

## Válasz Dr. Lévay Péter Pál bírálói véleményére Fodor Gyula MTA doktori értekezésével kapcsolatban

Nagyon köszönöm hogy időt szánt a dolgozatom gondos és alapos átnézésére, valamint a bírálat elkészítésére. A kérdésekre adott válaszaim a következők:

**1. Az aszimptotikus sorok elméletéből ismert egyéb fontos matematikai jelenségek (például az úgynevezett Stokes jelenség) releváns-e az oszcillonok és oszcillatonok kontextusában? Léteznek-e ilyen jellegű vizsgálatok? Az inflációs kozmológia és a Stokes jelenség esetleges kapcsolatát illetően lásd arXiv:grqc/9211027, és PRD044 3043 (1991).**

A Stokes-jelenség akkor lép fel, amikor differenciálegyenletek megoldásainak vagy integráloknak aszimptotikus közelítéseit használjuk, és azt tapasztaljuk, hogy exponenciálisan kicsi tagok hirtelen megjelennek amikor bizonyos határvonalakat (Stokes-vonalakat) lépünk át a komplex síkon. Fizikai értelemben a Stokes-jelenség azt magyarázza meg, hogy miért jelennek meg ezek a minden renden túl kicsi hatások, és hogyan válnak hirtelen megfigyelhetővé. A Stokes-jelenséget alapvetően az okozza, hogy egy adott komplex síkon értelmezett függvényt aszimptotikusan olyan függvényekkel közelítünk, amelyek tőle eltérő többértékű struktúrával rendelkeznek.

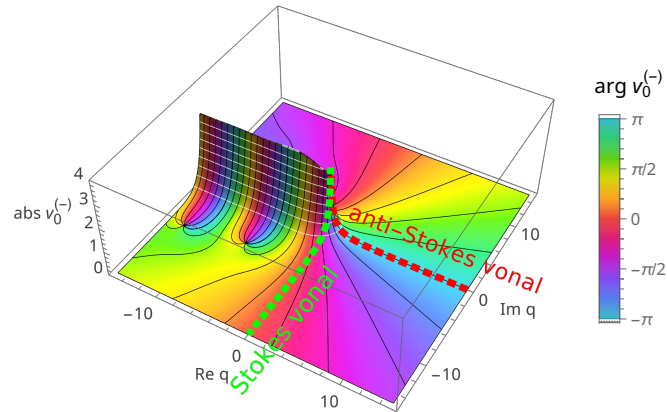
A Stokes jelenség alkalmazásra kerül, többek között, a kvantummechanikában a WKB-közelítésnél, nemperturbatív effektusok vizsgálatánál, áramlástan és hullámterjedési jelenségeknél, határrétegeknél, optika és elektromágnesesség esetén, plazmafizikában, fekete lyukak sugárzásának számolásánál, valamint kozmológiában rézecskek keletkezésének számolása esetén.

Oszcillonok és oszcillatonok sugárzásának számolásakor központi szerepe van a Stokes jelenségnek, még ha ez a publikációkban név szerint említésre nem is kerül. A mag tartomány leírásához egy  $\varepsilon$  amplitúdó paraméter hatványai szerinti kifejtést használunk, ami nem konvergens, hanem aszimptotikus sor. Megfelelő rendig használva nagyon jó közelítést ad, de az  $\varepsilon$ -ban exponenciálisan kicsi sugárzást nem írja le. Mivel közben a térkoordináta is átskálázásra kerül, az eljárás a többskálás kifejtéses módszer alkalmazásának is tekinthető.

Az időben periodikus oszcillon megoldás komplex síkra való kiterjesztését, és az ott megjelenő szingularitás környezetében értelmezett belső megoldást először Segur és Kruskal [1] vizsgálták 1987-ben, az aszimptotikus illesztés módszerének alkalmazásával. A belső megoldás Stokes-vonalánál megjelenő exponenciálisan kicsi járulékot a differenciálegyenletek numerikus integrálásával számolták. Ennek a járuléknak a valós tengelyre való kiterjesztése határozza meg az oszcillon sugárzását. A nemperturbatív jelenséget minden renden túl kicsi korrekcióként értelmezték. Pomeau, Ramani és Grammaticos [2] alkalmazták először a Borel összegzést az exponenciálisan kicsi járulék kiszámolására, egy az oszcillonhoz hasonló de egyszerűbb probléma esetén (ötödrendű KdV egyenlet). Ezt a módszert általánosítottuk több cikkünkben oszcillonok és oszcillatonok sugárzásának meghatározására, továbbra is a Stokes jelenség név szerinti említése nélkül. A Borel összegzés alapvető jelentőségű a Stokes-jelenség irodalmában, és minden gyakorlati alkalmazása esetén, a vonalaknál megjelenő járulék meghatározásához.

Példaként a doktori dolgozat 7. ábrájának Stokes vonalakkal kiegészített válto-

zatát mutatjuk be.

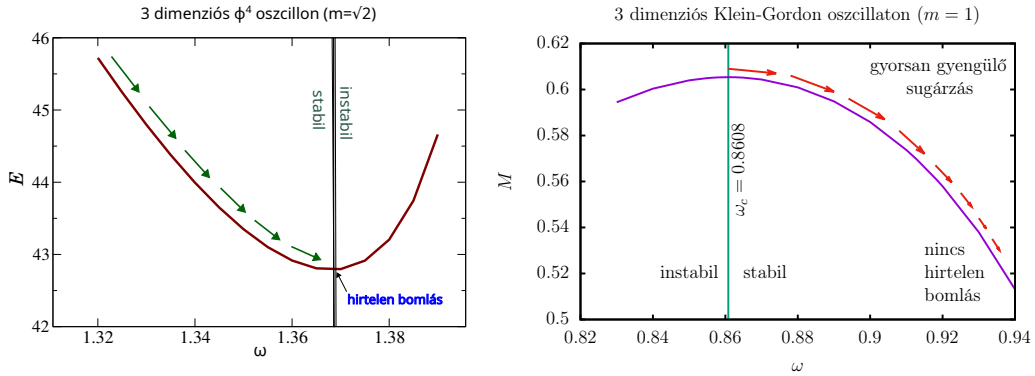


Itt egy egyszerűbb modell esetén a  $v_0^{(-)}$  belső megoldás komplex  $q$  síkon való viselkedését láthatjuk. A piros vonal az anti-Stokes vonal, ami mentén nagy távolságokra  $v_0^{(-)} \sim a \sin q + b \cos q$  alakú rezgések jelenhetnek meg, ahol  $a$  és  $b$  konstansok. A konkrét megoldást úgy választottuk, hogy mindkét konstans eltűnik,  $a = b = 0$ . Ennek ellenére, a zölddel jelölt Stokes vonal mentén megjelenik egy  $v_0^{(-)} \sim i\alpha \exp(-iq)$  nagy távolságokra lecsengő járuléka, ami a külső megoldás valós tengelyén fellépő sugárzásért lesz felelős. A járuléka  $\alpha$  amplitúdójának, vagyis a Stokes multiplikatornak a meghatározásához szükséges az általunk is használt Borel összegzéses módszer.

A Stokes jelenség precíz matematikai magyarázatát és általánosítását nyújtó resurgence elméletet Jean Écalle dolgozta ki a hetvenes évek végén [3, 4, 5]. Érdeemes lenne resurgence elméleti módszereket alkalmazni oszcillonokra is, hogy a sugárzás számolásának technikáját könnyebben be lehessen mutatni a resurgence elméletet ismerő kutatók részére. Az eljárás hatékonyságának növelésével magasabb rendű exponenciális korrekciókat is lehetne vizsgálni, de a sugárzás számolására használt eddigi módszerekkel is annyira precíz eredményeket érhetünk el, hogy további rendek számolására már nem feltétlenül van szükség.

**2. Mi az oka annak hogy a 4. fejezetben tanulmányozott Minkowski skalártérelméletben az 1+1 és 2+1 dimenziós esetekben az instabil tartományba történő belépés utáni hirtelen elbomlás” (sudden decay) jelensége (a magasabb dimenziókkal ellentétben) nem lép fel? Ez numerikus tapasztalat, vagy létezik valamilyen matematikai vagy fizikai szempontból megragadható intuitív magyarázat?**

Az oszcillonok hirtelen elbomlását és a stabilitás feltételeit legkönnyebben az energia frekvenciától való függésének tanulmányozásával lehet megérteni. A bal oldali ábrán sík háttéren rezgő oszcillonok energiájára, a jobb oldalon pedig a gravitációval kölcsönható oszcillatonok tömegére mutatjuk a numerikus eredményeket, három térdimenzió esetén. Az energia és a tömeg itt a mag tartományban található energiát és tömeget jelenti, a skalármező által kisugárzott rezgések által hordozott nagy távolságokra kiáramló energia illetve tömeg nélkül.



A legfontosabb különbség a két ábra között, hogy sík háttéren definiált háromdimenziós oszcillonoknál létezik egy alsó korlát az energiára. Ha a sugárzási veszteség hatására az oszcillon energiája ez alá csökkenne, akkor már nincs rendelkezésre álló lokalizált állapot, a konfiguráció hirtelen elbomlik. A gravitációs mezőhöz csatolt skalármező esetén nincs ilyen minimum tömeg, és az oszcillaton bármilyen sokáig megmarad, egyre lassuló sugárzással. Mindkét esetben, a skalármező rezgésének középponti amplitúdója és az ottani energiasűrűség monoton csökken a frekvencia növelésével. Ilyen módon alkalmazható az az általános fizikai elvárás, hogy a rendszer akkor stabil, ha a teljes energia (tömeg) növekszik a középponti sűrűség növelésével. Ezt az időfejlődést leíró numerikus szimulációk is alátámasztják mindkét esetben.

A háromdimenziós oszcillatonokhoz hasonlóan, az egydimenziós oszcillonok esetén sincs energia minimum, és így a stabil oszcillonok tömege és amplitúdója bármilyen kicsire lecsökkenhet, hirtelen elbomlás nélkül. A központi amplitúdó csökkenésével általában együtt jár az oszcillon térbeli méretének növekedése. Kettő térdimenzió esetén ez azt jelenti, hogy a nulla amplitúdójú határesetben éppen véges marad az energia. Mivel ez ekkor minimális energiát jelent, a kétdimenziós oszcillonok stabilak. Nem történik hirtelen bomlás, mert a sugárzás intenzitása is nullához tart, mégpedig sokkal gyorsabban mint az amplitúdó csökkenése. Numerikus időfejlészési kód alkalmazásával is azt tapasztaljuk, hogy egy és két dimenzió esetén az oszcillonok sokféle kezdőadatból könnyen létrejönnek, rendkívül gyengén sugároznak, és sosem bomlanak el hirtelen.

**Hasonló szellemben azt is kérdezhethetjük, hogy mi az oka az 5. fejezetben szereplő azon állításnak (88. oldal), miszerint gömbszimmetrikus téridőkben kis amplitúdójú lokalizált oszcillatonok csak 3,4,5 tér dimenzióban létezhetnek?**

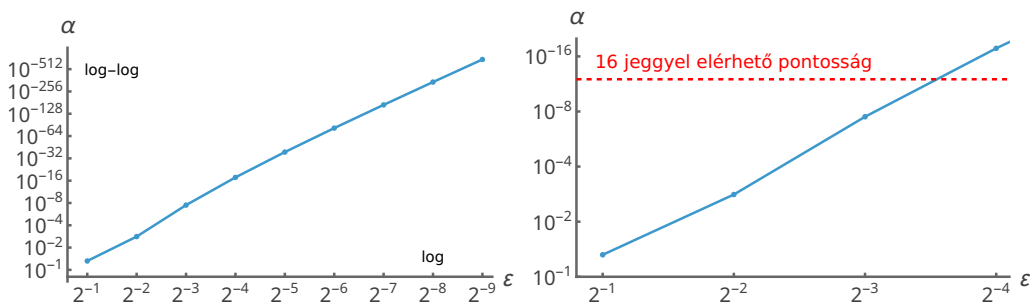
A gravitációhoz csatolt kis amplitúdójú oszcillatonokat vezető rendben a Schrödinger-Newton egyenletek írják le. Ezek az egyenletek tetszőleges  $d$  térdimenzió esetén értelmezhetők, és bebizonyítható, hogy  $d > 6$  esetén nincsenek lokalizált megoldásaik [6]. Oszcillatonokról szóló cikkünkben [7] és az internetre feltöltött összefoglalóban [8, 9] részletesen tárgyaltuk a tetszőleges dimenziós esetet. Egy térdimenzió esetén az Einstein tenzor nyommentessége miatt nem csatolható skalármező a gravitációhoz a szokásos módon. Két dimenziónál a Schrödinger-Newton egyenletek szétcsatolódnak, az egyik egyenlet lineárisává válik, így nem létezhet lokalizált megoldás. A  $d = 6$  esetben ugyan van lokalizált megoldás, de exponenciális

helyett csak polinomiálisan lecsengő, így fizikai szempontból nem elég jól lokalizált. Ilyen módon következnek, hogy kis amplitúdójú oszcillatonok csak  $3 \leq d \leq 5$  térdimenzió esetén léteznek. A stabilitásuk tanulmányozható a tömeg frekvenciától való függésének vizsgálatával. Kis amplitúdókra a tömeg az  $M \sim \varepsilon^{4-d}M^{(1)} + \varepsilon^{6-d}M^{(2)}$  összefüggés szerint viselkedik, ahol az  $\varepsilon$  amplitúdó paraméter és a frekvencia kapcsolata  $\varepsilon^2 = 1 - \omega^2$ , valamint  $M^{(1)} > 0$  és  $M^{(2)} < 0$  konstansok. Mivel az  $M(\varepsilon)$  függvény kis  $\varepsilon$ -ra csak  $d = 3$  esetén monoton növekvő, a háromdimenziós kicsi amplitúdóval rendelkező Klein-Gordon oszcillatonok stabilak, míg  $d = 4$  és  $d = 5$  esetén instabilak kell legyenek. Tudomásom szerint, még nem végeztek numerikus szimulációkat háromnál több térdimenziós oszcillatonok esetén.

### 3. Mi az oka a tézispontokban említett oszcillonok vizsgálata során tapasztalt numerikus és analitikus módszerek komplementer jellegű sikereinek?

A kérdés szorosan összefügg Jakovác Antal 3. kérdésével, így a válaszom is jelentős részben megegyezik. A numerikus és az analitikus módszerrel is ugyanazt számoljuk, a mag tartománytól nagy távolságokra megjelenő kicsi rezgések amplitúdóját, ezért ideális esetben ugyanazt a megoldást vizsgálva azonos eredményt kellene kapnunk. A megoldások egyparaméteres serege létezik, ezeket a középponti amplitúdónak megfelelő  $\varepsilon$  paraméter, vagy az  $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$  frekvencia értékével jellemezhetjük. A numerikus és az analitikus módszer különböző paraméter tartományokban működik legjobban.

A kétféle módszerrel kapott eredmények kapcsolata legkönnyebben az ötödrendű KdV egyenlet példáján mutatható be. Ebben az esetben jóval pontosabb numerikus eredmények is rendelkezésre állnak, és az analitikus kifejtésnek a magasabb rendjeit is ki tudjuk számolni. A következő két ábrán az  $\alpha$  sugárzási amplitúdó függését mutatjuk a központi amplitúdónak megfelelő  $\varepsilon$  paraméter függvényeként, a KdV esetben. A baloldalon a dolgozat 15. ábráját láthatjuk, amit tetszőlegesen sok jegyre számoló spektrális numerikus kóddal kaptunk. A jobboldalon kinagyítottuk az a részt, ami a szokásos 16 jegyre számoló kóddal is kiszámolható.



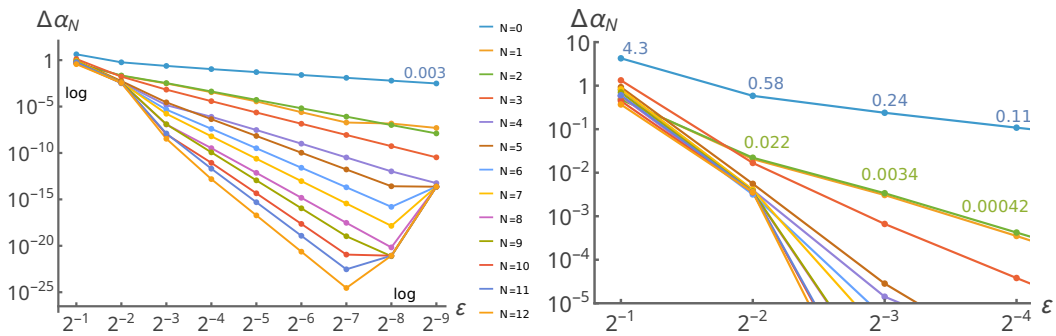
Az extrém gyors csökkenés miatt a függőleges tengelyen dupla logaritmusos skálát használunk. Nyilvánvalóan nem lehet kiszámolni a szokásos 16 jegy pontosságú aritmetika használatával egy  $10^{-16}$  körüli amplitúdóval rendelkező rezgést a távoli tartományban, ha a középpontban az amplitúdó még mindig  $10^{-1}$  körül marad. A doktori dolgozat megírásának idején, skalármezők által létrehozott oszcillonok és oszcillatonok esetén még csak 16 jeggyel számoló kódok álltak rendelkezésre, így numerikus eredményeink is csak viszonylag nagy amplitúdójú állapotokra voltak.

Az analitikus eredményeink a kicsinek tekintett  $\varepsilon$  amplitúdó szerinti kifejtésen

alapulnak. A sugárzási amplitúdó vezető rendben exponenciálisan lecsengő, és ehhez járulnak  $\varepsilon$  hatványai szerinti korrekciók. Az  $N$ -ed rendű analitikus közelítés alakja

$$\alpha_N = \frac{1}{\varepsilon^2} \exp\left(-\frac{\pi}{2\gamma\varepsilon}\right) \left(K_0 + K_1\varepsilon + K_2\varepsilon^2 + \dots + K_N\varepsilon^N\right),$$

ahol  $\gamma^2 = (-1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon^2})/(8\varepsilon^2)$ , és az összeg  $N + 1$  tagból áll. Oszcillonok és oszcillatonok esetén csak az  $\alpha_0$  vezető rend ismert, és a  $K_0$  konstans meghatározásához volt szükség a Borel összegzésre. A KdV esetben meg tudtuk oldani a belső kifejtést magasabb rendekben is, ezért több  $K_n$  konstans is rendelkezésre áll. A következő ábrákon az  $N$ -ed rendű analitikus eredmény  $\Delta\alpha_N = (\alpha_N - \alpha)/\alpha$  relatív hibáját mutatjuk a pontosnak tekinthető numerikus  $\alpha$  értékhez képest, a KdV elmélet esetén.



Látható, hogy kis és közepes  $\varepsilon$  amplitúdók esetén, a magasabb rendű kifejtéssel kapott eredmények egyre jobb közelítést adnak, és sok jegyre megegyeznek a numerikusan kapott értékekkel, tehát a két módszer egyértelműen konzisztens eredményt ad. A jobboldalon kinagyítottuk azt a kezdő tartományt, amelyre még lehetett volna numerikus eredményt kapni 16 jegyre számoló kóddal is. Látható, hogy az analitikus kifejtés  $\alpha_0$  vezető rendjének ilyen nagy központi amplitúdóknál még olyan nagy a hibája, hogy a sugárzás nagyságára csak durva becslésnek tekinthető.

Az utóbbi hónapokban kidolgoztunk oszcillonok esetére is egy tetszőleges jegyre számoló spektrális kódot, valamint ki tudtuk számolni a kifejtés néhány magasabb rendjét is. Egy térdimenzió esetén a numerikus és analitikus eredmények, a KdV esethez hasonlóan, több tizedesjegyre való egyezést mutatnak, de még nem kerültek publikálásra.

**4. Az oszcillatonok esetében a gravitációs tér és a skalártér összjátéka egy speciális időfüggő téridőgeometriát eredményez. Az ilyen téridőgeometria esetén tudtommal nincsenek megmaradó mennyiségekkel kapcsolatos szokásos Killing vektorok. Milyen megmaradó töltés felelős akkor azért, hogy egyáltalán definiálhatjuk a konfiguráció tömegét? Nyilván ennek az objektumnak tömegvesztéséről beszélünk ezért ez egy igen fontos elméleti kérdés. Ennek a kérdésnek a részletes tisztázása nem szerepel a dolgozatban.**

Egy oszcillatont is tartalmazó aszimptotikusan sík rendszer teljes tömegét a térszerű végtelenben definiált ADM (Arnowitt, Deser, Misner) tömeg adja meg a térszerű végtelenben. Azonban ez a tömeg időfüggetlen, és tartalmazza a rendszerben bármikor jelen lévő összes sugárzási energiát is. Gravitációs hullámokat kisugárzó

vagy nulla tömegű skalármezőt tartalmazó rendszer esetén a fényszerű végtelenben definiált időfüggő Bondi tömeg segítségével figyelembe vehetjük a kisugárzott energia veszteséget. Oszcillatonokat viszont csak tömeges skalármezők tudnak létrehozni. Tömeges skalármezők is képesek energiát kisugározni egy központi tartománytól nagy távolságokra, de az energia nem fénysebességgel távozik, így a Bondi tömeg állandó marad. Oszcillatonok fizikailag releváns tömegének leírásához egy kvázi-lokális tömeg fogalmat kell használnunk, ami megadja a mag tartományban található tömeg-energiát, és képes leírni annak csökkenését. Mivel a külső sugárzó tartományban az energiasűrűség nagyságrendekkel kisebb mint az oszcillaton központi részén, az így számolt tömeg nagysága csak sokadik tizedesjegyben függ attól, hogy pontosan hogyan választjuk a mag tartomány külső határfelületét. Nyilvánvalóan ott célszerű a határt kijelölni, ahol a mag tartományban kifelé haladva az exponenciálisan lecsengő skalármező rezgésbe megy át, és megjelenik az első zérushely.

Általános téridőkben többféle megközelítés is létezik a kvázilokális tömeg definiálására, és nincs általánosan elfogadott definíció. Viszont numerikus szimulációk azt mutatják, hogy az általános kezdőadatból létrejövő oszcillatonok rendkívül gyorsan gömbszimmetrikussá válnak, gravitációs hullámokat és skalármezőt kisugározva. Ezért az oszcillatonokkal kapcsolatos irodalom nagy része kizárólag gömbszimmetrikus rendszerekkel foglalkozik. Skalármezők még gömbszimmetria esetén is képesek energiát kisugározni, így az oszcillatonok tömegének csökkenése a szimmetriához adaptált numerikus kódokkal is tanulmányozható. Gömbszimmetrikus időfüggő tér-idő esetén létezik egy jól definiált, általánosan használt, és megmaradó mennyiségen alapuló kvázi-lokális tömegfogalom, a Misner-Sharp tömeg (energia) [10]. A [8, 9] összefoglalóban részletesen bemutattam a Misner-Sharp tömeg definícióját és tulajdonságait általános térdimenzió és kozmológiai konstans esetén, itt csak a fontosabb eredményeket foglalom össze 3 dimenziós aszimptotikusan sík téridőre.

Tetszőleges időfüggő gömbszimmetrikus téridő esetén definiálható az  $A$ -val jelölt függvény, amely minden ponthoz hozzárendeli a rajta átmenő kétdimenziós gömbnek a  $g_{ab}$  metrika alapján számolt felületét. Definiálható az  $\hat{r}$  geometriai sugár függvény is, az  $A = 4\pi\hat{r}^2$  összefüggéssel. A Misner-Sharp tömeg koordináta rendszer független definíciója:

$$\hat{m} = \frac{\hat{r}}{2} \left( 1 - g^{ab} \hat{r}_{,a} \hat{r}_{,b} \right) .$$

Az  $\hat{r}$  függvény segítségével definiálhatjuk a  $K^a = \epsilon^{ab} \nabla_b \hat{r}$  Kodama vektort [11, 12], ahol az  $\epsilon_{ab}$  antiszimmetrikus tenzor a térfogati forma a  $(t, r)$  síkban. A Kodama vektor divergenciamentes,  $\nabla_a K^a = 0$ , ezért a  $T_{ab}$  energia-impulzus tenzor segítségével definiált  $J_a = T_{ab} K^b$  energiaáram szintén divergenciamentes,  $\nabla_a J^a = 0$ , és így egy megmaradó töltést definiál. Egy  $n^a$  jövőbe mutató normálvektorú konstans  $t$  hiperfelületre integrálva, a megmaradó töltés

$$E = 4\pi \int_0^r \hat{r}^2 \sqrt{g_{rr}} n^a J_a dr .$$

Felhasználva, hogy a Misner-Sharp tömeg deriváltja  $\nabla_a \hat{m} = -4\pi \epsilon_{ab} J^b$ , elemi számolással belátható, hogy az integrállal definiált energiafüggvény megegyezik a Misner-Sharp tömeggel,  $E = \hat{m}$ . Következésképpen, az  $\hat{m}$  értéke az  $\hat{r}$  sugarú gömbön belül

elhelyezkedő tömeg nagyságát adja meg. Mivel megmaradó töltés által meghatározott, az időderiváltja az adott gömbön a skalármező által kisugárzott energiaárammal egyezik meg. Aszimptotikus értéke a téridő teljes  $M$  tömegét határozza meg, térszerű végtelenbe tartva az ADM tömeget, a null végtelen esetén a Bondi tömeget. Vákuum Schwarzschild megoldás esetén  $\hat{m}$  a téridő minden pontjában megegyezik a megoldás szokásos tömeg paraméterével.

### **5. Miben különböznek az oszcillatonok sugárzásakor illetve a két fekete lyuk ütközésekor keletkező gravitációs hullámok?**

Balakrishna és szerzőtársai [13] numerikus szimulációk segítségével vizsgálták nem gömbszimmetrikus módon deformált oszcillatonok rezgését. A kibocsátott gravitációs hullámok rendkívül gyorsan lecsengenek, és a konfiguráció gömbszimmetrikussá válik. Ez azzal magyarázható, hogy az oszcillatonoknak nincs határozott külső határfelülete, és az energiasűrűség a gyors exponenciális lecsengés ellenére sem csökken pontosan nullára, még nagy távolságra sem.

Jelentősebb gravitációs hullám kibocsátás oszcillatonok ütközésekor és összeolvadásakor várható. Az általános relativitáselmélet keretében számolt pontos numerikus eredmények még csak azonos tömegű oszcillatonok centrális ütközése esetén állnak rendelkezésre [14, 15]. A végállapot lehet oszcillaton vagy fekete lyuk, a kezdőállapotok tömegétől és sebességétől függően. A szimulációk szerint oszcillatonok ütközésekor általában több energia kerül kisugárzásra gravitációs hullámként mint azonos tömegű fekete lyukak ütközésénél. A számolt hullámforma jelentősen különbözik a fekete lyuk ütközéstől, az összeolvadó és a lecsengő fázisban is. Oszcillaton végállapot esetén a lecsengés hosszabb ideig tart, és visszhangszerűen visszatérő jelek jöhetnek létre a külső és belső fénygyűrűk létezése miatt. Az ütközés kimenetele a skalármező rezgésének relatív fázisától is függ. Ellentétes fázisnál bizonyos mértékű taszító hatás lép fel. Ilyenkor az ütközés után vagy mindkét oszcillaton elbomlik, vagy két fekete lyuk jön létre, amelyek kis idővel később összeolvadnak. Komplex skalármezők által létrehozott bozoncsillagok ütközése várhatóan nagyon hasonlóan történik az azonos kölcsönhatási potenciállal rendelkező valós mezők által létrehozott oszcillatonok ütközéséhez. A bozoncsillagok által kibocsátott gravitációs hullámokra vonatkozóan lényegesen több numerikus eredmény került eddig publikálásra, beleértve a nem centrális ütközés esetét is [16, 17, 18, 19].

Egymás körül keringő oszcillatonok esetén, amikor még viszonylag nagy távolságra vannak, a gravitációs hullám jel gyakorlatilag megegyezik az azonos tömegű fekete lyukak jelével. Az energia kisugárzása hatására közelebb kerülve, az oszcillatonok árapály erők hatására létrejövő deformációja eltolódást okozhat a hullámformában. Azonban, ha a skalármező nem Klein-Gordon, hanem jelentős az önkölcsönhatása, akkor létezhet annyira kompakt és nagy tömegű oszcillaton, ami az árapály hatására sem deformálódik jelentős módon. Ilyen esetekben az összeolvadás utáni lecsengés közben kibocsátott hullámok bonyolultabb és visszhangszerűen visszatérő viselkedése utalhat arra, hogy oszcillaton keletkezett. A következő generációs gravitációs hullám detektorok várhatóan képesek lesznek arra, hogy megkülönböztessék a fekete lyukak összeolvadását az egyéb egzotikus kompakt objektumok, mint például oszcillatonok vagy bozon csillagok, által esetlegesen létrehozott jelektől [20, 21, 22].

A korai univerzumban, közvetlen az inflációs időszak után, az inflaton kondenzá-

tum csomósodása során oszcillonok jöhetnek létre. Ezek az oszcillonok, formálódásukkor és hirtelen elbomlásukkor is, a sűrűség fluktuációk következtében gravitációs hullámokat hoznak létre, amelyek a gravitációs sugárzási háttéren megfigyelhetővé válhatnak [23, 24, 25].

**6. Mi az oka annak, hogy az oszcillatonok kapcsán illetve a Diósi-Penrose elmélet kapcsán is a Schrödinger-Newton egyenletekbe botlunk? Ha van mélyebb analógia, akkor használhatók-e a Szerző eredményei a hullámfüggvény gravitációs redukciójával kapcsolatos elméletekben?**

Oszcillatonok vizsgálatánál az Einstein egyenleteket oldjuk meg, úgy hogy az energia-impulzus tenzort egy  $m$  tömegű valós Klein-Gordon skalármező adja, amelyet  $\phi$ -vel jelölünk. A nemrelativisztikus határesetben  $\phi$ -t egy komplex  $\psi$  skalármezővel helyettesítjük,  $\phi = \frac{1}{\sqrt{2m}} (e^{-imt}\psi + e^{imt}\bar{\psi})$ . Feltesszük, hogy  $\psi$  lassan változik, így a második időderivált tagot elhagyhatjuk. Egyúttal az általános relativitáselmélet gyenge gravitációs határesetet is véve kapjuk az időfüggő Schrödinger-Newton egyenleteket [26, 27], amelyeknek dimenziótlan alakja [28]:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\Delta\psi + \Phi\psi \quad , \quad \Delta\Phi = |\psi|^2$$

ahol  $\Phi$  a gravitációs potenciál, és  $\Delta$  a Laplace-operátor. A  $\psi$  komplex skalárt egy részecske hullámfüggvényeként értelmezve, ez nyilvánvalóan megegyezik a Newtoni gravitációhoz csatolt Schrödinger egyenlettel, ami a Diósi-Penrose elméletben is alapvető fontosságú [29, 30]. Mindkét esetben egy skalármezővel leírható gyengén gravitáló mennyiséget vizsgálunk, így nem meglepő, hogy ugyanazt az egyenletrendszert kapjuk.

Mivel a gravitációs potenciál Poisson egyenletet elégíti ki, a Schrödinger-Newton egyenletek számos cikkben Schrödinger-Poisson egyenletek néven szerepelnek [31, 32]. Ha önkölcsönható skalármezőt csatolunk gravitációhoz, akkor a nemrelativisztikus newtoni limesz során a Schrödinger egyenletben megjelenik egy  $\psi|\psi|^2$ -vel arányos tag is, és ekkor a Gross-Pitaevskii-Poisson egyenlet elnevezés használatos. Ez az elnevezés különösen elterjedt az axionok által létrehozott oszcillatonok, más néven axion-csillagok esetén [33, 34].

Stacionárius megoldásokat a  $\psi = e^{-iEt}\Psi$  helyettesítéssel kaphatunk, ahol  $\Psi$  valós és nem függ az időtől. Az időfüggetlen Schrödinger-Newton egyenletek alakja

$$\Delta\Psi = (\Phi - E)\Psi \quad , \quad \Delta\Phi = |\Psi|^2 \quad .$$

Az oszcillatonokkal kapcsolatos munkáinkban közvetlenül ezt az időfüggetlen egyenletrendszert kaptuk, egy kicsinek tekintett  $\varepsilon$  amplitúdó-paraméter hatványai szerinti kifejtést alkalmazva, és a vezető rendet tekintve. Az időfüggetlen Schrödinger-Newton egyenleteknek léteznek exponenciálisan lokalizált gömbszimmetrikus megoldásai [35, 36, 37, 38], amelyek a kis amplitúdójú és nagy kiterjedésű oszcillatonokat írják le vezető rendű közelítésben. A Diósi-Penrose elméletben ezek a stacionárius megoldások azokat a végső időfüggetlen hullámfüggvény alakokat adják, amelyekké az általános szuperpozíciójú állapotok bomlanak a gravitációs kölcsönhatás hatására [30], így megfelelően lokalizált makro-objektumokat írnak le [29].

Ha az oszcillatonok amplitúdó szerinti kifejtését magasabb  $\varepsilon$  hatványok szerint skálázódó tagokkal folytatjuk, akkor egyre erősebben gravitáló skalármezők által létrehozott lokalizált állapotokat írhatunk le. A hullámfüggvény redukciójával kapcsolatos elméletekben ennek akkor lehet jelentősége, ha a newtoninál erősebb gravitációs kölcsönhatást akarunk vizsgálni. Bármilyen  $\varepsilon^n$  rendben a megoldás exponenciálisan lokalizált, ezért úgy tűnhet, hogy erős gravitáció esetén is vannak állandó energiájú lokalizált megoldásai a relativisztikus Einstein-Klein-Gordon egyenleteknek. Azonban, ha a Klein-Gordon egyenletben használt  $\phi$  skalár valós, az  $\varepsilon$  szerinti kifejtés nem konvergens hanem aszimptotikus sor, és az optimálisan trunkált összegnek van még egy  $\varepsilon$ -ban exponenciálisan kicsi hibája. Ennek nagyságrendje megfelel az oszcillatonok sugárzási amplitúdójának. A sugárzás annyira gyenge, hogy gyakorlati jelentősége valószínűleg nincs, de elméleti szempontból mindenképp érdekes, hogy nem létezik véges energiájú állandó amplitúdóval rezgő lokalizált állapot.

### **A bírálóban megfogalmazott észrevételekkel kapcsolatos megjegyzéseim és a felmerült kérdésekre való válaszaim:**

1. A jelenlegi doktori dolgozatnak létezik egy korábbi, 2019-es verziója [9], ami sajnos nem jutott el az eljárás bírálói szakaszáig. Ennek angol nyelvű változata az arXiv szerverre feltöltött összefoglaló cikk [8]. Ekkor még a dolgozat kívánatos terjedelme 80 és 200 oldal között volt, azóta lecsökkent 60 és 120 oldal közöttire. Az első változat átfogó összefoglalónak lett szánva az oszcillonok és oszcillatonok témaköréről. A második változat kifejezetten a sugárzás analitikus kifejtésen alapuló számolására koncentrált, és tartalmazza KdV egyenlettel kapcsolatos újabb eredményeket is. Igyekeztem a rendelkezésre álló terjedelemben csak a fontosabb eredményekre koncentrálni, de egyet értek azzal a megjegyzéssel, hogy hasznos lett volna nagyobb gondot fordítani az olvasóbarát környezet kialakítására.

2. A dolgozat írásakor numerikus eredmények időben periodikus oszcillon megoldásokra csak három dimenzió esetén álltak rendelkezésre. A dolgozat hosszabb verziójában alfejezetként elkülönül a kvázibreather megoldások általános kezelése a háromdimenziós numerikus szimulációk eredményétől. Célszerű lett volna megtartani az alfejezetekre való osztást a rövidített új változatban is.

**3. Nem világos számomra hogy mi lehet a kapcsolat az oszcillatonok gyenge sugárzásra való hajlama és a sötét energia között? Például egy ilyen kisebb módosítás az Alcubierre cikk vonatkozó részének néhány mondatos ismertetését jelentette volna.**

A sötét energiát egy kvintesszencia elnevezésű skalármező létezésével is magyarázhatjuk, de a kvintesszencia térben homogén eloszlású, nem hoz létre lokalizált struktúrákat. Ha létezne a kölcsönhatási potenciálnak minimuma, akkor is a skalármező extrém kicsi,  $\sim 10^{-33}eV$ , tömege miatt a létrejövő oszcillatonok mérete a kozmológiai horizont nagyságrendjébe esne.

Kis tömegű axion-szerű skalár részecskék homogén sötét anyagként viselkedhetnek a korai univerzumban. A gravitáció hatására a skalármezőből fokozatosan nemlineáris lokalizált struktúrák, vagyis oszcillatonok jöhetnek létre. Ha a mező tömege  $\sim 10^{-22}eV$  nagyságrendű, akkor galaxis méretű anyagcsomók keletkezhetnek, így lehetséges magyarázatot kapunk a sötét anyagnak a galaxisokban való eloszlására

[39, 40, 32]. Ennek feltétele, hogy az oszcillatonok stabilak és elegendően hosszú élettartamúak legyenek. Eredményeink szerint annyira lassan sugároznak, hogy az univerzum élettartamának megfelelő idő alatt is csak tömegük egy kis részét veszítik el [7, 41].

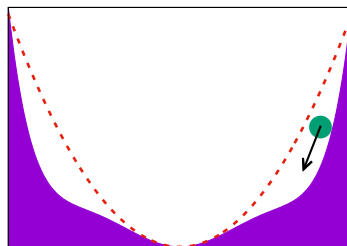
**Hasonlóan a dolgozatban felbukkan az a gondolat miszerint az oszcillatonok elbomlása során jelentősen megnövekedhet a gravitációs hullámok kibocsátása ami mérhetővé válhat. Létezik erre vonatkozó konkrét eredmény?**

Klein-Gordon skalármezőből gravitációs kölcsönhatás által létrehozott oszcillaton bár gyengén sugároz, nem bomlik el soha, mert a sugárzás nagyon gyorsan még tovább gyengül, és a kis amplitúdójú állapotok stabilak. Ha a skálárpotenciál által képviselt önkölcsönhatás elég erős, akkor az oszcillaton lényegében úgy viselkedik, mint egy sík háttéren létrejövő oszcillon, és ha az amplitúdója egy bizonyos határ alá esik hirtelen elbomolhat. Ez az elbomlás skalármező gyors kisugárzásával jár, de a gömbszimmetria miatt nem jönnek létre gravitációs hullámok. Ha viszont egy tartományban számos viszonylag közeli oszcillon jön létre és bomlik el, az mégis megfigyelhető hozzájárulást adhat a gravitációs hullám háttérhez. A skalármező nagy sűrűség ingadozásai a korai univerzumban gravitációs hullámokat generálhatnak, még oszcillonok létrejötte nélkül is [42]. Az oszcillonok megjelenésével létrejövő és később hirtelen elbomló nagy sűrűségű tartományok ezt lényegesen erősebbé tehetik. Erről a témáról számos publikáció jelent meg az utóbbi években [43, 44, 23, 45, 46, 47, 48, 24, 49, 25, 50, 51].

**6.** A kis-amplitúdós kifejtést bemutató cikkünkben [52] a változó feletti pont jelölte a  $\tau$  időkoordináta szerinti deriválást. A cikk (12)-es egyenletének felel meg a dolgozatban a (167)-es egyenlet. A két ponttal való jelölés sajnos benne maradt az egyik tagban. Mivel  $\omega_2 = -1$ ,

$$\ddot{\phi}_1 - \omega_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial^2 \tau} = 2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial^2 \tau} .$$

**7.** A 63. oldalon szereplő ábra az előző oldalon a 4.3.1 alfejezet előtti utolsó két mondatához tartozik, de sajnos a tördelés megváltozása miatt átkerült a következő oldalra. Az ábra az oszcillonok létezési feltételét illusztrálja.



A részletes számolásból kiderül, hogy a skalár önkölcsönhatását leíró  $U(\phi)$  potenciálnak a minimum környékén sekélyebbnek kell lennie mint az azonos tömeghez tartozó kvadratikus Klein-Gordon potenciálnak. Ez persze a rezgésidőt is csökkenti, így érthető, hogy az oszcillonok  $\omega$  rezgési frekvenciája mindig kisebb a skalármező  $m$  tömegénél.

**8. Nem világos számomra, hogy honnan látszik az az állítás, hogy a metrika A és B komponenseiben történő oszcillációk a statikus komponenshez képest kicsik.**

A doktori dolgozat 93. oldalán a 24. ábra jobboldali része mutatja az  $A$  és  $B$  metrika komponensek rezgését. Az, hogy a rezgés kicsi az időfüggetlen komponenshez képest, a numerikus eredményekből is jól látszik, de az 5.6 fejezetben leírt  $\varepsilon$  amplitúdó szerinti kifejtésből is könnyen adódik. A (323)-(324) egyenletek szerint, a metrikus függvények kifejtése az alábbi tagokkal kezdődik:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^4 \left[ a_4^{(0)} + a_4^{(2)} \cos(2\tau) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \\ B &= 1 - \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^4 \left[ b_4 - \frac{p_2^2}{8} \cos(2\tau) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^6), \end{aligned}$$

ahol  $a_2$ ,  $a_4^{(0)}$ ,  $a_4^{(2)}$ ,  $b_4$  és  $p_2$  már csak a radiális koordináta függvényei. Látszik, hogy van egy  $\varepsilon^2$  rendű időfüggetlen rész, amelynek alakját az  $a_2$  lokalizált függvény írja le. Az időben  $\cos(2\tau)$  szerint rezgő rész ennél jóval kisebb,  $\varepsilon^4$  rendű. Az amplitúdó paraméter összefüggése az oszcillon  $\omega$  rezgési frekvenciájával  $\varepsilon^2 = 1 - \omega^2$ , és így  $\varepsilon$  még nagy amplitúdójú oszcillatonoknál is viszonylag kicsi.

Budapest, 2026 április 17.



Fodor Gyula

## Hivatkozások

- [1] H. Segur and M. D. Kruskal, “Nonexistence of small-amplitude breather solutions in  $\phi^4$  theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 58, pp. 747–750, 1987.
- [2] Y. Pomeau, A. Ramani, and B. Grammaticos, “Structural stability of the Korteweg-de Vries solitons under a singular perturbation,” *Phys. D: Nonlin. Phenom.*, vol. 31, no. 1, pp. 127–134, 1988.
- [3] J. Écalle, “Les fonctions resurgentes, i, ii, iii,” *Publications Mathématiques d’Orsay. Paris*, 1981.
- [4] D. Dorigoni, “An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus,” *Annals of Physics*, vol. 409, p. 167914, 2019.
- [5] I. Aniceto, G. Başar, and R. Schiappa, “A primer on resurgent transseries and their asymptotics,” *Physics Reports*, vol. 809, pp. 1–135, 2019. A primer on resurgent transseries and their asymptotics.
- [6] P. Choquard, J. Stubbe, and M. Vuffray, “Stationary solutions of the Schrödinger-Newton model—an ODE approach,” *Differential Integral Equations*, vol. 21, no. 7-8, pp. 665–679, 2008.

- [7] G. Fodor, P. Forgács, and M. Mezei, “Mass loss and longevity of gravitationally bound oscillating scalar lumps (oscillatons) in  $D$  dimensions,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 064029, 2010.
- [8] G. Fodor, “A review on radiation of oscillons and oscillatons.” arXiv:1911.03340 [hep-th], 2019.
- [9] G. Fodor, „Skalármezők által létrehozott lokalizált állapotok.” <https://wigner.hu/gfodor/dokt.pdf>, 2019.
- [10] C. W. Misner and D. H. Sharp, “Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse,” *Phys. Rev.*, vol. 136, pp. B571–B576, 1964.
- [11] H. Kodama, “Conserved energy flux for the spherically symmetric system and the backreaction problem in the black hole evaporation,” *Progress of Theoretical Physics*, vol. 63, no. 4, pp. 1217–1228, 1980.
- [12] S. A. Hayward, “Gravitational energy in spherical symmetry,” *Phys. Rev. D*, vol. 53, pp. 1938–1949, 1996.
- [13] J. Balakrishna, R. Bondarescu, G. Daues, and M. Bondarescu, “Numerical simulations of oscillating soliton stars: Excited states in spherical symmetry and ground state evolutions in 3D,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 024028, 2008.
- [14] T. Helfer, E. A. Lim, M. A. G. Garcia, and M. A. Amin, “Gravitational wave emission from collisions of compact scalar solitons,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, p. 044046, 2019.
- [15] J. Y. Widdicombe, T. Helfer, and E. A. Lim, “Black hole formation in relativistic oscillaton collisions,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2020, no. 01, p. 027, 2020.
- [16] M. Bezares, M. Bošković, S. Liebling, C. Palenzuela, P. Pani, and E. Barausse, “Gravitational waves and kicks from the merger of unequal mass, highly compact boson stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 105, p. 064067, 2022.
- [17] M. Vaglio, C. Pacilio, A. Maselli, and P. Pani, “Bayesian parameter estimation on boson-star binary signals with a coherent inspiral template and spin-dependent quadrupolar corrections,” *Phys. Rev. D*, vol. 108, p. 023021, 2023.
- [18] T. Evstafyeva, U. Sperhake, I. M. Romero-Shaw, and M. Agathos, “Gravitational-wave data analysis with high-precision numerical relativity simulations of boson star mergers,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 133, p. 131401, 2024.
- [19] B.-X. Ge, E. A. Lim, U. Sperhake, T. Evstafyeva, D. Cors, E. de Jong, R. Croft, and T. Helfer, “Dynamics and gravitational radiation of stable and unstable boson-star mergers,” *Phys. Rev. D*, vol. 112, p. 124080, 2025.
- [20] P. P. Cardoso, V., “Testing the nature of dark compact objects: a status report,” *Living reviews in relativity*, vol. 22, p. 4, 2019.

- [21] M. Maggiore *et al.*, “Science case for the Einstein telescope,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2020, no. 03, p. 050–050, 2020.
- [22] K. G. Arun *et al.*, “New horizons for fundamental physics with LISA,” *Living reviews in relativity*, vol. 25, p. 4, 2022.
- [23] S. Antusch, F. Cefala, and S. Orani, “What can we learn from the stochastic gravitational wave background produced by oscillons?,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2018, no. 03, pp. 032–032, 2018.
- [24] X.-X. Kou, J. B. Mertens, C. Tian, and S.-Y. Zhou, “Gravitational waves from fully general relativistic oscillon preheating,” *Phys. Rev. D*, vol. 105, p. 123505, 2022.
- [25] K. D. Lozanov, M. Sasaki, and V. Takhistov, “Universal gravitational waves from interacting and clustered solitons,” *Physics Letters B*, vol. 848, p. 138392, 2024.
- [26] F. S. Guzmán and L. A. Ureña López, “Newtonian collapse of scalar field dark matter,” *Phys. Rev. D*, vol. 68, p. 024023, 2003.
- [27] F. S. Guzmán and L. A. Ureña López, “Evolution of the Schrödinger-Newton system for a self-gravitating scalar field,” *Phys. Rev. D*, vol. 69, p. 124033, 2004.
- [28] R. Harrison, I. Moroz, and K. P. Tod, “A numerical study of the Schrödinger–Newton equations,” *Nonlinearity*, vol. 16, no. 1, p. 101, 2003.
- [29] L. Diósi, “Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects,” *Physics Letters A*, vol. 105, no. 4, pp. 199 – 202, 1984.
- [30] R. Penrose, “Quantum computation, entanglement and state reduction,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 356, p. 1927, 1998.
- [31] L. Visinelli, “Boson stars and oscillatons: A review,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 30, no. 15, p. 2130006, 2021.
- [32] L. Hui, “Wave dark matter,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 59, no. Volume 59, 2021, pp. 247–289, 2021.
- [33] P.-H. Chavanis, “Phase transitions between dilute and dense axion stars,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 023009, 2018.
- [34] E. Braaten and H. Zhang, “Colloquium: The physics of axion stars,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 91, p. 041002, 2019.
- [35] R. Ruffini and S. Bonazzola, “Systems of self-gravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state,” *Phys. Rev.*, vol. 187, pp. 1767–1783, 1969.

- [36] I. M. Moroz, R. Penrose, and P. Tod, “Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 15, no. 9, p. 2733, 1998.
- [37] P. Tod and I. M. Moroz, “An analytical approach to the Schrödinger-Newton equations,” *Nonlinearity*, vol. 12, no. 2, p. 201, 1999.
- [38] L. A. Ureña-López, T. Matos, and R. Becerril, “Inside oscillatons,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 19, no. 23, p. 6259, 2002.
- [39] M. Alcubierre, F. S. Guzmán, T. Matos, D. Núñez, L. A. Ureña-López, and P. Wiederhold, “Galactic collapse of scalar field dark matter,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 19, no. 19, p. 5017, 2002.
- [40] L. A. Ureña-López, “Brief review on scalar field dark matter models,” *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, vol. 6, 2019.
- [41] P. Grandclément, G. Fodor, and P. Forgács, “Numerical simulation of oscillatons: Extracting the radiating tail,” *Phys. Rev. D*, vol. 84, p. 065037, 2011.
- [42] G. Domenech, “Scalar induced gravitational waves review,” *Universe*, vol. 7, no. 11, 2021.
- [43] S.-Y. Zhou, E. J. Copeland, R. Easther, H. Finkel, Z.-G. Mou, and P. M. Saffin, “Gravitational waves from oscillon preheating,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2013, no. 10, p. 26, 2013.
- [44] S. Antusch, F. Cefalà, and S. Orani, “Gravitational waves from oscillons after inflation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 118, p. 011303, 2017.
- [45] M. A. Amin, J. Braden, E. J. Copeland, J. T. Giblin, C. Solorio, Z. J. Weiner, and S.-Y. Zhou, “Gravitational waves from asymmetric oscillon dynamics?,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, p. 024040, 2018.
- [46] Y. Sang and Q.-G. Huang, “Stochastic gravitational-wave background from axion-monodromy oscillons in string theory during preheating,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, p. 063516, 2019.
- [47] K. D. Lozanov and M. A. Amin, “Gravitational perturbations from oscillons and transients after inflation,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, p. 123504, 2019.
- [48] T. Hiramatsu, E. I. Sfakianakis, and M. Yamaguchi, “Gravitational wave spectra from oscillon formation after inflation,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2021, no. 3, pp. 1–35, 2021.
- [49] K. D. Lozanov and V. Takhistov, “Enhanced gravitational waves from inflaton oscillons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 130, p. 181002, 2023.

- [50] K. Inomata, K. Kohri, and T. Terada, “The poltergeist mechanism – Enhancement of scalar-induced gravitational waves with early matter-dominated era.” arXiv:2511.07266 [astro-ph.CO], 2025.
- [51] K. D. Lozanov, M. Sasaki, and J. Tränkle, “Constraining the inflaton potential with gravitational waves from oscillons.” arXiv:2601.11360 [astro-ph.CO], 2026.
- [52] G. Fodor, P. Forgács, Z. Horváth, and A. Lukács, “Small amplitude quasibreathers and oscillons,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 025003, 2008.