

Válasz Dr. Nagy Péter Tamás
"Két időskálás hővezetési modellek elemzése és alkalmazása heterogén
anyagokra"
című MTA doktori dolgozat bírálatára

Mindenekelőtt, szeretném megköszönni Dr. Nagy Péter Tamásnak a gondos, mindenre kiterjedő, részletes bírálatát. Külön köszönöm a nyilvános védésre kitűzésére vonatkozó támogató nyilatkozatát. Az alábbiakban részletesen válaszolok minden bírálatban felmerülő észrevételre és kérdésre azok felmerülésének sorrendjében.

1. Észrevétel: **"Az alkalmazások alapján úgy tűnik, hogy az időben változó hővezetési folyamatok modellezését segíti elő a szerző, ami viszont az előszóból nem derül ki."**

Válasz: A Fourier-egyenleten túli hővezetési modellek a mérnöki gyakorlatban még nem terjedtek el széles körben, emiatt nem tekinthetőek a hőközlési szakterületen általánosan ismertnek. Ezen felül több olyan tulajdonsággal is rendelkeznek, amelyek a Fourier-egyenlethez képest jelentősen eltérőek, így az alkalmazásokig nem lehet egy lépésben eljutni. Habár a dolgozatom összességében véve tényleg az időben változó hővezetési folyamatok modellezését segíti elő, de ehhez több lépésen keresztül vezetett az út, kezdve a modellek termodinamikai szintű definiálásától egészen a kísérleti eredményekig. Ezt az utat hivatott bemutatni az előszóban említett felsorolás, ahol lépésről lépésre kiemeltem a főbb témaköröket, amelyeket ugyanilyen sorrendben tárgyalok a dolgozatomban.

2. Észrevétel: **"A σ_s entrópiaprodukció a bíráló szerint egy nem negatív érték, ami a folyamat során pozitív, egyensúlyban zérus, szemben a szerző állításával miszerint a "folyamat mentén folyamatosan növekszik". Valószínűleg a fajlagos entrópia növekedésére gondol, azonban a szövegben nem ez szerepel."**

Válasz: Köszönöm az észrevételt, egyetérték a bírálóval, valóban a fajlagos entrópiára gondoltam.

3. Észrevétel: **"Bár érintőleges a szerző utal az első fejezetben a modellekre, nem világos az olvasó számára, hogy a pontosan mi az újdonságtartalom. Vélhetőleg az egyenletek ismertek voltak már korábban is kontinuum közegekre is, ezért az egyenletek egységes keretrendszerben történő levezetése vagy azok elemzése lehet újdonság. Ezt jobb lett volna tisztázni, vagy legalább referenciákat közölni. Például nem világos, hogy a (2.10) egyenletben szereplő összefüggés a fajlagos entrópiára ismert volt-e korábban."**

Válasz: A bírálónak teljes mértékig igaza van abban, hogy ezeket az aspektusokat célszerű lett volna már a fejezet elején közölnöm, jelenleg ezt csak a fejezet végén található összefoglalásban emelem ki. Így a válaszom természetesen az, hogy igen, a (2.10) összefüggés alakja ismert volt korábban is, például a dolgozat [76]-os hivatkozása,

P. Ván és T. Fülöp. Universality in heat conduction theory – weakly nonlocal thermodynamics. Annalen der Physik (Berlin), 524(8):470–478, 2012,

vagy két lényegesen korábbi cikk, a

I. Gyarmati. On the Wave Approach of Thermodynamics and some Problems of Non-Linear Theories. J. Non-Equilib. Thermodyn., 2(4):233–260, 1977,

valamint a

S. Machlup és L. Onsager, Fluctuations and Irreversible Process. II. Systems with Kinetic Energy, Physical Review, 91, 1512–1515, 1953,

mutatnak erre példát.

A kapcsolódó, 1. és 2. tézisek megfogalmazásakor is arra törekedtem, hogy a mérnöki gyakorlat számára a leginkább releváns és gyakorlati fontosságú eredményeket közöljem. Így igen fontos felismerés például, hogy a Fourier-egyenleten túli modelleket azok onsageri szintjén érdemes definiálni, ami egyértelműsíti a modell felépítését annak minden következményével együtt. Szintén lényeges újdonság a statikus és a dinamikus időskálákhoz eltérő termikus jellemző bevezetése, amely a hővezetési szakterületen belül egyedülálló, és alapvetően befolyásolja a heterogén anyagok jövőbeli mérés technikai megfontolásait.

4. Észrevétel: **"Azonban egy látszólagos ellentmondás van a szövegben. A 18. oldal tetején azt állítja a szerző, hogy az MCV egyenletnek csak alacsony hőmérsékleten van jelentősége, az általa vizsgált heterogén anyagok esetén nincs. Majd később azt állítja, hogy az $\eta_{1,2}$ együtthatók "további méretskála bevezetését jelentik, de ennek jelentősége a heterogén anyagok modellezésében csekély, ..." Azonban az együtthatók 0 értéke esetén a modell az MCV egyenletre redukálódik, amiről azt állította a szerző, hogy nem alkalmas heterogén anyagok viselkedésének leírására."**

Válasz: Habár a bírálónak igaza van abban, hogy ilyen formában ez tényleg ellentmondás és pontosabban is fogalmazhattam volna a vonatkozó bekezdés végét, de véleményem szerint a kontextus is fontos: a 18. oldalon a GK-egyenletben megjelenő $\eta_{1,2}$ együtthatók önálló értelmezését tárgyalom. Ezért említem meg az előző bekezdésben a kinetikus elméleti háttérrel, az $\eta_{1,2}$ együtthatók közötti összefüggést, valamint a GK-egyenlet T -reprezentációját. Véleményem szerint a T -reprezentációból világossá válik, hogy gyakorlati szempontból nem önállóan az $\eta_{1,2}$ együtthatók értelmezésén van a hangsúly, hanem a velük, valamint a τ relaxációs idővel együtt képzett dinamikus hőfokvezetési tényezőn. Ezért írom, hogy bár önmagukban az $\eta_{1,2}$ együtthatók további méretskála bevezetését jelentik, de ennek a méretskálának a szerepe egyelőre nem világos, de az együtthatók értéke fontos, és a relaxációs idővel együtt értelmes.

5. Észrevétel: **"Az eredmények kellően alátámasztottnak tűnek, azonban a tézisek megfogalmazása nem szerencsés. A vélemény szerint azoknak tisztán tudományos állításoknak kell lenniük és nem beszámolóknak, ezért például a "kimutattam" és "megállapítottam" kifejezések feleslegesek."**

Válasz: Habár a bírálóval részben egyetértek abban, hogy a téziseket "keményebben" is meg lehet fogalmazni, de az több szempontból sem praktikus, például ilyen esetben biztosítani kellene azt, hogy a megfogalmazás teljes egészében önállóan is értelmes legyen miközben hangsúlyozza az elvégzett munka önállóságát. Ez sokszor igen hosszú és nehezen követhető állításokhoz vezethet. Az 1. tézispontom kapcsán meg nem is lenne igazán hasznos konkrét egyenleteket írni a termodinamikai megközelítések nagyfokú változatossága, valamint a modellek nagy száma miatt. Mindezen felül még az onsageri relációk sem feltétlenül egyértelműek, de ha azzal adunk meg egy modellt, akkor lerögzítjük az értelmezését a termodinamikai erő-áram rendszernek. Sokkal fontosabbnak tartom azt, hogy általánosan használható elveket állítsak fel, függetlenül attól, hogy pontosan milyen kontinuumtermodinamikai megközelítésben dolgozunk.

Mindezekon felül a saját eredmények hangsúlyozását szintén fontosnak tartom, ezt pedig a tézisek megfogalmazásában is tükrözni kívánom. Továbbá, több, a Műszaki Tudományok Osztályához tartozó korábbi dolgozat mintáját követtem, például Dr. Hős Csaba, Dr. Paál György és Dr. Csoknyai Tamás MTA doktori dolgozatai alapján, ahol minden tézis megfogalmazásánál ők is használták ezeket a kifejezéseket.

6. Észrevétel: **"A fejezetben ezenkívül a Navier-Stokes-Fourier-egyenleteken keresztül kerül bemutatásra a Liu-eljárás. A módszer segítségével a változók lehetséges függőségét ismerteti a többi állapotváltozótól. Mivel a dolgozat nagy részében szilárd, heterogén anyagok modellezésével foglalkozik nem világos, hogy az alfejezetnek mi volt a célja, és benne a jelölt milyen hozzájárulása található."**

Válasz: A bírálónak igaza van abban, hogy a dolgozatban tárgyalt szilárd heterogén anyagok modellezését közvetlenül nem segíti a Navier–Stokes–Fourier-egyenletek Liu-eljárással történő levezetése és bemutatása. Emiatt a levezetés túlnyomó részét függelékben közlöm, és inkább csak a koncepcionális következményekre fókuszálok, ezért a fejezet végén, egyfajta kitekintésként kapott helyet. Ezek a következmények igen érdekesek lehetnek az anyagi nem-linearitások szempontjából. Ugyanis, a hővezetési tényező akár már a Fourier-egyenlet esetén is függhet a hőmérséklet gradiensétől [lásd a (3.28) egyenletet], ez messze nem triviális következmény és több technológiai vonatkozása is lehet, ezt a dolgozatban külön hangsúlyozom mindamellett, hogy ennek kísérleti ellenőrzése még egy távlati kérdés. Ez a Fourier-egyenleten túli modellek "hagyományos" (a dolgozatban is bemutatott) levezetése során nem látszik, így ezt egy érdekes tudományos kérdésnek látom, emiatt fontosnak láttam közölni.

A bemutatott Liu-eljárással történő levezetés Szücs Mátyás munkája, a kapcsolódó közleményünket a dolgozatban hivatkozom. A saját hozzájárulásom a következmények elemzése és hővezetésbeli interpretációja volt.

7. Észrevétel: **"Véleményem szerint a jobb lett volna bemutatni a berendezést részletesebben az 5. fejezetben, ahol a kísérleti eredmények találhatóak."**

Válasz: A bírálóval egyetértek abban, hogy a kísérleti eredmények tárgyalásánál természetesebb elvárás egy berendezés bemutatása. Amiért mégis a megoldási módszereket tárgyaló fejezetben helyeztem el, mert a peremfeltételek megfogalmazása, a modell egyszerűsítése szintén igénylik a mérési elrendezés, valamint a fizikai folyamat háttérének ismeretét. Véleményem szerint a kísérleti elrendezés ismerete nélkül sokkal nehezebb a fejezetben bemutatott

egyenletek és ábrák értelmezése. Emiatt az 5. fejezetben az ábrát és a hozzátartozó leírást nem kívántam újra közölni.

8. Észrevétel: **"Például a peremfeltételeket, amit vélhetőleg több módszer esetén is használ, a változószeeparációs módszernél közli."**

Válasz: A 4.1.1. alfejezet három szakaszból épül fel. Az I. szakasznál a dimenziótlanítást tárgyalom, a II. szakaszban következik a "Megoldás a változók szétválasztásával." amelyre a bíráló hivatkozik, a III. szakasz pedig a kezdeti feltételek szerepéről szól. A II. szakaszban kivétel nélkül olyan megoldásokat mutatok be, amelynél ugyanazt a peremfeltételt használok, emiatt válik összehasonlíthatóvá a COMSOL-lal talált megoldás a saját analitikus megoldással. A 4.1.1. alfejezetben egyetlen eset van, amikor eltérek a közölt peremfeltételtől, ez az E. függelékben történik, ahol a tárgyalást a módosított peremfeltételek közlésével kezdem a félreértések elkerülése miatt.

Habár a II. szakaszban közölt 4.2. ábra aláírásában említem, hogy a hőimpulzus kísérletre jellemző megoldásokat mutatok és vetek össze, a bírálónak igaza van abban, hogy célszerű lett volna hivatkozni az egyenlet számára is.

9. Észrevétel: **"A módszer a feladat megoldására is alkalmas, de csak első- és másodfajú peremfeltételek esetén működik. Később kiterjeszti két-dimenziós hengeres testekre is. Ez látszólag könnyedén elvégezhető akár háromdimenziós testek esetére is, azonban a szerző ezt nem taglalja. Illetve a sajátfüggvényeket és az integrálokat numerikusan is kiszámítva tetszőleges geometrián is elvégezhetőnek tűnik a módszer, mind a peremek kezelésére, mind a feladat megoldására."**

Válasz: A bírálónak igaza van abban, hogy a módszer alkalmasságát a harmadfajú peremfeltétel behatárolja, mivel ott a konstitutív egyenletek közötti különbség is megjelenik a jelenlegi ismereteink alapján, ezt a dolgozatban is kiemelem. A bírálónak szintén igaza van abban, hogy elvben a módszertan aránylag könnyen átvihető háromdimenziós esetre is, de mivel erre nem végeztem részletes számolásokat, ezért nem kívántam részletesen tárgyalni. Numerikus módszerekkel vegyítve, valóban alkalmasnak látom tetszőleges geometriák kezelésére, lényegében a végesesemes módszerek is ezen alapulnak.

Az analitikus megoldások kapcsán érdekes eredményemnek tartom azt, hogy bizonyos peremfeltételek mellett használhatjuk ugyanazokat a sajátfüggvényeket, amelyet a Fourier-egyenlet esetén is meg lehet találni. Itt nem látok akadályt abban, hogy háromdimenziós esetre is a módszer alkalmazható legyen.

10. Észrevétel: **"Eredményeiből megfogalmazza az 5. és 6. tézisét. Sajnos ezek nagyon beszámoló jellegűek a főbb tudományos eredmények hiányoznak belőlük. Nem világos az sem, hogy az 5. tézisben miért nem konkretizálta a jelölt, hogy a módszerhez a Laplace-operátor sajátfüggvényeit szükséges használni."**

Észrevétel: **"Új tudományos eredményként mindegyik tézisét elfogadom, az 5. tézis kivételével."**

Válasz: A bíráló két észrevételére egyben kívánok válaszolni. A bírálatból nem derül ki, hogy

mely tudományos eredményeket hiányolja a bíráló, illetve, hogy melyik eredménnyel nem ért egyet.

Az 5. tézis esetén a Laplace-operátor bár megemlíthető, de nem módosítja a tézis megállapítását. Sőt, igazából le is szűkíti azt, ugyanis a Galjorkin-módszer használatához általános esetben nem is kötelező a Laplace-operátor sajátfüggvényeit használnunk. Ez akkor kényelmes és előnyös, ha például ismert egy korábbi Fourier-féle megoldás, amit így relatíve könnyű átültetni a GK-, vagy Jeffreys-egyenletre. Ez nem triviális lépés.

Az 5. tézis a bemutatott analitikus módszertant felhasználva vizsgálja az inhomogén kezdeti feltételek szerepét is. A dolgozatban konkrét konzisztenciafeltételeket adtam meg, de ezek tézisben való közlését nem találom praktikusnak, ugyanis ezek pontos alakja függ a felhasznált függvényrendszertől, valamint a térbeli dimenziók számától is. Amennyiben pont a sajátfüggvényeket választjuk, akkor a levezetett egyenletek kellőképpen átláthatóak; ellenkező esetben a feladat sokkal bonyolultabbá válhat. Ahogy a többi esetben, úgy ennél a tézisnél is az általánosságban alkalmazható elvekre koncentráltam.

Ez az állításom a 6. tézisre is igaz, mivel a Neumann-módszer módosítása, valamint a stabilitási feltételek az adott modelltől, így a nemlinearitás típusától és a választott diszkretizációtól is függenek. Emiatt nem célszerű egyiket sem kiemelni vagy megkülönböztetni a többitől.

11. Észrevétel: **"Azonban célszerű lett volna az illesztés menetét röviden ismertetni. Nem világos, hogy a Jeffreys-modell paramétereit miért nem illeszti, de feltehetőleg az időállandó illesztése történik és ebből számolja a paramétereket, így a két modell paraméterei egymásból származtathatóak. Akkor viszont felmerül a kérdés, hogy el lehet-e dönteni a mérések alapján, hogy a kettő közül melyik két-időskálás modell jobb adott heterogén anyag esetén? "**

Válasz: A bírálóval egyetértek abban, hogy az illesztés menetének leírása egy jóval teljesebb képet adott volna az egyenletekben szereplő paraméterek meghatározásáról, valamint azok bizonytalanságairól, ezt az alábbiakban röviden foglalom össze.

A paraméterek meghatározását iteratív úton végeztük Fehér Anna (volt) Ph.D. hallgatómmal (végzett 2025. november 27-én), én az általa kapott adatokat használtam fel a kapcsolódó tézisem megfogalmazására. Az iteráció alapját az úgynevezett lokális érzékenységi függvények adják, minden paraméterhez tartozik egy ilyen függvény:

$$S_{p_i,t} = \left. \frac{\partial T}{\partial p_i} \right|_{p_i}, \quad T = T(p_i, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

ahol S érzékenységi függvény az i -edik paraméterhez tartozik, és az idő függvényében adja meg a hőmérséklet-eloszlásra gyakorolt hatását egy adott térpontban, célszerűen a hőmérsékletmérési pontot kiválasztva. Ezt a függvényt elvben analitikusan is meg lehet határozni, de az még akár a Fourier-egyenlet esetén is nehezen kezelhető formulákra vezet, így ezt célszerű numerikusan közelíteni. Ezekből az érzékenységi függvényekből össze lehet állítani az úgynevezett érzékenységi mátrixot ($\mathbf{S}$), azaz minden oszlopában egy adott paraméterhez tartozó érzékenységi függvény értékei foglalnak helyet (ahol minden sor egy adott időpillanathoz tartozik). Ha az összes illesztendő paramétert egy P vektorba rendezzük, akkor az iteráció a

$$P_{k+1} = P_k + (\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k)^{-1} \mathbf{S}_k^T (T_{\text{mért}} - T(P_k)), \quad (2)$$

alakot ölti, ahol a T a transzponálást, a $^{-1}$ pedig a mátrix inverzét jelöli. A módszer előnye, hogy ha a modellben bármely két illesztendő paraméter lineárisan összefüggő, akkor az érzékenységi függvényei is azok lesznek, így az érzékenységi mátrix szinguláris volta ezt jelezné, és az iterációt nem lehetne végrehajtani.

Az illesztés jóságát a $T_{\text{diff}} = T_{\text{mért}} - T(P_k)$ differenciával, valamint ennek tulajdonságaival jellemezhetjük, például ennek σ^2 varianciájával. Érdemes a

$$\mathbf{C} = \sigma^2 (\hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{S}})^{-1}, \quad \hat{\mathbf{S}} = [\hat{S}_{p_1} \hat{S}_{p_2} \dots \hat{S}_{p_N}]. \quad (3)$$

mátrixot képezni, ahol a σ^2 a mérési adatoktól való eltérést jellemzi, az $\hat{S}$ pedig a redukált érzékenységi függvényeket jelenti, ami a fenti érzékenységi függvénytől abban különbözik, hogy a derivált értékét szorozzuk a paraméter referenciaként vett értékével

$$\hat{S}_{p_i, t} = p_i \left. \frac{\partial T}{\partial p_i} \right|_{p_i}, \quad T = T(p_i, t), \quad i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

A $\mathbf{C}$ főátlóinak gyöke megadja az egyes paraméterekhez tartozó hibát, súlyozva a paraméterhez tartozó érzékenységi függvénnyel. Így, ahol a modellben lévő paraméter igen érzékeny, ott a hibák is nagyobbak lesznek. Fehér Anna dolgozata a teljes módszertant részletesen tárgyalja.

A Jeffreys-modell paramétereinek illesztésére külön nincs szükség, mivel a vizsgált kísérleti elrendezés során, egydimenziós, hőforrásmentes esetet tekintve a Jeffreys-egyenlet T -reprezentációja megegyezik a GK-egyenletével, és elegendő csak az egyik modellt illeszteni. Ennek az is a következménye, hogy a két modellben a statikus és dinamikus hőfokvezetési tényezők megegyeznek, egy minimális eltérés abból következik, hogy az azonos T -reprezentáció ellenére eltérőek az érzékenységi függvények. Ezt szintén Fehér Anna Ph.D. dolgozata, valamint a

A. Fehér and R. Kovács. On the dynamic thermal conductivity and diffusivity observed in heat pulse experiments. Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics, 49:161–170, 2024. publikációnk tárgyalja részletesen. Emiatt a kísérletek elemzésére nincs kitüntetett modell, mindkettő egyforma eredményre vezet. A különbség a mögöttes termodinamikai háttérben, a modellek megoldhatóságában és azok jelentésében van. A modellt a kívánt alkalmazáshoz érdemes választani.

A bírálóval egyetérték abban, hogy ezt a dolgotban részletesebben is kiemelhettem volna az 5.2.1. alfejezetben.

12. Észrevétel: "Az eredmények alapján úgy tűnik, hogy egy adott mérést két időskálás modellt alkalmazva jobban tud illeszteni, azonban a módszer prediktív jellege nem tűnik kellően alátámasztottnak, ehhez valószínűleg további kutatások is szükségesek. Továbbá azonos méretű, reprezentatív darabszámú próbatestek esetére statisztikai módszerekkel is célszerű lett volna elemezni az adatokat."

Észrevétel: "Bíráloként a paraméterek jelentős méretfüggése miatt a bemutatott módszer prediktív jellegét látom az egyik legnagyobb kihívásnak."

Válasz: Feltételezem, hogy a bíráló a módszer prediktív jellegén azt érti, hogy ha egy adott próbatesten elvégzünk egy mérést, akkor az abból kapott eredmények származtathatóak más,

hasznos anyagokra is. A "hasznosság" természetesen kérdéses: ez függ attól, hogy az adott anyag mennyire mesterséges. Például egy fémhab esetén, ha ugyanazzal a gyártástechnológiával dolgozunk, ugyanolyan hőmérsékleti- és nyomásviszonyok mellett, akkor statisztikailag két test feltehetően azonosan fog viselkedni azok reprezentatív méretében. Kőzetek, vagy biológiai anyagok esetén sokkal nehezebb definiálni a hasznosság fogalmát.

A bíráló helyesen mutat rá arra, hogy a méretfüggés kihívás, azonban – ahogy a dolgozatban is hangsúlyozom – ez nem a kiterjesztett hővezetési elméletek sajátossága. Így, ilyen vonatkozásban a modellek nem tekinthetők prediktívnek. A kísérleti elrendezéseket olyan módon alakítják ki, hogy a lehető legtöbb zavaró tényezőt (például a hűlés) el lehessen hanyagolni, legalább egy bizonyos időskálán. Ez behatárolja a próbatestek lehetséges geometriai viszonyait, például a test vastagságát. Ez korlátozza minden, jelenleg szabványos mérés technika lehetőségeit a heterogén anyagok vizsgálata kapcsán, mivel a maximálisan megengedhető vastagság legtöbbször a 3-4 mm-es intervallumban van, ami egy nagy pórusméretű hab esetén nem elegendő. A heterogén anyagok sajátossága a méretfüggés, nem pedig bármilyen elméleti módszertan eredménye.

A két időskálás modellek használatának szükségessége pedig feltehetően szintén méretfüggő, ugyanis a diffúzív időskálát pont a testek jellemző L méretével együtt kell definiálni. A megfelelő mérés technikai fejlesztésekkel várhatóan a jövőben a méretfüggést érintő kérdésekre választ lehet kapni.

Kiemelném, hogy ettől függetlenül is vannak olyan esetek, amikor az adott heterogén anyagot annak reprezentatív mérete alatti mérettartományban kívánják felhasználni. Erre példát a CERN ALICE detektor esetén láttunk, ahol a szénhabváz vastagságának minimalizálása fontos szempont volt.

A statisztikai elemzés szintén Fehér Anna Ph.D. hallgatóm feladata volt. Több próbatesten száznál is több mérést végzett el, amelyekből a mérések reprodukálása egyértelműen látszott. A bíráló felvetését érdekesnek tartom a próbatestek számára vonatkozóan. Véleményem szerint a reprezentatív darabszám szintén anyag- és méretfüggő. Amíg csak kisméretű próbatestekre áll rendelkezésre megfelelő mérés technika, addig várhatóan a reprezentatív darabszám igen magas, akár száz felett is lehet, főleg olyan komplex esetekben, mint a kompozit fémhabok. Más esetekben, például a biológiailag lebontható NYÁK-ok esetén, amelyek mikrométeres skálájú heterogenitásokat tartalmaznak, ott 5 próbatest is közel ugyanazokat az eredményeket szolgáltatotta.

Ki szeretném emelni, hogy ez a reprezentatív darabszám nem biztosítja azt, hogy például minden, ugyanolyan összetételű kompozit fémhabra igaz lesz az állítás, mivel ahhoz a technológiai paramétereknek is egyezniük kell. Ennek oka a határfelületeken fellépő hőellenállás, ami nem csak a termikus, de a mechanikai jellemzőktől is függ, így a testek gyártása során fellépő hatásoktól is.

A következőkben a bíráló által külön feltett kérdésekre reagálok, pontról pontra.

1. Kérdés: "A két időskálás egyenletek levezetésénél, tárgyalásánál mi pontosan az újdonságtartalom?"

Válasz: Lásd a 3. észrevételre adott válaszom.

2. Kérdés: "Mit ért a jelölt pontosan az alatt, hogy a Guyer–Krumhansl-egyenletben az $\eta_{1,2}$ együtthatók jelentősége heterogén anyagok modellezésében csekély?"

Válasz: Lásd a 4. észrevételre adott válaszom.

3. Kérdés: "Ha egy Guyer–Krumhansl illetve Jeffreys-egyenlettel modellezett termodinamikai testen belül kijelölünk egy véges nagyságú kockát és annak felületén a hőáramsűrűséget integráljuk, akkor a két különböző megközelítés ugyanarra az értékre vezet? Ha nem, mi annak az oka, mi a fizikai jelentése?"

Válasz: Ez egy igen érdekes és jogos felvetés a bíráló részéről. Lehetnek olyan esetek, ahol a két modell olyan értelemben kompatibilis egymással, hogy tényleg ugyanazt a hővezetési folyamatot írják le, csak eltérő egyenletek segítségével, de ez messze nem általános tulajdonsága a két modellnek.

Az energiamérlegből kiindulva akkor kapjuk meg ugyanazt a hőmérséklet-változást, ha a be- és kiáramló hőáramsűrűségek különbsége egyezik. Felmerül a kérdés, hogy a hőáramsűrűség rendelkezik-e egy eltolási szabadságfokkal? A válasz az, hogy nem, ugyanis az lényegesen más dinamikai viselkedéshez vezetne. Ezért, ha a GK- és Jeffreys-egyenletek ténylegesen ugyanazt a folyamatot írják le, akkor ott a hőáramsűrűségeknek is meg kell egyezniük. Ez csak akkor lehetséges, ha ezt a kezdeti és peremfeltételek is megengedik, valamint az adott folyamat hely- és időfüggő hőforrásoktól mentes. Mindezekon felül a GK-egyenletből ki kell szedni a hőáramsűrűség rotációját ($\eta_2 = 0$). Ekkor, és csak ekkor elképzelhető, hogy a két modell ugyanazt a folyamatot írja le, de ekkor is csak a megfelelő kezdeti és peremfeltételek mellett. Ez egy egydimenziós esetben nem okoz különösebb nehézséget, tehát a dolgozatban bemutatott kísérletek kiértékelése szempontjából tényleg egyenértékűek a modellek, de többdimenziós esetben komoly megszorításokkal jár. Részletesebb matematikai bizonyítás jelenleg nem áll rendelkezésre.

4. Kérdés: "Mi az a nem-poláros folyadék?"

Válasz: Azok a folyadékok, amiben az anyagi részecskék, molekulák nem rendelkeznek kitüntetett belső iránnyal, forgással, ezért pontszerűnek tekinthetők. Ez a feltétel nem teljesül például folyadékkristályok esetén, ahol a molekulák rúdszerű alakzatokat képeznek. A dolgozatom ettől mélyebben nem érinti a folyadékok tulajdonságait.

5. Kérdés: "Lehetséges-e Galjorkin-módszer segítségével több-dimenziós, tetszőleges alakú testek két időskálás időfüggő hővezetési problémáit megoldani, ahol a sajátfüggvények és integrálok kiszámítása numerikus módszerek használatával történik? Ha igen, milyen előnyei, hátrányai lennének a módszernek a bemutatott numerikus megoldásokhoz képest?"

Válasz: Lásd a 9. észrevételre adott válaszom. Ezt annyival egészíteném ki, hogy a véges-elem módszerek ezeket rendre alkalmazzák, így ez a terület már tudományosan jól ismert. Amiért mégis szükségem volt a dolgozatban bemutatott technika kidolgozására, az az, hogy analitikusan általában igen bonyolult a parciális differenciál-egyenletek megoldása, de ezen

bizonyos kezdeti és peremfeltételek esetén sokat lehet egyszerűsíteni, ha a Fourier-egyenlet egy jól ismert megoldását vesszük alapul.

A módszer általános alkalmazását tekintve kérdéses, hogy tetszőleges geometria esetén meg lehet-e találni a szükséges sajátfüggvény-sajátérték rendszert, főleg bonyolult (például helyfüggő) peremfeltételek esetén. Ezt tovább nehezíti, hogy a bemutatott két időskálás hővezetési modellek hullámterjedési folyamatokat is leírhatnak, amely figyelembevételéhez nagyságrendekkel több módusra van szükség, mint egy Fourier-hoz közeli, diffúz terjedés modellezéséhez. Ilyen esetben célszerűbbnek látom a direkt numerikus megoldások előállítását, külön figyelmet fordítva a peremfeltételek helyes kezelésére.

6. Kérdés: **"A két időskálás Guyer–Krumhansl és Jeffreys-modellek ugyanarra az illesztett hőmérséklet görbére vezetnek a bemutatott kísérletekben? Ha igen, milyen méréssel lehetne eldönteni, hogy melyik modell alkalmasabb heterogén anyag hővezetésének leírására? Ha nem, akkor miért csak a Guyer–Krumhansl modell paramétereinek illesztése történt meg?"**

Válasz: Lásd a 11. észrevételre adott válaszom.

Az alábbiakban a dolgozat specifikus részeire vonatkozó észrevételekre kívánok válaszolni.

1. Észrevétel: **"4. oldalon az "Ezeket a tulajdonságokat később matematikai formába öntöm, és konkrét hővezetési modellekhez kapcsolom." mondatban nem világos, hogy mely tulajdonságokat érti a szerző az ezeket kifejezés alatt."**

Válasz: A kapcsolódó bekezdésben a Fourier-egyenleten túli modellek fonon hidrodinamikai tárgyalásában felmerülő időskálákat részletezem, így az "ezeket" kifejezés erre értendő.

2. Észrevétel: **"4. oldalon: nem világos, hogy a szerző mit ért az első mérőföldkő esetén a második hang modellezése alatt, sem hivatkozást, sem módszert nem közöl, miközben a második mérőföldkő is a második hang modellezése kontinuumtermodinamikával."**

Válasz: A bírálónak igaza van abban, hogy a kapcsolódó bekezdésekben egyértelműbben is fogalmazhattam volna. Az első mérőföldkő esetén fontos a pontos idézet: "Az első fontos mérőföldkő a második hang terjedési sebességének hőmérséklet függésének sikeres modellezése, amelyhez a statisztikai háttér nélkülözhetetlen volt.", ahol egyrészt a terjedési sebességre, másrészt pedig a statisztikai háttérre hivatkozik.

A második mérőföldkő azonban már a kontinuumtermodinamikai háttérre utal, amely területen Gyarmati Istvánnak volt kiemelkedő szerepe.

3. Észrevétel: **"A 7. oldalon szereplő "Ennek egy hírhedt példája az úgynevezett "fagyott hús kísérlet" [48],... " kezdetű mondatban az "ennek" valószínűleg heterogén anyagokra utal, amik nem az előtte lévő mondatban, hanem az eggyel előtte lévőben szerepelnek. Nagyon gyakran fordul elő, hogy az "ez", "ezek" mutató névmások nem egyértelműen jelölik ki, hogy mire gondol a szerző."**

Válasz: A bírálónak igaza van abban, hogy pontosabban is fogalmazhattam volna. A megfogalmazás mégis inkább annak szól, amit az előző mondat állít, miszerint a Fourier-egyenlettel való eltérést csakis hullámformában képzelték el, még heterogén anyagokban is. Így, az "Ennek" a hullámterjedés kimutatását célzó kísérletre utal.

4. Észrevétel: **"7. oldalon nem világos, hogy mit definiál a szerző effektív modellezés alatt. Valószínűleg szerkesztési hiba lehet, mert a kifejezést később a 8. oldalon definiálja megfelelően."**

Válasz: A bírálónak igaza van, hogy a 7. oldal nem definiálom pontosan az effektív modellezést, de rá kívántam világítani arra, hogy a bemutatott kísérlet illesztése példa az effektív modellezésre.

5. Észrevétel: **"Az izotróp/anizotróp kifejezés többször is többször is helytelenül "izotrop"/"anizotrop"-ként szerepel. (11., 12., 16., 23., 27., 33., 79. oldalak.)"**

Válasz: Az MTA helyesírási ajánlását és a szótári bejegyzést is ellenőrizve a helyes írásmód az "izotrop" és "anizotrop" kifejezések.

6. Észrevétel: **"18. oldalon a lap alján az "Ez a tulajdonság kifejezés" vélhetőleg a 3 mondattal korábban szereplő "második diffúziós időskálá"-ra utal."**

Válasz: A bíráló által emlegetett "tulajdonság" kifejezés a kérdéses bekezdés tartalmára utal, amely általánosságban tárgyalja a Fourier-egyenleten túlmutató jelenségek megfigyelésének peremfeltételektől való függését.

7. Észrevétel: **"Ha jól értelmezem, a hátoldalon mindig adiabatikus peremfeltételt feltételez a szerző, míg az előoldalon csak a hőimpulzus után. A leírásból viszont ez nem derül ki; pontosabban az, hogy a hőimpulzus alatt milyen peremfeltétel volt a hátoldalon."**

Válasz: A bírálónak igaza van abban, hogy a vonatkozó bekezdésben félreérthetően fogalmaztam. A teljes időintervallum alatt adiabatikus peremfeltételt használtam.

8. Észrevétel: **"A 43. oldalon a "felintegrálható" nyelvtanilag kifogásolható kifejezés szerepel."**

Válasz: Köszönöm a bírálónak az észrevételét, a jövőben figyelni fogok erre a kifejezésre.

9. Észrevétel: "Az 56. oldalon szerepel a "síkhullám" kifejezés, viszont az egyenlet egy dimenziós, így a "hullám" vagy a "térbeli hullám" kifejezés pontosabb lett volna."

Válasz: Köszönöm a bírálónak az észrevételét, a jövőben figyelni fogok erre a kifejezésre.

Budapest, 2026. január 16.



Dr. Kovács Róbert Sándor

egyetemi docens
BME, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék