

Válasz Prof. Faragó István
"Két időskálás hővezetési modellek elemzése és alkalmazása heterogén
anyagokra"
című MTA doktori dolgozat bírálatára

Szeretném megköszönni Prof. Faragó Istvánnak a részletes bírálatát és az előremutató, a munka fejlesztését szolgáló észrevételeit. Külön köszönöm a pozitív véleményét és a nyilvános védekre vonatkozó támogató nyilatkozatát. Az alábbiakban pontról pontra válaszolok minden, a bírálatban felmerül észrevételre és kérdésre azok felmerülésének sorrendjében.

1. Ebben a pontban együtt szeretnék válaszolni az 1. észrevételre és az 5. kérdésre is.

Észrevétel: **"A kontinuum-megközelítés miatt a fenomenologikus paraméterek (τ és κ) és a konkrét mikrostruktúra (pl. pórusméret) közötti matematikai kapcsolat mélyebb kifejtése hasznos lett volna."**

valamint

Kérdés: **"Tudna adni egy intuitív, mikroszerkezeti alapú magyarázatot arra, miért nagyobb mindig a dinamikus hőfokvezetési tényező a statikusnál?"**

Válasz: A bírálóval teljes mértékben egyetértek abban, hogy a kutatásnak egy elengedhetetlen aspektusa a hővezetési egyenletek paramétereinek összekapcsolása a mikrostruktúra tulajdonságaival. Emellett azonban fontos megjegyezni, hogy ezek a feltehetően létező kapcsolatok nem általánosak és az adott gyártástechnológiától is függenek. Ennek egyik kritikus akadálya a határfelületeken jelenlévő érintkezési hőellenállás okozta nagyfokú bizonytalanság. Sok esetben nem elegendő ismerni az adott test összetételét, de azok pontos(abb) geometriai, hőtani, valamint mechanikai tulajdonságai is fontosak. Ezek a bizonytalanságok nem garantálják a fenomenologikus paraméterek és a mikroszerkezet kapcsolatának egyértelmű létezését minden típusú heterogén anyag esetén. Bizonyos, speciálisabb esetekben azonban látok rá lehetőséget.

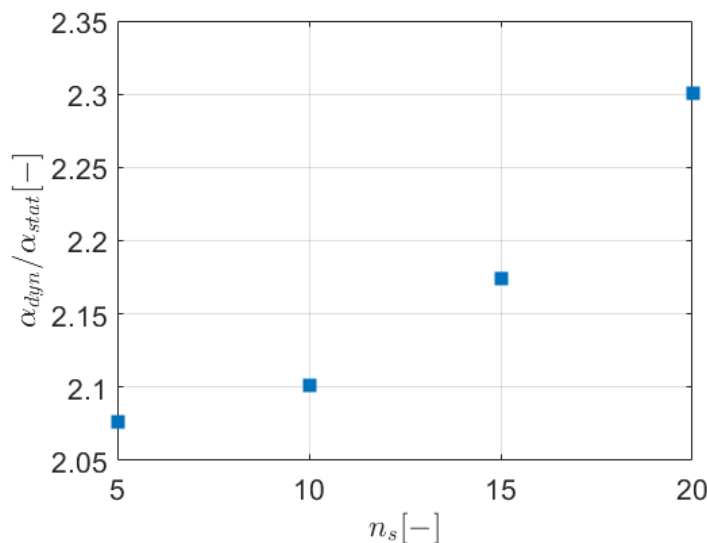
A kérdéskört Fehér Anna és Cseh Dániel végzett hallgatóimmal fémhabok kapcsán kezdtük el vizsgálni, és bizonyos részeredményeket a legfrissebb,

Fehér A., Cseh D., Kovács R.: Identifying correlations between metal foam thermal characteristics and non-Fourier behavior, International Communications in Heat and Mass Transfer, 170:110008, 2026.

közleményünkben publikáltuk. Ebben a munkában egy jelentősen egyszerűsített, 1-üregű fémhabot modelleztünk, de minden lehetséges hőközlési mechanizmussal együtt, beleértve az üreget megkerülő hővezetést is. A kutatás fontos eredménye, hogy az így megjelenő több hőközlési időskála (az üreget megkerülő és az üregen áthaladó) eredője tipikusan egy Guyer–Krumhansl-, vagy egy Jeffreys-egyenlettel modellezhető hőmérséklet-változáshoz vezet. Ebben az esetben, szimulációs úton, össze tudtuk kapcsolni a fenomenologikus paramétereket a belső struktúra tulajdonságaival. Erre mutat egy példát az alábbi ábra. Itt a dinamikus és a

statikus hőfokvezetési tényezők arányának a változását láthatjuk az üreg méretének függvényeként (amely az elfoglalt cellák számában van megadva). Eszerint minél nagyobb az üreg, annál inkább kettéválk a két időskála. Ez egy fémhab esetén jól interpretálható eredmény, és egyben jól mutatja a statikus és dinamikus hőfokvezetési tényezők intuitív jelentését is, valamint a közöttük lévő reláció fizikai okát.

Egy mérés során először a gyorsabb, aztán a lassabb jelenségek hatásának a megfigyelésére van lehetőség. Mivel az üreget gyakran rosszabb hővezető képességű anyag tölti ki, ezért egy kísérlet során először a gyorsabb (üreget megkerülő) hőközlési jelenséget látjuk, ehhez kapcsolódik a dinamikus skála. Mivel ez gyorsabb hőmérséklet-változást idéz elő, ezért a dinamikus hőfokvezetési tényező nagyobb lesz.



1. ábra. A dinamikus és a statikus hőfokvezetési tényezők aránya a szimulált fémhabban található üreg méretének függvényében.

2. Észrevétel: "A 2-hőmérsékletű modell elvetésekor a szerző elsősorban technikai nehézségekre hivatkozik, miközben bizonyos heterogén rendszerekben a fizikai indokoltsága továbbra is fennállhat."

Válasz: A bíráló észrevételével egyetértünk. A 2-hőmérsékletű modell ismert összetételű rendszerekre vonatkozóan valóban egy lehetséges alternatíva. Szeretném kiemelni, hogy itt a hangsúly az ismert összetételen van, illetve azon, hogy a vizsgált rendszer eredő, effektív tulajdonságai ismertek, így a modell szabad paramétereinek száma jelentős mértékben csökkenthető és a bizonytalanságok megszüntethetők. Egyben pont ez a tulajdonsága adja a modell korlátait is, mert heterogén anyagok esetén pont az eredő tulajdonságok azok, amelyek kevésbé ismertek, emiatt a 2-hőmérsékletű modellt nem látom a Fourier-egyenlethez hasonló, általánosan érvényes alternatívának.

3. Észrevétel: "Félig átlátszó anyagok esetén a lézeres gerjesztés térfogati hőforrásként való kezelése esetleg pontosabb paraméter-illesztést eredményezhetett volna."

Válasz: A bíráló észrevételét jogosnak találom, ez a porózus anyagok esetén gyakran felmerülő kérdés. A kísérletek során mindig igyekeztünk az elrendezést úgy kialakítani, hogy a hőimpulzus a próbatest felületén nyelődjön el. Ezt egy vékony, grafitfestékkel átitatott lappal értük el, amely hőellenállása a próbatesthez képest elhanyagolható és a grafitfesték biztosította a jó elnyelési tulajdonságokat. Ez azért is kiemelkedően fontos, mert a térfogati hőelnyelődés heterogén anyagok esetén egy kifejezetten nehéz kérdéskör, mivel az több egyéb, próbatestre vonatkozó jellemzőtől is függ. A hőelnyelődés helyfüggésének meghatározása olyan további bizonytalanságokat vezetne be, amely miatt az illesztés egyértelműsége kérdésessé válna, analóg módon a 2-hőmérsékletű modellhez.

1. Kérdés: **"Milyen matematikai feltételeknek kell teljesülniük az operátorok struktúrájában ahhoz, hogy a Fourier-feladat sajátfüggvény-rendszere tetszőleges, bonyolultabb nem-Fourier modellekre is örökölhessen?"**

Válasz: Meglátásom szerint, amíg a hőmérséklet-reprezentációból azt olvassuk ki, hogy a Fourier-egyenlet, valamint csak annak időderiváltjai jelennek meg, addig ez a fajta öröklődés érvényes marad. A Fourier-egyenlet ilyen típusú "hierarchiáját" a belső változókkal kiegészített irreverzibilis termodinamikai módszertan konzisztens alkalmazásával biztosítani lehet. Mindezek ellenére nem szabad megfeledkezni egy igen fontos aspektusról: a másodrendű, vagy akár annál magasabb rendű áramszorzó alkalmazása megengedhet olyan további peremfeltételeket is, amelyek a Fourier-egyenlet esetén nincsenek értelmezve. Az áramszorzók által bevezetett matematikai tulajdonságok, főleg a peremfeltételek kapcsán, még további kutatást igényelnek.

2. Kérdés: **"A Neumann-féle stabilitásvizsgálat során a nemlineáris együtthatókat lokálisan konstansnak tekintette. Létezhet-e olyan paramétertartomány, ahol a lokális stabilitás ellenére globális instabilitás lép fel?"**

Válasz: Köszönöm a bírálónak az érdekes felvetését. Mivel az általam javasolt stabilitásvizsgálati módosítás csupán a hőmérséklet-függés terjedési sebességre való hatását fogalmazza meg (a nevezetes CFL-szám "kiterjesztéseként"), ezért szerintem létezhet globális instabilitás, mivel az egyenletekben megjelenő további nemlineáris tagok (például a GK-egyenlet esetén a $\partial_x T \partial_x q$) okozhatnak nem várt nehézségeket. A Neumann-féle stabilitásvizsgálat nem kezeli a peremfeltételeket sem, ezért ezek szerepét sem lehet elhanyagolni, ámbar erre vonatkozó konkrét eredményeket nem ismerek.

3. Kérdés: **"Hogyan biztosítható matematikailag a GK-egyenlet extra peremfeltételeinek kompatibilitása az irreverzibilis termodinamika II. főtételéből adódó entrópiaprodukció-pozitivitással?"**

Válasz: Köszönöm a bírálónak a bevilágító, igen érdekes felvetését. Két lényeges szempontot szeretnék kiemelni és ütköztetni. Az első szempont az, hogy a konstitutív egyenleteket az entrópiaprodukció pozitivitásának feltételével származtatjuk. Azonban, és ez a második szempont, ebben a levezetésben a peremfeltételeket semmilyen módon nem vesszük figyelembe. Ezek lokális összefüggések, a peremhatások hiányoznak.

Két áthidaló lehetőséget látok. Az első az, hogy a lokálisan levezetett entrópiaprodukciót a teljes térfogatra integráljuk, és a $(\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{q}$ tagot (az áramszorzó divergenciáját) visszavezetjük

egy felületi tagra. Mivel az áramszorzó a II. főtétel szerint eleve arányos a $\nabla \mathbf{q}$ -val, ezért az átalakítás után a $\nabla \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ komponenst szorozzuk a $\mathbf{q}$ -val. Így, a

$$\Sigma_s = \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dA > 0 \quad (1)$$

feltételt kapjuk a peremekre vonatkozóan (a pozitív konstansok elhagyásával). Ez többdimenziós feladatokban, főleg helyfüggő peremfeltételek esetén érdekes.

A második lehetőség numerikus megoldások során érdekes, ahol a teljes entrópiaprodukciónak diszkretizálása megtehető, így azt pontonként, minden lépésben követni lehet. Erre mutat példát Fülöp Tamás ötlete nyomán a

Pozsár, Á., Szücs, M., Kovács, R., Fülöp T.: Four spacetime dimensional simulation of rheological waves in solids and the merits of thermodynamics, Entropy, 22:1376, 2020.

szabadon elérhető közlemény is, amely reológiai egyenletek alkalmazása során mutatja be hogyan lehet ezzel a módszerrel a numerikus módszer stabilitását ellenőrizni.

4. Kérdés: **"Hogyan integrálhatóak az Ön által kidolgozott stabil numerikus sémák a mérnöki gyakorlatban elterjedt végelelemes szoftverekbe (pl. COMSOL, ANSYS)?"**

Válasz: Véleményem szerint a meglevő eredmények bár egy jó alapot adnak a Guyer–Krumhansl- és Jeffreys-egyenletek megoldásához, de teljes, háromdimenziós megoldásokat még nem állítottam elő. Emiatt óvatosabban fogalmazok: a módszerek általánosíthatóak, de a modellek háromdimenziós viselkedéséről kevés a tapasztalat, ez igaz a peremfeltételekre is, amely főleg a GK-egyenlet esetén lehet kritikus. A legtöbb kereskedelmi végelelemes szoftver képes egyéni modellek kezelésére (például a COMSOL-nak kifejezetten külön modulja van erre), de ez nem magát a megoldási módszert cseréli le. Bizonyos esetekben, például ANSYS esetén, lehetőség van saját végelelemes típus definiálására, ez egy járható alternatíva lehet. Emellett az is megoldható, hogy ANSYS-ből a kiexportált hálón saját algoritmus oldja meg az egyenleteket. Ez jelenleg egy igen programozás és erőforrás-igényes folyamat.

5. Kérdés: **"Tudna adni egy intuitív, mikroszerkezeti alapú magyarázatot arra, miért nagyobb mindig a dinamikus hőfokvezetési tényező a statikusnál?"**

Válasz: Lásd az 1. észrevételre adott választ.

Budapest, 2026. január 16.



Dr. Kovács Róbert Sándor

egyetemi docens
BME, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék