

Opponensi vélemény

Lángi Zsolt

Egyenlőtlenségek a diszkrét és konvex geometriában

(Inequalities in Discrete and Convex Geometry)

című MTA doktori értekezéséről

Őszintén bevallom, hogy nem túl lelkesen kezdtem el olvasni a 131 oldalas értekezést, mert nem tartozik a kedvenc témáim közé a konvex geometria; legalábbis azt hittem, de kellemesen csalódtam, mert nagyon érdekes dolgokat tanultam belőle. A dolgozat szerkezete jól átgondolt, logikus, a fejezetek mind önálló egységet alkotnak. Külön kiemelném, hogy a különböző fejezetek más-más kérdésekről szólnak, így sok problémát ismertet, tehát nem csak egy speciális kérdés részleteit boncolgatja, de összeköti a témákat a konvex alakzatok extrémális tulajdonságainak témaköre. Érezhető, hogy a szerző széleskörű szakirodalmi ismerettel rendelkezik, minden egyes fejezet saját kutatáson alapul, 13 cikket használ fel, melyek mind rangos folyóiratokban jelentek meg (Ars Math. Contemp., Bull. Lond. Math. Soc., Discrete Comput. Geom., Geom. Dedicata, Israel J. Math. x2, Matematika, Monatsh. Math. x3, Pacific J. Math., Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B, Studia Sci. Math. Hungar.) az utóbbi pár évben. Ezek közül kilenc hazai és nemzetközi társszerzőkkel közös cikk, négy pedig egyszemélyes, teljesen önálló eredmény. A stílus olvasmányos és könnyen követhető, annak ellenére, hogy helyenként sok a technikai részlet. Tudományos szempontból a disszertáció több fejezete is kiemelkedő, melyek tartalmából alább pár fontosabb dolgot ismertetek röviden.

1. fejezet. Egy rövid bevezető után itt található a dolgozat fő eredményeinek rövid összefoglalása, mely egyben azt is leírja, hogy mi hol található.

2. fejezet. Egy roppant alapos, részletes összefoglalója a dolgozatban használt fogalmaknak és legfontosabb alaperedményeknek. Aki esetleg valamelyiket elfelejtené, annak szintén van egy összefoglaló lista az összes szimbólumról/jelölésről a dolgozat elején.

3. fejezet. A Borsuk-számok azon általánosítását vizsgálja, amikor kisebb átmérőjű halmazokkal k -szorosan akarunk fedni egy adott halmazt. Borsuk klasszikus sejtése, melyet Kahn és Kalai cáfolt meg kellően magas dimenzióban, hogy egy adott átmérőjű halmazt mindig lehet $d + 1$ kisebb átmérőjű halmazzal fedni. Borsuk problémájának egy természetes általánosítása, hogy a halmaz minden pontjáról azt követeljük meg, hogy legalább k -szorosan legyen fedve. Egy adott S halmaz esetén egy ilyen lefedő halmazcsalád minimális mérete legyen $a_k(S)$. A 3.2-es megjegyzés igen elegáns összefüggésre mutat rá $a(S)$ és $a_k(S)$ között bizonyos esetekben egy nagyon frappáns bizonyítással, és erről a kapcsolatról szól a fejezet végi 3.4-es probléma is. A szerző

általános becsléseket is ad különböző alakzatokra, például állandó szélességű konvex testekre.

4. fejezet. Itt a szerző Goodman és Goodman egy közel nyolcvan éves sejtését cáfolja meg egy nagyon erős értelemben. Minden legalább 2 dimenziós térben mutat minden $n \geq 3$ -ra egy K konvex test eltolt példányaiból álló, n elemű halmazcsaládot, ami nem szeparálható hipersíkkal, de nem is fedhető K egy n -szeresen nagyított példányával. A sejtésről viszont több speciális esetben, például centrálisan szimmetrikus alakzatokra, megmutatja, hogy igaz, valamint a sejtés egy gyengébb verzióját (d -szeres korláttal) általánosan is bebizonyítja.

5. fejezet. Itt a nagy népszerűségnek örvendő Gömböc-höz kapcsolódó kérdéseket vizsgál, nevezetesen konvex testek egyensúlyi helyzeteit. A Gömböc egy nemrég felfedezett homogén konvex test, amelynek pontosan egy stabil és egy instabil egyensúlyi helyzete van. A szerző ebben a fejezetben azt mutatja meg, hogy létezik olyan konvex poliéder, ami monostabil, azaz csak egy egyensúlyi pontja van, de tetszőleges forgási szimmetriával rendelkezik, megválaszolva ezzel Conway és Guy egy ötven éves kérdését. Külön kiemelném, hogy ez egy egyszerű cikkének az eredménye.

6. fejezet. Bobkov, Madiman és Wang egy sejte szerint a k -szoros Minkowski összeg $1/k$ -szoros kicsinyítésének térfogata monoton nő k -ban. Ezt a sejtést magas dimenzióban már megcáfolták, de Lángi több speciális esetről is megmutatja, hogy igaz a sejtés.

7–8. fejezet. Ezek a fejezetek izoperimetrikus tételekről szólnak. Előbbi bizonyos 3-dimenziós poliéderek közül határozza meg a minimális szélességűt, utóbbi pedig zonotópok belső térfogatáról bizonyít különböző egyenlőtlenségeket.

9. fejezet. A záró fejezetben a szerző egy d -dimenziós konvex alakzat, és egy öt metsző eltoltjának a konvex burkának a méretére ad becsléseket, meghatározva a lehetséges extrémális értékeket, ahol a méret több különböző térfogatfogalmat is takarhat.

Összegzés. Összességében a dolgozat mögött jelentős, önálló tudományos teljesítmény áll. A bemutatott cikkek mind rangos, nemzetközi folyóiratokban jelentek meg. A témák sok területet lefednek és több nyitott kérdést megválaszolnak, ami a szerző kutatói kvalitását mutatja. **A dolgozat anyaga teljesíti az MTA doktori értekezések követelményeit, ezért javaslom nyilvános vitára bocsátását, és a pályázónak az MTA doktora cím odaítélését.**

Kérdések.

1. A 3.2-es megjegyzésnek van-e megfelelője, ha az átmérő helyett más paramétert veszünk, például ha bármely három pontra azt nézzük, hogy legfeljebb mekkora sugarú körrel fedhetők? Tehát $b_k(S)$ legyen az a legkisebb szám, hogy az S halmaz

k -szorosán fedhető $b_k(S)$ darab halmazzal, amik mindegyike olyan, hogy bármely három pontjának a körülírt köre kisebb, mint az S valamely három pontjának körülírt köre. Ekkor $b_1(S) = 3$ ekvivalens azzal, hogy $b_k(S) = 3k$?

2. Honnan jött az ellenpélda ötlete a Goodman-Goodman sejtésre?
3. Igaz a 4.3-as tételnek olyan verziója is, hogy $\mathcal{G}$ bármelyik elemének a középpontja lehet a fedő $d \sum \tau_i$ -szeres homometikus középpontja?
4. A 6.2-es állításban használt ellenpéldához hasonló konstrukció nem működhet már hat dimenzióban is?

Apró/nyelvi megjegyzések.

„four of which are written by co-authors” - Ez úgy hangzik mintha (csak) a társszerzők írták volna a cikkeket.

„conjecture of Goodman and Goodman [91] in 1945” - made in 1945 vagy from 1945 lenne helyes.

A 10. oldalon definiálva van a $A+B$ Minkowski sum, de utána kicsit összekeverednek a fogalmak. Ha jól értem, ezt hívjuk Minkowski additionnek is, a később definiált $A \div B$ pedig subtraction és difference is lehet. De sehol nem láttam definiálva a $A - B$ jelölést, ami gondolom $A + (-B)$, ahol $-B$ a B origóra vett tükrözése.

18. oldalon J és $\bar{J}$ nagyon nehezen megkülönböztethető, a 19. oldalon meg a $\bar{Q}$ tetején látszik a vonal nehezen (vagy nekem kell új szemüveg).

Mi a 3.2-es Remark forrása? Nagyon frappáns! Igazolható hasonló ekvivalencia $a(S) = 3$ esetén is? Később gyakorlatilag ez a Problem 3.4 a fejezet végéről, érdemes lenne már korábban megemlíteni!

A k -fold chromatic number jó lenne definiálni.

„By Remark 3.2, we have that $a_k(C) \geq 2k + 1$.” - Itt persze azt is használni kell, hogy $a(S) > 2$, ami nem tudom, hogy volt-e már említve.

„ S^1 is not covered by the union of finitely many Gaussian images and their antipodal arcs” - Ez nem volt bizonyítva, hogy mindig teljesül, ha nem Reuleaux-sokszög az alakzat, de persze nagyjából ez a definíció.

A 22. oldali bizonyítás tele van elírással. Az f definíciójában a második Q_1 indexe 2 kéne, hogy legyen. Később a bizonyításban A_i van írva Q_i helyett, a $d - 1$ helyett pedig $n - 1$.

A 3.1-es problémát érdemes lehet megkérdezni Damásdi Gábortól.

„Remark 3.1 readily implies that $a_k(S) \leq 4k$ ” - Érdemes lenne megemlíteni, hogy itt használjuk, hogy $a(S) \leq 4$.

„Then clearly $Q \subset -dQ$.” - Sajnos nekem ez nem clearly, de biztos egyszerű.

A Lemma 6.1. viszont nem más, mint egy ismétléses kombináció, ami alap tananyag.

Budapest, 2025.10.05.

Pálvölgyi Dömötör