

Exponentially small radiation of oscillons and oscillatons

Oszcillonok és oszcillatonok exponenciálisan kicsi sugárzása

MTA doktori értekezés tézislevele

Fodor Gyula

HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont

Részecske- és Magfizikai Intézet



Budapest, 2025

1. A kutatások előzménye

Az MTA doktori disszertációban a nemlineáris klasszikus térelméleti és hidrodinamikai modellekben létrejövő lokalizált állapotok szerkezetével és sugárzásával kapcsolatos eredményeimet mutatom be. A sík háttéren definiált önkölcsönható valós ϕ skalármező által létrehozott hosszú élettartamú rezgő állapotok létezését először numerikus módszerekkel mutatták meg [Bogolyubskii and Makhan'kov, 1977]. Ezen állapotokra később az *oszcillon* elnevezés terjedt el a szakirodalomban [Copeland et al., 1995]. Kiderült, hogy a gravitációs kölcsönhatás alatt álló valós skalármezők hasonló, rezgő gömb-szimmetrikus állapotokat hozhatnak létre, amelyekre az *oszcillaton* elnevezés terjedt el [Seidel and Suen, 1991][Seidel and Suen, 1994].

Munkámban az említett jelenségek alapvető viselkedését mutató legegyszerűbb valós skalármezőt tartalmazó rendszereket tanulmányozom. Érdeemes megemlíteni, hogy oszcillonok létrejönnek jóval összetettebb rendszerekben is, mint például a standard modell bozonikus szektorában [Farhi et al., 2005, Graham, 2007]. Nemlineáris önkölcsönható rendszerek esetén még a skalármező létezése sem feltétlenül szükséges, ahogy azt a tömeges Proca mezőből kialakuló oszcillatonok létezése is mutatja [Garfinkle et al., 2003, Brito et al., 2016].

A sík háttéren létrejövő oszcillonok általában jól láthatóan energiát veszítenek skalármező kisugárzásával, de bizonyos esetekben az energiaveszteség annyira lassú hogy numerikus módszerekkel sokáig nem is volt kimutatható. A gravitációhoz csatolt skalármezők által létrehozott oszcillatonok olyan jó közelítéssel periodikusak, hogy a témával kapcsolatos munkáink előtt numerikus módszerekkel nem sikerült kimutatni, hogy sugároznak, emiatt a legtöbb esetben hallgatólagosan feltételezték hogy állandó frekvenciával rezegnek.

Egy bizonyos felületi feszültség tartományban a felületi vízhullámok le-

írására alkalmas Korteweg-de Vries (KdV) egyenleteket célszerű kiegészíteni egy ötödik derivált taggal [Hunter and Scheurle, 1988]. A jól ismert szolitónoknak megfelelő megoldások ekkor kis amplitúdójú hullámokat bocsátanak ki a terjedés irányába, és így lassan energiát veszítenek [Benilov et al., 1993]. A dolgozatban ezt a rendszert főleg azért vizsgáljuk, mert technikailag egyszerűbb mint a rezgő skalármező probléma, ugyanakkor az alkalmazott módszerek lényegében ugyanazok, és így a skalármezők által létrehozott oszcillon és oszcillaton állapotok is könnyebben érthető módon leírhatók válnak.

2. Célkitűzések

Mivel az eredményeink szerint nem léteznek állandó energiával rendelkező sztatikus vagy egzaktul idő-periodikus állapotok, a munkám legfőbb célja a minimális sugárzással rendelkező megoldások megtalálása, valamint szerkezetük, stabilitásuk és élettartamuk vizsgálata. Kis amplitúdójú állapotok esetén a sugárzás nagyságát analitikusan is ki tudjuk számolni, nagy amplitúdók esetén viszont precíz numerikus módszereket kell alkalmaznunk.

Az oszcillonok és oszcillatonok gyenge sugárzásának és az ebből következő hosszú élettartamuknak köszönhetően számos fizikai alkalmazásuk válik lehetővé. Az utóbbi években jelentősen megnőtt a témával kapcsolatos publikációk száma. A különféle kozmológiai modellekben szereplő skalármezőkből létrejövő oszcillatonok a galaxisokban lévő sötét anyag modellezésére is alkalmasak lehetnek [Alcubierre et al., 2002]. Ha a skalármező önkölcsönhatását az axionokra jellemző potenciál határozza meg, akkor a kialakuló oszcillatonokra az axion-csillag elnevezés terjedt el [Visinelli et al., 2018, Chavanis, 2018]. Nagyon alacsony tömegű axion-szerű részecskék által alkotott elmosódott (fuzzy) sötét anyag feltételezése magyarázatot adhat arra, hogy a galaxisokban miért nem figyelhetünk meg bizonyos méret alatti sötét anyag

csomósodásokat [Hu et al., 2000, Marsh and Pop, 2015]. Skalármezők által létrehozott lokalizált objektumok kialakulhattak közvetlenül az inflációs időszak után az inflatonból vagy a hozzá csatolt skalármezőkből. Ezeknek az oszcillonoknak kialakulása és elbomlása során jelentősen megnövekedhet a gravitációs hullámok kibocsátása, ami a gravitációs hullámok spektrumán érzékelhető csúcsokként mérhetővé válhat [Zhou et al., 2013, Antusch et al., 2018, Amin et al., 2018].

3. Vizsgálati módszerek

Gömbszimmetrikus sugárzó oszcillonok időben való fejlődésének tanulmányozásához negyedrendű Runge-Kutta numerikus kódot alkalmaztam. A kód a vonalak módszerén alapul, és a külső határfeltétel problémáját a tér kompaktifikálásával oldja meg.

Az időben egzaktul periodikus kvázibreather megoldások numerikus megkonstruálásához spektrális módszeren alapuló numerikus eljárást használtam. A számolásokhoz a francia kutatók által Meudon-ban kifejlesztett LORENE [LORENE, 2008] és KADATH [KADATH, 2010, Grandclément, 2010] spektrális kódot alkalmaztam. A sugárzás extrém kicsi mértéke miatt nagyon nagy pontosságú számolásokra van szükség az önkölcsönható és az öngravitáló skalármező esetén is. A LORENE és KADATH numerikus kódok, mivel 16 jegy pontossággal számolnak, nem képesek 10^{-12} -nél kisebb amplitúdójú aszimptotikus rezgések numerikus vizsgálatára. Ezért a sztatikus ötödrendű KdV probléma esetére saját spektrális numerikus kódot fejlesztettem ki tetszőleges számjegy pontossággal számoló aritmetika használatával.

Az oszcillonok és az oszcillatonok mérete is határtalanul növekszik miközben a skalármező ε paraméterrel jellemzett rezgési amplitúdója nullához tart. Az r radiális koordináta $\rho = \varepsilon r$ alakú átskálázása után lehetővé válik az

ε hatványai szerinti kifejtés. A vezető rend csak a skalármező időfüggését határozza meg, míg a magasabb rendben megjelenő konzisztencia feltételek megadják a megoldás térbeli alakját is. A kifejtés nem konvergens, hanem aszimptotikus sor, ugyanakkor ez a sor megfelelő rendben kiszámolva a valódi megoldás nagyon jó közelítését adja. Hasonló kifejtés alkalmazható az ötödrendű KdV egyenlettel leírható probléma esetén is.

Mivel a sugárzás ε -ban exponenciálisan kicsiny amplitúdójú, a kifejtésen kívül további, kevésbé közismert módszereket szükséges alkalmazni a sugárzás mértékének meghatározásához. Az időben periodikus megoldásokat leíró Fourier egyenletek és az ε kifejtés komplex r síkra való kiterjesztését, valamint az aszimptotikus illesztés módszerét Segur és Kruskal használta először egydimenziós oszcillonok sugárzásának kiszámolására [Segur and Kruskal, 1987]. A komplex síkon elhelyezkedő szingularitás közelében a függvények viselkedése ε -tól függetlenné válik kis ε esetén. Segur és Kruskal a szingularitás környezetében differenciálegyenletek numerikus megoldása segítségével számolta az exponenciálisan kicsi korrekciót. Munkáink egyik fontos eredményeként megmutattuk, hogy szimmetrikus $U(\phi)$ kölcsönhatási potenciál esetén analitikus módon is számolható a sugárzás, Borel összegzés segítségével. Ezt a módszert először Pomeau, Ramani és Grammaticos alkalmazta az ötödrendű KdV egyenlet megoldásaira [Pomeau et al., 1988]. Laplace transzformáció segítségével [Grimshaw and Joshi, 1995] ekvivalens, de valamivel egyszerűbb módszert dolgoztak ki, és a vezető rendű eredményekhez járuló korrekciókat is számolni kezdték.

4. A dolgozatban bemutatott új tudományos eredmények

1. Oszcillonok időfejlődése

Valós önkölcsönható skalármező esetén Gauss görbe alakú kezdőadat

időfejlődését nagy pontosságú numerikus kóddal tanulmányoztam. Ennek segítségével megmutattam, hogy az irodalomban a [Honda and Chopuik, 2002] cikkben korábban bemutatott periodikusnak tűnő oszcillon állapotok skalármező kisugárzásával nagyon lassan energiát veszítenek [1]. A külső határfeltétel megfelelő kezelésének köszönhetően az állapotok fejlődését a numerikus kód nagyon hosszú időn keresztül is megbízhatóan le tudja írni. Ennek főképp a kis amplitúdójú, és ezért nagyon lassan sugárzó állapotok tanulmányozásánál van nagy jelentősége.

Általános Gauss kezdőadat esetén a felesleges energia egy jelentős része a folyamat elején kisugárzódik, és hosszú élettartamú rezgő oszcillon állapot jön létre. Azonban, a felesleges energia egy kisebb része az oszcillon egészének alacsony frekvenciás rezgéseként még hosszú ideig jelen marad. Ezt az úgynevezett alak-módust a frekvencia és az amplitúdó lassú periodikus változásaként figyelhetjük meg. A munkám során törekedtem minél tisztább oszcillon állapotok létrehozására, ahol az alak-módus a lehető legkisebb.

2. A kvázibreath állapotok fogalmának bevezetése és ezek numerikus vizsgálata

A lassan energiát kisugárzó oszcillonok helyett numerikusan és analitikusan is lényegesen egyszerűbb a kis amplitúdójú állóhullám aszimptotikával rendelkező egzaktul időperiodikus megoldások vizsgálata. A minimális állóhullám farokkal rendelkező megoldásra bevezettük a *kvázibreather* elnevezést [1], ami azóta elterjedt a témával kapcsolatos szakirodalomban. A kvázibreather megoldásoknak az ω rezgési frekvenciával paraméterezett családja létezik, amely megoldásokat spektrális numerikus kód segítségével számoltuk ki extrém nagy pontossággal. Az időfejlődési kódban a kvázibreathert kezdőadatként használva, valamint a fejlődés Fourier transzformáltját vizsgálva megmutattam, hogy

az azonos frekvenciájú oszcillonok és kvázibreatherek mag tartománya egymással megegyezik, és a farok amplitúdójuk is nagy pontossággal azonos [1]. A kvázibreather kezdőadatból kifejlődő oszcillon a lehető legtisztább, ebben az esetben a lehető legkisebb a zavarként megmaradó alacsony frekvenciás alak-módus.

A numerikus számolások eredményei megadták a mag tartomány energiájának az amplitúdó szerinti pontos függését is, ami az objektumok stabilitásának szempontjából nagy jelentőségű. Az időfejlődési kód alkalmazásával kapott numerikus eredményeim alátámasztják azt az általános elvet, amely szerint ha a teljes energia növekszik a középponti amplitúdó növelésével akkor az állapot stabil, különben instabil. A maximális tömegnek megfelelő frekvencia adja meg a stabilitási tartomány határát. Háromdimenziós tér esetén az oszcillonok stabilak egy bizonyos ω_c frekvencia alatt. Amikor frekvenciájuk a sugárzás hatására történő energiaveszteség miatt az ω_c érték fölé növekszik, akkor hirtelen elbomlanak.

3. Oszcillonok kis-amplitúdójú állapotok szerinti kifejtése

Kis és közepes amplitúdójú oszcillonok nagy pontossággal tanulmányozhatók az amplitúdót jellemző, kicsinek tekintett ε paraméter hatványai szerinti kifejtéssel. A kifejtést a szakirodalomban korábban rendelkezésre állónál magasabb rendekig meghatároztam általános $U(\phi)$ kölcsönhatási potenciálra és tetszőleges d térdimenzió esetére [2]. Általános potenciálra ε^4 rendig, szimmetrikusra pedig ε^6 rendig meghatároztam az oszcillon alakját. Megmutattam, hogy kis amplitúdós oszcillonok csak $1 \leq d \leq 3$ dimenzió esetén létezhetnek, és csak akkor, ha $U(\phi)$ a kvadratikusan Klein-Gordon potenciálnál laposabb alakú a minimuma körül. Megmutattam, hogy az oszcillonok alakját, vezető rendben, egy univerzális közönséges másodrendű differenciálegyenlet írja

le.

A kis-amplitúdó szerinti kifejtés eredményét az időfejlődést leíró numerikus kódban kezdőértékként használva, a Gauss kezdőadat fejlődéséhez képest jóval tisztább oszcillonokat kapunk, alacsonyabb amplitúdójú alak-módusokkal [2]. Kis ε értékeknél már a vezető lineáris rend is jó közelítést ad, míg közepes amplitúdóknál magasabb ε hatványokig is el kell menni a kifejtéssel. Nagy amplitúdóknál, a tömeg extrémumának közelében, a kifejtés aszimptotikus jellege miatt a magas rendek inkább rontják az eredményt. Ekkor a kvázibreather konfiguráció spektrális kóddal való számolása adja meg precízen az oszcillon magjának alakját.

4. Oszcillonok sugárzási amplitúdójának meghatározása

A kis ε paraméter szerinti kifejtés nem képes megadni az oszcillon, illetve a kvázibreather farkát, mert a fark amplitúdója ε -ban exponenciálisan kicsi. A sugárzás nagyságát a függvények komplex r radiális koordináta esetére való kiterjesztése és aszimptotikus illesztés segítségével határoztam meg. Szimmetrikus $U(\phi)$ potenciál esetén a fark nagysága Borel összegzés alkalmazásával analitikusan is számolható. Egyébként a Fourier módusegyenletek numerikus integrálása szükséges a komplex síkon elhelyezkedő szingularitás közelében. Először $d = 1$ térdimenzió esetén mutattuk be az eljárást [3], majd egy következő publikációban $d = 2$ és $d = 3$ dimenzióra általánosítottuk a módszert [4].

Kis ε amplitúdó esetén a sugárzás miatti energiaveszteségi ráta nagyságára $S = \alpha \varepsilon^{1-d} \exp(-\beta/\varepsilon)$ adódik, ahol α és β az $U(\phi)$ potenciál alakjától és a d dimenziótól függő pozitív állandók. A szingularitás való tengelytől való távolsága viszonylag egyszerűen meghatározza a β konstans értékét, míg α értéke az aszimptotikus illesztés eredményeként

adódik. Egynél több térdimenzió esetén megjelenik egy $\varepsilon \ln \varepsilon$ alakú korrekció is az α együtthatóban. Ha $d \geq 2$ akkor a sine-Gordon potenciál esetén is van sugárzás, de ennek számolása külön figyelmet igényel, mivel ebben az esetben az egyébként vezető rendű tagok eltűnnek [4].

Többféle kölcsönhatási potenciál esetén összehasonlítottam a sugárzás nagyságára kapott analitikus és numerikus eredményeket. Az eredmények konzisztensek és megerősítik egymást. Érdekes azonban figyelembe venni, hogy a kétféle eljárás különböző tartományokban alkalmazható. Az analitikus eredmény az ε szerinti kifejtésnek csak a vezető rendje, közepes és nagy amplitúdóknál további korrekciók számolására lenne szükség. Numerikusan viszont csak nagy központi amplitúdójú oszcillonok esetén válik kimutathatóvá a sugárzás, amely bizonyos esetekben akár $\varepsilon \approx 0.5$ -nek is megfelelhet.

5. Oszcillatonok kis-amplitúdós kifejtése

Az általános relativitáselmélet keretében a gravitációhoz csatolt valós skalármező által létrehozott oszcillatonok alakját és viselkedését tanulmányoztam az amplitúdót jellemző kis ε paraméter hatványai szerinti kifejtés alkalmazásával [5]. A gravitációs esetben a ϕ skalármezőn kívül a metrika diagonális komponenseit képviselő A és B függvények is időben lassan változó frekvenciával rezegnek. A szakirodalomban korábban ismert vezető ε^2 rend helyett ε^4 rendig határoztam meg a kifejtést, általános $U(\phi)$ kölcsönhatási potenciál és tetszőleges d térbeli dimenzió esetén. Az oszcillatonok alakját vezető rendben két másodrendű közönséges differenciálegyenletből álló rendszer határozza meg, amelyek Schrödinger-Newton egyenletek néven ismertek. Ezeknek $3 \leq d \leq 5$ dimenzió esetén van exponenciálisan lokalizált megoldása, így kis amplitúdójú oszcillatonok családja csak ekkor létezhet.

A kifejtés magasabb rendekig történő számolása lehetővé teszi a teljes tömeg amplitúdótól való függésének tanulmányozását, és így a stabilitási tartományok meghatározását. Három térdimenzió és önkölcsönhatás mentes Klein-Gordon potenciál esetén kis amplitúdóknál a tömeg ε szerint lineárisan nő, majd egy bizonyos ε_c értéknél eléri maximumát és csökkenni kezd. Ez azt jelenti, hogy háromdimenziós oszcillatonok kis és közepes amplitúdók esetén stabilak, hasonlóan az egy és kétdimenziós sík háttéren definiált oszcillonokhoz. Mivel a sugárzás mértéke a tömeg csökkenésével exponenciálisan csökken, $d = 3$ esetén az oszcillatonok sohasem veszíthetik el az összes energiájukat, így élettartamuk szükségképpen végtelen nagy [5].

6. Oszcillatonok sugárzásának analitikus meghatározása

Oszcillatonok sugárzásának mértékét a sík háttérű oszcillonoknál korábban alkalmazott módszerünk általánosításával határoztam meg, komplex síkra kiterjesztéssel, aszimptotikus illesztéssel, és Borel összegzés segítségével [5]. Ezen munkánk előtt korábban csak egy cikkben volt található becslés a tömegveszteség nagyságára [Page, 2004], de az a valódi érték sokszorosát adta. Kis ε amplitúdó esetén a sugárzás miatti energiaveszteségi ráta nagysága ugyanolyan alakú képlet szerint függ az amplitúdótól mint oszcillonok esetén, $S = \alpha \varepsilon^{1-d} \exp(-\beta/\varepsilon)$, a részletes számolás eredményeképp adódó α és β állandókkal. Az oszcillatonok sugárzásának mértéke annyira kicsi, hogy a különféle kezdőadatok numerikus időfejlődését számoló numerikus kódokkal eddig nem tudták kimutatni.

7. Oszcillatonok és sugárzásuk numerikus vizsgálata

Az oszcillatonok sugárzásának nagysága mégis meghatározható alkalmasan kidolgozott megbízható numerikus módszerrel, ha a lassan vál-

tozó frekvenciájú sugárzó oszcillaton helyett a hozzá rendkívül hasonló egzaktul periodikus kvázibreather megoldást vizsgáljuk. Azonos frekvencia esetén a kvázibreather minimális amplitúdójú állóhullám farkának amplitúdója megegyezik az oszcillaton kimenő hullámának amplitúdójával. A kvázibreatherek precíz szerkezetét és a farok nagyságát Philippe Grandclement francia kutatóval együttműködve, az általa kifejlesztett KADATH numerikus könyvtár alkalmazásával számoltuk ki [6]. A spektrális kóddal elérhető nagy pontosságra feltétlenül szükség van, mert még a legkedvezőbb esetben is, amikor az oszcillaton magjának amplitúdója 0.5 körüli, a rezgő farok amplitúdója 10^{-8} rendű, de a kettő aránya általában még ennél is jóval kisebb.

Mint korábban az oszcillonoknál, a gravitációs esetben is fennáll, hogy az ε kifejtéssel és aszimptotikus illesztéssel kapott sugárzási eredmények kis és közepes amplitúdóknál érvényesek, míg a numerikus módszerrel a nagy amplitúdós de még stabil oszcillatonok sugárzását tudjuk meghatározni. A számolásaim egyik legfontosabb következménye, hogy az egyik tartományban sem található olyan oszcillaton amelynek ne lenne sugárzása, vagyis nincs egzaktul periodikus breather megoldás.

Megmutattam, hogy egy rezgési periódus alatt a stabil tartománybeli oszcillatonok legfeljebb 10^{-11} -ed részét veszíthetik el a tömegüknek. Még az univerzum élettartamának megfelelő idő alatt sem csökkenhet tömegük az eredetinek a felénél kisebbre [6].

8. Az ötödrendű KdV egyenlet időfüggetlen megoldásainak vizsgálata

Ha a KdV egyenletet kiegészítjük egy ε^2 -el szorzott ötödik deriváltas taggal, ahol ε egy kis paraméter, sztatikus esetet vizsgálva szoliton-szerű megoldásokat kapunk, amelyek a mag tartományon kívül nagyon kis amplitúdójú oszcillációba mennek át az exponenciális lecsengés he-

lyett. A rezgő farok amplitúdója ugyanazokkal a módszerekkel számolható mint a skalármezők által létrehozott oszcillonok esetén. Mivel a KdV esetben a megoldások időfüggetlenek, a számolás technikailag jóval egyszerűbb. Ennek köszönhetően ekkor a vezető rendű eredményhez járuló magasabb rendű korrekciókat is ki tudtam számolni. Kijavítottam az irodalomban megjelent hibás ε^2 rendű korrekció nagyságát, és el tudtam jutni ε^{12} rendig [7, 8]. Annak érdekében, hogy 10^{-12} -nél kisebb amplitúdójú aszimptotikus rezgéseket is ki tudjak számolni, saját spektrális numerikus kódot fejlesztettem ki tetszőleges számjegy pontosságú aritmetika használatával. A numerikus és analitikus eredmények rendkívül jól egyezést mutatnak [7, 8]. A KdV esetére kidolgozott módszerek remélhetőleg alkalmazhatók lesznek a sugárzás pontosabb számolására a korábban említett skalármezők esetén is.

A tézispontokhoz kapcsolódó tudományos közlemények

- [1] G. Fodor, P. Forgács, P. Grandclément, and I. Rácz, “Oscillons and quasibreathers in the ϕ^4 Klein-Gordon model,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 124003, Dec 2006.
- [2] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and A. Lukács, “Small amplitude quasibreathers and oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 025003, Jul 2008.
- [3] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and M. Mezei, “Computation of the radiation amplitude of oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 065002, Mar 2009.
- [4] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and M. Mezei, “Radiation of scalar oscillons in 2 and 3 dimensions,” *Physics Letters B*, vol. 674, no. 4, pp. 319 – 324, 2009.

- [5] G. Fodor, P. Forgács, and M. Mezei, “Mass loss and longevity of gravitationally bound oscillating scalar lumps (oscillatons) in D dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 064029, Mar 2010.
- [6] P. Grandclément, G. Fodor, and P. Forgács, “Numerical simulation of oscillatons: Extracting the radiating tail,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 065037, Sep 2011.
- [7] G. Fodor, P. Forgács, and M. Mushtaq, “Higher order corrections to beyond-all-order effects in a fifth order Korteweg–de Vries equation,” *Phys. Rev. D*, vol. 107, p. 105002, May 2023.
- [8] G. Fodor, P. Forgács, and M. Mushtaq, “New derivation of the amplitude of asymptotic oscillatory tails of weakly delocalized solitons,” *Phys. Rev. D*, vol. 109, p. 125011, Jun 2024.

Irodalmi hivatkozások listája

- [Alcubierre et al., 2002] Alcubierre, M., Guzmán, F. S., Matos, T., Núñez, D., Ureña-López, L. A., and Wiederhold, P. (2002). Galactic collapse of scalar field dark matter. *Classical and Quantum Gravity*, 19(19):5017.
- [Amin et al., 2018] Amin, M. A., Braden, J., Copeland, E. J., Giblin, J. T., Solorio, C., Weiner, Z. J., and Zhou, S.-Y. (2018). Gravitational waves from asymmetric oscillon dynamics? *Phys. Rev. D*, 98:024040.
- [Antusch et al., 2018] Antusch, S., Cefalà, F., and Orani, S. (2018). What can we learn from the stochastic gravitational wave background produced by oscillons? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(03):032–032.

- [Benilov et al., 1993] Benilov, E., Grimshaw, R., and Kuznetsova, E. (1993). The generation of radiating waves in a singularly-perturbed Korteweg-de Vries equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 69(3):270–278.
- [Bogolyubskii and Makhan’kov, 1977] Bogolyubskii, I. L. and Makhan’kov, V. G. (1977). Dynamics of spherically symmetrical pulsons of large amplitude. *JETP Letters*, 25:107.
- [Brito et al., 2016] Brito, R., Cardoso, V., Macedo, C. F. B., Okawa, H., and Palenzuela, C. (2016). Interaction between bosonic dark matter and stars. *Phys. Rev. D*, 93:044045.
- [Chavanis, 2018] Chavanis, P.-H. (2018). Phase transitions between dilute and dense axion stars. *Phys. Rev. D*, 98:023009.
- [Copeland et al., 1995] Copeland, E. J., Gleiser, M., and Müller, H.-R. (1995). Oscillons: Resonant configurations during bubble collapse. *Phys. Rev. D*, 52:1920–1933.
- [Farhi et al., 2005] Farhi, E., Graham, N., Khemani, V., Markov, R., and Rosales, R. (2005). An oscillon in the $SU(2)$ gauged Higgs model. *Phys. Rev. D*, 72:101701.
- [Garfinkle et al., 2003] Garfinkle, D., Mann, R., and Vuille, C. (2003). Critical collapse of a massive vector field. *Phys. Rev. D*, 68:064015.
- [Graham, 2007] Graham, N. (2007). Numerical simulation of an electroweak oscillon. *Phys. Rev. D*, 76:085017.
- [Grandclément, 2010] Grandclément, P. (2010). Kadath: A spectral solver for theoretical physics. *Journal of Computational Physics*, 229(9):3334 – 3357.

- [Grimshaw and Joshi, 1995] Grimshaw, R. and Joshi, N. (1995). Weakly nonlocal solitary waves in a singularly perturbed Korteweg–De Vries equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 55(1):124–135.
- [Honda and Choptuik, 2002] Honda, E. P. and Choptuik, M. W. (2002). Fine structure of oscillons in the spherically symmetric ϕ^4 Klein-Gordon model. *Phys. Rev. D*, 65:084037.
- [Hu et al., 2000] Hu, W., Barkana, R., and Gruzinov, A. (2000). Fuzzy cold dark matter: The wave properties of ultralight particles. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1158–1161.
- [Hunter and Scheurle, 1988] Hunter, J. K. and Scheurle, J. (1988). Existence of perturbed solitary wave solutions to a model equation for water waves. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 32(2):253–268.
- [KADATH, 2010] KADATH (2010). KADATH Spectral Solver. <https://kadath.obspm.fr/>. author: Philippe Grandclement.
- [LORENE, 2008] LORENE (2008). LORENE, Langage Objet pour la Relativité Numérique. <http://www.lorene.obspm.fr/>.
- [Marsh and Pop, 2015] Marsh, D. J. E. and Pop, A.-R. (2015). Axion dark matter, solitons and the cusp–core problem. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 451(3):2479–2492.
- [Page, 2004] Page, D. N. (2004). Classical and quantum decay of oscillations: Oscillating self-gravitating real scalar field solitons. *Phys. Rev. D*, 70:023002.
- [Pomeau et al., 1988] Pomeau, Y., Ramani, A., and Grammaticos, B. (1988). Structural stability of the Korteweg-de Vries solitons under a singular perturbation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 31(1):127 – 134.

- [Segur and Kruskal, 1987] Segur, H. and Kruskal, M. D. (1987). Nonexistence of small-amplitude breather solutions in ϕ^4 theory. *Phys. Rev. Lett.*, 58:747–750.
- [Seidel and Suen, 1991] Seidel, E. and Suen, W.-M. (1991). Oscillating soliton stars. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1659–1662.
- [Seidel and Suen, 1994] Seidel, E. and Suen, W.-M. (1994). Formation of solitonic stars through gravitational cooling. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2516–2519.
- [Visinelli et al., 2018] Visinelli, L., Baum, S., Redondo, J., Freese, K., and Wilczek, F. (2018). Dilute and dense axion stars. *Physics Letters B*, 777:64 – 72.
- [Zhou et al., 2013] Zhou, S.-Y., Copeland, E. J., Easter, R., Finkel, H., Mou, Z.-G., and Saffin, P. M. (2013). Gravitational waves from oscillon preheating. *Journal of High Energy Physics*, 2013(10):26.