

Válasz Jakovác Antal bírálói véleményére

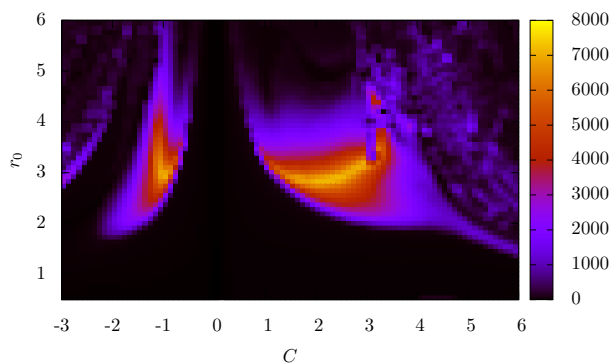
Fodor Gyula MTA doktori értekezésével kapcsolatban

Nagyon köszönöm hogy időt szánt a dolgozatom gondos átnézésére és a bírálat elkészítésére. A kérdésekre adott válaszaim a következők:

1. Mennyire stabil a breather-jellegű megoldás, azaz egy általános kezdőfeltétel vezet-e ilyen jellegű megoldásokhoz?

Tetszőleges kezdeti skalármező eloszlásból ugyan nem fejlődik ki oszcillon vagy oszcillaton, de a lehetséges kezdőadatok jelentős részéből igen. Azt hogy mennyire könnyű megfelelő kezdőadatot találni, illusztrálja az is, hogy a hetvenes évek végén gömbszimmetrikus fejlődést leíró numerikus kód segítségével találták meg az oszcillonokat, anélkül hogy tudták volna milyen kezdőadattól fejlődnek ki legkönnyebben [1, 2, 3]. Azóta tudjuk, hogy az oszcillonoknak egyparaméteres serege létezik, ahol az amplitúdó egyértelműen meghatározza a rezgés frekvenciáját és az oszcillon jellemző méretét. A kezdeti időpontban a skalármező időderiváltját válasszuk nullának, és tegyük fel, hogy térbeli alakját egy tetszőleges véges energiájú lokalizált függvény határozza meg. Ha a kezdőadat amplitúdója és térbeli mérete az egyparaméteres megoldás-sereg egyik elemének közelében van, akkor a felesleges energia kisugárzása után hosszú ideig rezgő oszcillon állapot jön létre. További feltétel még az is, hogy stabil legyen az a megoldás aminek a közelében van a kezdőadat. Az egyparaméteres sereg egy adott megoldása akkor stabil, ha az amplitúdó növelésével a rendszer energiája (tömege) is növekszik. Ez háromdimenziós oszcillonoknál egy bizonyos amplitúdó felett teljesül, míg gravitációhoz csatolt oszcillatonoknál éppen egy adott amplitúdó alatt.

A leggyakrabban választott kezdőadat Gauss-függvény alakú, $\phi = C \exp(-r^2/r_0^2)$, ahol C határozza meg az amplitúdót, r_0 pedig az állapot méretét. Az alábbi ábra a létrejövő oszcillon élettartamát mutatja ϕ^4 potenciál esetén Andersen és Tranberg 2012-es cikkéből [4], a két paraméter értékétől függően:



Látható, hogy egyáltalán nincs szükség finomhangolásra ahhoz, hogy oszcillonokat kapjunk. A Gauss-függvény egyébként nem kifejezetten jól közelíti az oszcillon valódi térbeli alakját. A rezgés ω frekvenciája a skalármező $m = \sqrt{2}$ tömegénél kicsivel alacsonyabb, és így a rezgési periódus közelítőleg $T = 2\pi/\omega \sim 4.4$. Ez mutatja, hogy ezernél több rezgés is történhet az oszcillon végső bomlása előtt.

Aszimmetrikus kezdőadatokból is lokalizált oszcillonok jönnek létre, amelyek gyorsan gömbszimmetrikussá válnak skalármező kisugárzásával [5, 6]. A stabili-

tást az is jól mutatja, hogy két oszcillon ütközésekor is gyakran egy összeolvadt oszcillon állapot jön létre a felesleges energia kisugárzása után [7]. Véletlenszerű skalármező-eloszlások időfejlődése során csomósodások jönnek létre, amelyek oszcillonokká alakulnak [8]. Az inflációs időszak végén az inflaton mezőből is oszcillonok jöhetnek létre [9, 10, 11], amelyek a gravitációs hullám hátteret is befolyásolhatják [12, 13, 14].

Gravitációhoz csatolt skalármező esetén a létrejövő oszcillatonok még a sík hátterén definiált oszcillatonoknál is stabilabbnak bizonyulnak. A Klein-Gordon skalármezőből felépülő oszcillatonok esetén nem lép fel hirtelen bomlás, gyorsan csökkenő sugárzás mellett bármilyen sokáig fennmaradnak. Még ha van is önkölcsönhatása a skalármezőnek, kis amplitúdójú oszcillatonoknál akkor is a gravitációs vonzás dominál, így ekkor is végtelen az élettartam. Már az oszcillonok numerikus módszerrel történő felfedezésekor is nyilvánvaló volt, hogy gömbszimmetrikus Gaussfüggvény alakú kezdőadatokból nagyon könnyen kialakulhatnak [15, 16]. Általános relativitáselmélet keretében működő $3 + 1$ dimenziós numerikus kódok segítségével kapott eredmények szerint, nem gömbszimmetrikus skalármezőkből is létrejönnek oszcillatonok, amelyek skalár és gravitációs hullámok kisugárzásával gyorsan gömbszimmetrikussá válnak [17, 18]. Oszcillatonok ütközése esetén fekete lyukká vagy oszcillatonná való összeolvadás is megfigyelhető a numerikus szimulációknál [19, 20]. Gyenge gravitációnál a nemrelativisztikus határesetben az Einstein-Klein-Gordon rendszer az időfüggő Schrödinger-Newton egyenletekkel közelíthető. Ezek az egyenletek Schrödinger-Poisson, illetve önkölcsönható skalármező esetén Gross-Pitaevskii-Poisson néven is ismertek. Ebben a numerikusan könnyebben kezelhető rendszerben is sokféle kezdőadattól kialakulnak oszcillatonok, és nagy fokú stabilitást mutatnak [21, 22, 23, 24].

2. Mennyire érzékenyek a megoldások az egyenletek pontos alakjára? Valós körülmények között azt gondolhatjuk, hogy sok kis korrekció lehet az egyenletekhez, ez mennyiben érinti a kisugárzott terekre kapott eredményeket?

Gömbszimmetrikus oszcillonok d térdimenzió esetén az alábbi egyenlet megoldásai:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = U'(\phi) ,$$

ahol a vessző az önkölcsönhatást leíró $U(\phi)$ potenciál ϕ szerinti deriváltját jelöli. A potenciálról feltehetjük hogy a $\phi = 0$ helyen minimuma van, és $U(0) = 0$. A minimum közvetlen környezetében való viselkedése $U(\phi) \approx \frac{1}{2}m^2\phi^2$, ahol m a skalármező tömege. Ha m nem nulla, akkor a tér és idő koordináták átskálázásával mindig elérhető, hogy $m = 1$ legyen, amit fel is teszünk a továbbiakban. Az átskálázás természetesen a kezdőadatot is érinti, így a fejlődés függ a skalármező tömegétől, de folytonos módon. A potenciál viselkedése az alábbi kifejtéssel jellemezhető:

$$U(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{3}g_2\phi^3 + \frac{1}{4}g_3\phi^4 + \frac{1}{5}g_4\phi^5 + \dots .$$

Oszcillonok egyparaméteres családja létezik, amit az amplitúdóval arányos ε paraméterrel jellemezünk [25]. Ennek a frekvenciával való összefüggése $\omega^2 = 1 - \varepsilon^2$. Az

oszcillon megoldás vezető rendben

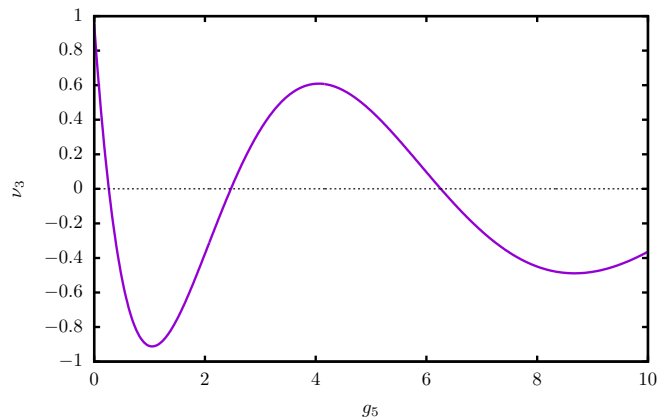
$$\phi = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\lambda}} S(\varepsilon r) \cos(\omega t) \quad , \quad \lambda = \frac{5}{6}g_2^2 - \frac{3}{4}g_3 \quad ,$$

ahol $d = 1$ dimenzióánál $S(\rho) = \sqrt{2} \operatorname{sech} \rho$, míg más dimenzióknál $S(\rho)$ egy numerikusan meghatározható lokalizált függvény. Az $U(\phi)$ potenciál csak a λ konstanson keresztül jelenik meg a rezgés amplitúdójában, az oszcillon térbeli alakja és frekvenciája nem függ a potenciáltól. A kifejtéses eljárásból az is következik hogy kis amplitúdójú oszcillon csak akkor létezik, ha λ pozitív. Általános esetben, feltéve hogy λ értéke nem extrém kicsi, az oszcillon mag-tartományának viselkedése lassú folytonos módon függ a kölcsönhatási potenciál alakjától. Ez a kifejtés magasabb rendjeiben is hasonlóképpen következik, és a numerikus szimulációk is lassú folytonos függésre utalnak.

Az oszcillonok sugárzásának mértéke már valamivel érzékenyebb a potenciál megválasztására, de még mindig folytonos függést mutat. Egy dimenzió és szimmetrikus potenciál esetén az oszcillonok sugárzási amplitúdója vezető rendben [26]

$$\alpha = 2\nu_3 \exp\left(-\frac{\sqrt{3}\pi}{2\varepsilon}\right) \quad ,$$

ahol a ν_3 konstans kell meghatároznunk a komplex síkon történő aszimptotikus illesztés módszerével. Magasabb dimenzió és aszimmetrikus potenciál esetén is hasonló kifejezést kapunk. Mindegyik esetben az exponenciális függvény argumentuma csak a pólus valós tengelytől való távolságától függ, és ezért a potenciál választásától független. Az esetleges kis korrekciók így nem jelennek meg exponenciálisan növekedve a sugárzási amplitúdó értékében. Konkrétan azt az esetet vizsgáltuk, amikor a potenciál szimmetrikus, azaz $g_{2k} = 0$, és csak g_3 és g_5 nem nulla. Ekkor a skalármező átskálázásával elérhető, hogy $g_3 = -1$ legyen. A sugárzást meghatározó ν_3 konstans g_5 -től való függését az alábbi ábrán mutatjuk:

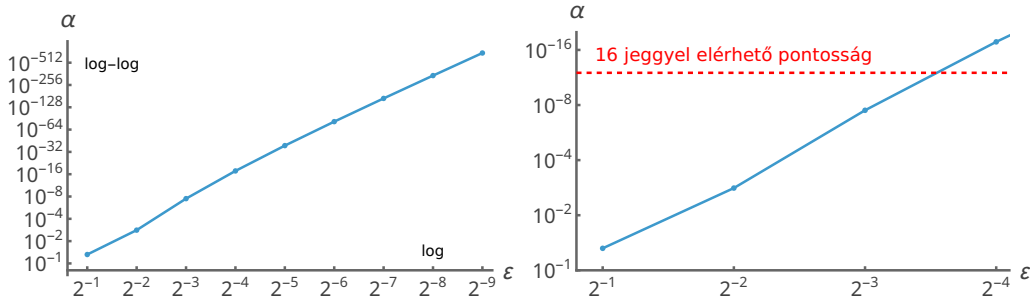


Látható hogy a sugárzás nagysága erősen függ a potenciálban a ϕ^6 tag együtthatójától, még előjelet is vált. Viszont a függés folytonos, nem történik hirtelen változás.

3. A 4. fejezet több ábráján (21, 22, 23-as ábrák) a numerikus pontok és az elméleti görbe erősen eltér egymástól. Tudná kommentálni ezt az eltérést?

A kérdés szorosan összefügg Dr. Lévay Péter Pál harmadik kérdésével, így a válaszom is jelentős részben megegyezik. A numerikus eredmények és az elméleti görbe közötti nagy eltérés oka az, hogy a két módszer eltérő paraméter tartományban működik igazán jól. Az oszcillonok esetében a jelenleg rendelkezésre álló numerikus pontosság és az analitikus közelítés vezető rendjének összehasonlítása leginkább annak a szemléltetésére alkalmas, hogy a kétfajta eredmény konzisztens egymással. Ha távol is van a kétféle érték nagy amplitúdójú oszcillonoknál, az amplitúdót csökkentve egyre kisebbé válik az eltérés. A numerikus eljárás még nem alkalmazható olyan kis amplitúdóknál, ahol valóban nyilvánvaló egyezés jelenne meg.

A kétféle módszerrel kapott eredmények kapcsolata legkönnyebben az ötödrendű KdV egyenlet példáján mutatható be. Ebben az esetben jóval pontosabb numerikus eredmények is rendelkezésre állnak, és az analitikus kifejtésnek a magasabb rendjeit is ki tudjuk számolni. A következő két ábrán az α sugárzási amplitúdó függését mutatjuk a központi amplitúdónak megfelelő ε paraméter függvényeként, a KdV esetben. A baloldalon a dolgozat 15. ábráját láthatjuk, amit tetszőlegesen sok jegyre számoló spektrális numerikus kóddal kaptunk. A jobboldalon kinagyítottuk az a részt, ami a szokásos 16 jegyre számoló kóddal is kiszámolható.

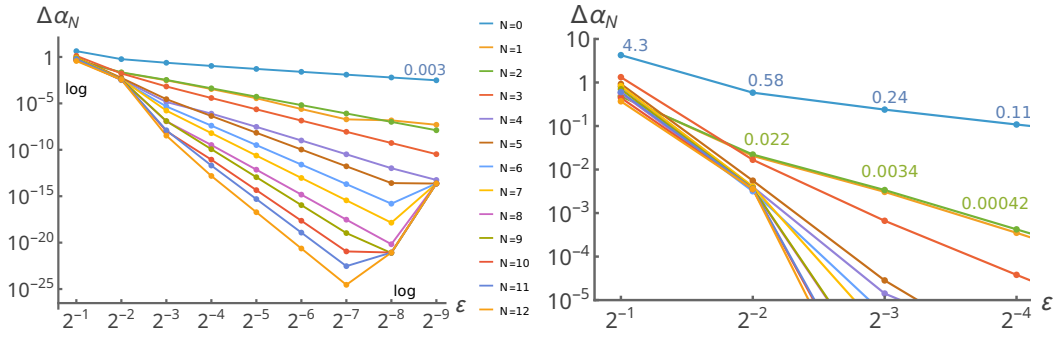


Az extrém gyors csökkenés miatt a függőleges tengelyen dupla logaritmikus skálát használunk. Nyilvánvalóan nem lehet kiszámolni a szokásos 16 jegy pontosságú aritmetika használatával egy 10^{-16} körüli amplitúdóval rendelkező rezgést a távoli tartományban, ha a középpontban az amplitúdó még mindig 10^{-1} körül marad. A doktori dolgozat megírásának idején, skalármezők által létrehozott oszcillonok és oszcillatonok esetén még csak 16 jeggyel számoló kódok álltak rendelkezésre, így numerikus eredményeink is csak viszonylag nagy amplitúdójú állapotokra voltak.

Az analitikus eredményeink a kicsinek tekintett ε amplitúdó szerinti kifejtésen alapulnak. A sugárzási amplitúdó vezető rendben exponenciálisan lecsengő, és ehhez járulnak ε hatványai szerinti korrekciók. Az N -ed rendű analitikus közelítés alakja

$$\alpha_N = \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{\pi}{2\gamma\varepsilon}\right) (K_0 + K_1\varepsilon + K_2\varepsilon^2 + \dots + K_N\varepsilon^N) ,$$

ahol $\gamma^2 = (-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon^2}) / (8\varepsilon^2)$, és az összeg $N + 1$ tagból áll. Oszcillonok és oszcillatonok esetén csak az α_0 vezető rend ismert, és a K_0 konstans meghatározásához volt szükség a Borel összegzésre. A KdV esetben meg tudtuk oldani a belső kifejtést magasabb rendekben is, ezért több K_n konstans is rendelkezésre áll. A következő ábrákon az N -ed rendű analitikus eredmény $\Delta\alpha_N = (\alpha_N - \alpha) / \alpha$ relatív hibáját mutatjuk a pontosnak tekinthető numerikus α értékhez képest, a KdV elmélet esetén.



Látható, hogy kis és közepes ε amplitúdók esetén, a magasabb rendű kifejtéssel kapott eredmények egyre jobb közelítést adnak, és sok jegyre megegyeznek a numerikusan kapott értékekkel, tehát a két módszer egyértelműen konzisztens eredményt ad. A jobboldalon kinagyítottuk azt a kezdő tartományt, amelyre még lehetett volna numerikus eredményt kapni 16 jegyre számoló kóddal is. Látható, hogy az analitikus kifejtés α_0 vezető rendjének ilyen nagy központi amplitúdóknál még olyan nagy a hibája, hogy a sugárzás nagyságára csak durva becslésnek tekinthető.

A doktori dolgozat 21, 23 és 23-as ábrájánál az amplitúdót jellemző ε paraméter minimális értéke 0.30, 0.29 illetve 0.2. Ez azért van így, mert a rendelkezésre álló numerikus módszerekkel nem tudtuk meghatározni az oszcillon rendkívül gyengévé váló sugárzását ennél kisebb amplitúdók esetén. Az analitikus eljárás az ε hatványai szerinti kifejtésen alapul, és a sugárzás nagysága csak vezető rendben ismert. Így nem meglepő, hogy ilyen nagy ε értékekre elég nagy az elméleti eredmény hibája. Az utóbbi hónapokban kidolgoztunk oszcillonok esetére is egy tetszőleges jegyre számoló spektrális kódot, valamint ki tudtuk számolni a kifejtés néhány magasabb rendjét is. Egy térdimenzió esetén a numerikus és analitikus eredmények, a KdV esethez hasonlóan, több tizedesjegyre való egyezést mutatnak, de még nem kerültek publikálásra.

4. Az (50)-es képlet körül nem világos, melyik megoldást választjuk, a képlet szerinti megoldás nem arányos ε -nal.

A dolgozat (49)-es egyenlete szerint az ötödrendű KdV egyenlet aszimptotikus megoldását az

$$u = \alpha \sin\left(\frac{kx}{\varepsilon} - \delta\right)$$

alakban keressük. Innen látható, hogy a hullámszám k/ε . Az (50)-es egyenletnél a $k^4 - k^2 - c\varepsilon^2 = 0$ egyenletnek azt a megoldását választjuk, amelyre k^2 és k is pozitív,

$$k = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4c\varepsilon^2}\right)} = 1 + \frac{c}{2}\varepsilon^2 - \frac{5c^2}{8}\varepsilon^4 + \dots$$

A hullámhossz $\lambda = 2\pi\varepsilon/k$ az a mennyiség, ami kis ε -ra arányos ε -al.

Budapest, 2026 április 17.

Fodor Gyula

Fodor Gyula

Hivatkozások

- [1] A. E. Kudryavtsev, “Solitonlike solutions for a Higgs scalar field,” *JETP Letters*, vol. 22, p. 82, 1975.
- [2] I. L. Bogolubsky, “Cascade evolution of spherically symmetric pulsons in multivacuum field theory models,” *Physics Letters A*, vol. 61, no. 4, pp. 205 – 206, 1977.
- [3] I. L. Bogolyubskii and V. G. Makhan’kov, “Dynamics of spherically symmetrical pulsons of large amplitude,” *JETP Letters*, vol. 25, p. 107, 1977.
- [4] E. A. Andersen and A. Tranberg, “Four results on ϕ^4 oscillons in $D + 1$ dimensions,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, no. 12, p. 16, 2012.
- [5] A. B. Adib, M. Gleiser, and C. A. S. Almeida, “Long-lived oscillons from asymmetric bubbles: Existence and stability,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 085011, 2002.
- [6] M. Hindmarsh and P. Salmi, “Numerical investigations of oscillons in 2 dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 105005, 2006.
- [7] M. Hindmarsh and P. Salmi, “Oscillons and domain walls,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 105025, 2008.
- [8] E. W. Kolb and I. I. Tkachev, “Nonlinear axion dynamics and the formation of cosmological pseudosolitons,” *Phys. Rev. D*, vol. 49, pp. 5040–5051, 1994.
- [9] M. A. Amin, R. Easther, H. Finkel, R. Flauger, and M. P. Hertzberg, “Oscillons after inflation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 108, p. 241302, 2012.
- [10] J. C. Aurrekoetxea, K. Clough, and F. Muia, “Oscillon formation during inflationary preheating with general relativity,” *Phys. Rev. D*, vol. 108, p. 023501, 2023.
- [11] R. Mahbub and S. S. Mishra, “Oscillon formation from preheating in asymmetric inflationary potentials,” *Phys. Rev. D*, vol. 108, p. 063524, 2023.
- [12] S. Antusch, F. Cefala, and S. Orani, “What can we learn from the stochastic gravitational wave background produced by oscillons?,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, no. 03, pp. 032–032, 2018.
- [13] X.-X. Kou, J. B. Mertens, C. Tian, and S.-Y. Zhou, “Gravitational waves from fully general relativistic oscillon preheating,” *Phys. Rev. D*, vol. 105, p. 123505, 2022.
- [14] K. D. Lozanov, M. Sasaki, and V. Takhistov, “Universal gravitational waves from interacting and clustered solitons,” *Physics Letters B*, vol. 848, p. 138392, 2024.

- [15] E. Seidel and W.-M. Suen, “Oscillating soliton stars,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 66, pp. 1659–1662, Apr 1991.
- [16] E. Seidel and W.-M. Suen, “Formation of solitonic stars through gravitational cooling,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 72, pp. 2516–2519, Apr 1994.
- [17] J. Balakrishna, R. Bondarescu, G. Daues, and M. Bondarescu, “Numerical simulations of oscillating soliton stars: Excited states in spherical symmetry and ground state evolutions in 3D,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 024028, 2008.
- [18] F. Muia, M. Cicoli, K. Clough, F. Pedro, F. Quevedo, and G. P. Vacca, “The fate of dense scalar stars,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2019, no. 07, pp. 044–044, 2019.
- [19] T. Helfer, E. A. Lim, M. A. G. Garcia, and M. A. Amin, “Gravitational wave emission from collisions of compact scalar solitons,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, p. 044046, 2019.
- [20] J. Y. Widdicombe, T. Helfer, and E. A. Lim, “Black hole formation in relativistic oscillaton collisions,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2020, no. 01, p. 027, 2020.
- [21] A. Bernal and F. S. Guzmán, “Scalar field dark matter: Head-on interaction between two structures,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 103002, Nov 2006.
- [22] E. J. M. Madarassy and V. T. Toth, “Evolution and dynamical properties of Bose-Einstein condensate dark matter stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, p. 044041, Feb 2015.
- [23] F. Edwards, E. Kendall, S. Hotchkiss, and R. Easther, “Pyultralight: a pseudo-spectral solver for ultralight dark matter dynamics,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, no. 10, p. 027, 2018.
- [24] M. A. Amin and P. Mocz, “Formation, gravitational clustering, and interactions of nonrelativistic solitons in an expanding universe,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, p. 063507, Sep 2019.
- [25] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and A. Lukács, “Small amplitude quasibreathers and oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 025003, 2008.
- [26] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and M. Mezei, “Computation of the radiation amplitude of oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 79, p. 065002, 2009.