ -nál kisebb átmérőjű halmazzal. Ez a probléma számos matematikus érdeklődését felkeltette. Borsuk maga bebizonyította, hogy a kérdésre igenlő a válasz a síkon és tetszőleges dimenzióban a tér gömbjeire, melyekre a $d+1$ darabszám nem csökkenthető. A 3-dimenziós térben szintén igen a válasz, erre először Perkal adott bizonyítást. Magasabb dimenziókra a kérdés sokáig nyitva maradt, csak speciális esetekre sikerült igazolni a pozitív választ. Nagy áttörést jelentett, amikor Kahn és Kalai 1993-ban megmutatta, hogy az általános esetben Borsuk kérdésére magas dimenziókban tagadó a válasz. Kahn és Kalai eredménye ahelyett, hogy lezárta volna a Borsuk-féle problémakört felpetzsdítette a felé irányuló kutatásokat.

A 3. fejezet elején a szerző bevezeti egy normált tér X korlátos halmazának k -rétű, vagy k -szoros Borsuk-számát. Ez az a legkisebb $a_k(X)$ szám, melyre az X halmaz k -rétegűen lefedhető $a_k(X)$ darab X -nél kisebb átmérőjű halmazzal. A 3. fejezet első része lényegében pontos leírást ad arra, hogy egy adott korlátos síkbeli halmazra hogyan kaphatjuk meg annak k -rétegű Borsuk-számát. Tudjuk, hogy az $a_1(X)$ Borsuk-szám értéke 2, vagy 3 lehet és Boltyanszkij egy tétele szerint $a_1(X) = 3$ pontosan akkor teljesül, ha X egyértelműen foglalható bele egy állandó Δ szélességű, kompakt, konvex $\hat{X}$ halmazba, ahol Δ az X átmérője. A 3.1 rész fő eredménye szerint $a_1(X) = 2$ esetén $a_k(X) = 2k$, ha $a_1(X) = 3$, akkor egyrészt $a_k(X) = a_k(\hat{X})$, másrészt $a_k(\hat{X}) = 2k + \lceil k/s \rceil$ ha $\hat{X}$ egy Reuleaux $(2s+1)$ -szög, és $a_k(\hat{X}) = 2k+1$ egyébként.

A 3.2. alfejezet a k -rétű Borsuk-számot olyan d -dimenziós X testek esetén vizsgálja, melyek vagy homeomorfak a d -dimenziós B^d gömbbel és C^1 -sima a határuk, vagy centrálisan szimmetrikusak. Ezekre bebizonyítja, hogy $a_k(X) \leq a_k(B^d) = 2k + d - 1$. Egy további tétel szerint, ha X egy d -dimenziós állandó szélességű konvex test, akkor a k -rétű Borsuk-számok nem lehetnek kisebbek a B^d gömb k -rétű Borsuk-számainál. Ebből következik, hogy egy sima határú, állandó szélességű, d -dimenziós konvex test esetén $a_k(X) = 2k + d - 1$.

A 3. fejezet harmadik részében a szerző azokat a véges S halmazokat írja le, melyekre az $a_k(S) \leq 4k$ becslés minden k -ra éles. Bevezetve az $a_{frac}(S)$ tört Borsuk-számot, mint az $a_k(S)/k$ hányadosok infimumát, ez a feladat ekvivalens azon véges halmazok leírásával, melyek tört Borsuk-száma 4. A szerző belátja, hogy ha egy véges $S \subset \mathbb{R}^3$ halmazra $a_{frac}(S) = 4$, akkor

S átmérőgráfja tartalmaz egy háromszöget, és ha azt is feltesszük, hogy S legfeljebb 7 pontból áll, akkor egy teljes K_4 gráfot is. A fejezet befejező része ezt azzal egészíti ki, hogy ha egy véges $S \subset \mathbb{R}^3$ halmaz invariáns egy szabályos tetraéder szimmetriacsoportjára, és átmérőgráfja tartalmaz egy háromszöget, akkor az átmérőgráf tartalmaz egy teljes K_4 gráfot is. A K_4 gráf jelenléte pedig garantálja, hogy $a_{frac}(S) = 4$.

A 4. fejezet A. W. Goodman és R.E. Goodman sejtéséhez kapcsolódó eredményekről szól. A sejtés azt mondja ki, hogy ha egy K konvex test $\tau_1, \dots, \tau_k$ arányú pozitív homotetikus példányai egy nem szeparálható rendszert alkotnak, akkor uniójuk lefedhető a K egy $(\tau_1 + \dots + \tau_k)$ arányú homotetikus példányával. A sejtés motivációja az volt, hogy Goodman és Goodman tétele szerint a sejtés igaz ellipsziszre a síkban, illetve tetszőleges dimenzióban $k = 2$ esetén. Az első meglepő eredmény az, hogy a sejtés már szimplexekre sem igaz $k \geq 3$ esetén, ha a dimenzió legalább 2. Az ellenpélda felveti azt a kérdést, hogy az eredeti sejtésben a $(\tau_1 + \dots + \tau_k)$ arányt milyen $\lambda > 1$ számmal kell szorozni, hogy a sejtés igazgá váljon. A λ legkisebb értéke egy d -dimenziós szimplex esetén λ_s^d . A sejtés szempontjából a szimplexek a legrosszabbak, ugyanis a λ_s^d szám minden d -dimenziós konvex test esetén elég nagy szorzó. Az ellenpélda elemzésével kijön, hogy λ_s^d a d gyengén monoton növekvő függvénye és $\frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \leq \lambda_s^2 \leq \lambda_s^d \leq d$. A 4.4. rész fő eredménye szerint középpontosan szimmetrikus konvex testekre a Goodman–Goodman-sejtés igaz. A 4.5. rész a sejtés egy másik speciális esetét igazolja k -áthatolthatatlan halmazrendszerekre, ahol $0 \leq k \leq d - 2$. A k -áthatolthatatlanság fogalmát Fejes Tóth Gábor és W. Kuperberg vezette be. Egy halmazrendszert akkor nevezünk k -áthatolthatatlannak, ha minden olyan k -dimenziós altér, mely metszi a halmazok konvex burkát, metszi legalább az egyik halmazt is. Valójában ebben a speciális esetben a sejtés egy erősebb változata is igaz: ha egy konvex test $\tau_1, \dots, \tau_k$ arányú pozitív homotetikus példányai egy k áthatolthatatlan rendszert alkotnak, akkor uniójuk konvex burka szabadon körbecsúsztatható K egy $(\tau_1 + \dots + \tau_k)$ arányú homotetikus példányában. Sőt, ha szigorúan konvex a kiindulási test, akkor a homotetikus példányok közül már a legnagyobb is tartalmazza a többi homotetikus példányt.

Az 5. fejezet Conway és Guy három 1968-ból származó, a monostabil poliéderekkel kapcsolatos kérdését vizsgálja. Egy poliédert akkor nevezünk *monostabilnak*, ha pontosan egy olyan lapja van, amelyiken egy homogén tömegeloszlású modellje stabilan megáll egy vízszintes síkon. Conway belátta, hogy egy forgásszimmetrikus testnek több stabil egyensúlyi helyzete is van, viszont tudott konstruálni tengelyesen szimmetrikus monostabil poliédert. Ez felvetette azt a kérdést, hogy létezik-e olyan monostabil poliéder, melynek egy tengely körül legalább harmadrendű forgásszimmetriája van. A fejezet első fő tétele pozitív választ ad erre a kérdésre. A tétel szerint bármely $n \geq 3$ -ra a gömbtől tetszőlegesen kicsi Hausdorff-távolságra található egy n -edrendű forgásszimmetriával rendelkező monostabil poliéder. Ez a tétel két másik klasszikus kérdésre is választ ad. Az egyik azt kérdezi, hogy a monostabil politópok halmazának mi lesz a lezárása a Hausdorff-metrika szerint. A tétel következménye szerint a gömb maga a lezáráshoz tartozik. A másik kérdés, hogy mennyi az infimuma a monostabil politópok átmérő/derékbőség hányadosának. A tétel szerint az infimum pontos értéke $1/\pi$. A fejezet fő tétele egy erősebb approximációs tétel következményeként adódik. Nevezetesen, ha G egy véges izometriacsoport, K egy G -invariáns konvex test, melynek kritikus pontjai nemelfajuló, és közöttük S stabil és U instabil van, akkor K tetszőleges Hausdorff-távolság szerinti környezetében van egy G -invariáns politóp, melynek K -val azonos az egyensúlyi helyzeteinek szerkezete.

A 6. fejezet Bobkov, Vadimán és Wang egy 2011-ben megfogalmazott sejtését vizsgálja, mely szerint, ha A egy kompakt halmaz $\mathbb{R}^d$ -ben, akkor az $\frac{1}{k} \underbrace{(A + \dots + A)}_k = \frac{1}{k} A[k]$ Minkowski-átlagok térfogata monoton növekvő sorozatot alkot. A sejtést valószínűleg az motiválta, hogy a

térfogatok sorozatának nagyon sok monoton részsorozata van, mert ha k_1 osztója k_2 -nek akkor triviálisan $\frac{1}{k_1}A[k_1] \subseteq \frac{1}{k_2}A[k_2]$. Bár Fradelizi, Madiman, Marsiglietti és Zvavitch belátták, hogy a sejtés igaz az egyenesen, azt is megmutatták, hogy $d \geq 12$ esetén a sejtésre létezik ellenpélda. Az ellenpélda miatt a sejtést csak erősebb feltételek mellett lehet bebizonyítani. A disszertáció 6.1. tétele azt állítja, hogy ha az A halmaz csillagszerű, akkor a Minkowski-átlagok térfogataiból álló sorozat monoton növekvő lesz a $k_0 = \max\{2, (d-1)(d-2)\}$ indextől kezdődően. A 6.2. tétel a síkbeli sejtést bizonyítja speciális típusú, de nem feltétlenül csillagszerű összefüggő halmazokra.

A 7. fejezetben a szerző egy izoperimetrikus jellegű egyenlőtlenséget bizonyít 3-dimenziós paralleloéderekre. Ez azt mondja ki, hogy az egységnyi térfogatú 3-dimenziós paralleloéderek között a szabályos csonkolt oktaédernek a legkisebb az átlagszélessége.

A 8. fejezet zonotópokra bizonyít több izoperimetrikus típusú egyenlőtlenséget, melyek a zonotópok belső térfogatai, a körülírt és beírt gömjeinek sugarai, valamint a teljes négyzetes k -térfogatai közötti viszonyokat elemzi. Az eredményeket két fő csoportra oszthatjuk. Az első csoportba a kevés szakasz Minkowski-összegeként előálló zonotópokra, vagyis parallelotópokra és rombdodekaéderekre vonatkozó egyenlőtlenségek tartoznak. Ezeknél tipikusan a kocka, illetve a szabályos rombdodekaéder az extrémális alakzat, de a 8.5. tétel szerint az adott átlagszélességű rombdodekaéderek között nem mindig a szabályosnak a legkisebb a körülírt gömbjének a sugara. A második csoportban olyan egyenlőtlenségek szerepelnek, amelyek nagy n számú szakasz Minkowski-összegeként előálló zonotópokra vonatkoznak. A konvex testekre vonatkozó izoperimetrikus problémáknál általában a gömbök az extrémális alakzatok, és n növelésével a gömb tetszőleges pontossággal megközelíthető egy zonotóppal, így az ebbe a csoportba tartozó egyenlőtlenségek lényegében azt írják le, hogy egy adott izoperimetrikus egyenlőtlenség szempontjából egy n szakasz által generált zonotóp mennyire tudja megközelíteni a gömböt.

Rogers és Shephard 1958-ban bevezették minden K konvex testre azt a $c_{tr}(K)$ mennyiséget, mely megadja, hogy K két egymást metsző eltoltja konvex burkának a térfogata legfeljebb hányszorosa lehet K térfogatának. Belátták, hogy $c_{tr}(K)$ minimális értékét a gömbre, maximális értékét a pseudo-dupla-gúlákra veszi fel.

A c_{tr} függvényt úgy is megadhatjuk, mint K két egymást metsző eltoltja konvex burka térfogatának maximumát annál a térfogatfüggvényénél, melyet úgy normálunk, hogy K térfogata 1 legyen. Ha ebben a definícióban megváltoztatjuk a térfogat normálási szabályát, akkor az eredetihez hasonló, de attól eltérő optimalizálási feladatot kapunk. A mérték normálásának többféle természetes módja van, melyek bevezetését a Finsler-sokaságok elmélete motiválta: a Busemann-mérték, Holmes-Thompson-mérték, Gromov m - és m^* -mértéke. A 9. fejezet a síkban bizonyítja a Rogers-Shephard-féle eredmény variánsait ezen mértékekre. Két különálló tétel foglalja össze a tetszőleges, illetve az origóra szimmetrikus síkbeli konvex testek esetét.

Lángi Zsolt értekezése egy jól felépített, igényesen megírt mű, melyben a szerző lényeges új eredményeket ér el a Borsuk-sejtéssel, a Goodman–Goodman-sejtéssel, Conway és Guy monostabil poliéderekre vonatkozó kérdéseivel kapcsolatban. Több új izoperimetrikus típusú eredményt bizonyít, és különféle irányokban kiterjeszti a Rogers–Shephard egy tételét. A disszertáció és a szerző munkássága egyértelműen bizonyítja, hogy a szerző a témakörben alapos, széleskörű ismeretekkel rendelkezik, és a felvetődő problémákat újszerű ötletekkel és kreatív konstrukciókkal képes megoldani. A szerző munkássága nyomán a diszkrét geometria sok értékes eredménnyel lett gazdagabb.

Az értekezés minden szempontból megfelel a követelményeknek. Határozottan támogatom az értekezés nyilvános vitára bocsátását és Lángi Zsoltnak az MTA Doktora cím odaítélését.

Kérdések és megjegyzések:

1. A 3.3. alfejezet első mondata szerint „The fact that the (usual) Borsuk number of finite sets in 3-spaces are at most four was first shown by Heppes and Révész” in a paper that appeared in 1956. A 3-dimenziós térben Perkal (*Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur*, Colloquium Mathematicum, 2: 45(1947)) és Eggleston, (*Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*, Journal of the London Mathematical Society, 30:11?24 (1955)) már korábban bebizonyították a Borsuk-sejtést. Nem következik ezekből a véges halmazokra vonatkozó Heppes–Révész-féle eredmény?
2. Mit jelöl az 5.1. megjegyzésben $(S, U)_c^E$? A szövegben csak $(S, U)_p$ definícióját találtam meg.
3. Az 5.3. megjegyzésben nem derül ki az ε szerepe. Lehet, hogy $K \subseteq (1 + \delta)E$ helyett $K \subseteq (1 + \varepsilon)E$ -t kellett volna írni?

Budapest, 2026. január 26-án.



.....
Csikós Balázs