

Bírálóí vélemény
Révész Szilárd György
Extremal problems for positive definite functions and polynomials
című MTA doktori értekezéséről

Az összesen 172 oldalas értekezés három fejezete három különböző approximációelméleti irány kutatási irány eredményeit foglalja össze.

Turán-Erőd típusú fordított Markov-egyenlőtlenségek a komplex síkon. A fejezet első része a fordított Markov-egyenlőtlenségekkel foglalkozik. Nevezetesen, ha K kompakt, konvex halmaz a komplex síkon, p pedig n -edfokú polinom, amelynek gyökei K -ban vannak, mekkora $M(K) = \min \left\{ \frac{\max_K |p'|}{\max_K |p|} : p \in \mathbb{C}[z], \deg p = n \right\}$?

A jelölt bemutatja Turán Pál (K szakasz, illetve K körlemez), Erőd János (K ellipszis, illetve K határa sima és a görbülete mindehol legalább κ_0), Levenberg, és Poletszkij (olyan K halmazok, amelyek bármely határpontján keresztül húzható olyal R rugarú kör, amely tartalmazza K -t) és Erdélyi Tamás (négyzet) korábbi részeredményeit, becsléseit, amelyek különböző alakú K halmazok esetén érvényesek, majd és a konstans szorzótól eltekintve megadja a pontos nagyságrendet a K halmaz és a fokszám függvényében, tetszőleges konvex K halmaz esetén. Az általánosítás Halász Gáborral közös eredmény.

A fejezet második fele Blaschke két klasszikus konvex geometriai tételét általánosítja két dimenzióban. Ezek közül az egyik, a „rolling ball tétel”, legalábbis kellően sima határu halmazokra, magadja, hogy milyen esetekben fedi le K -t a határgörbe mindegyik simuló köre (az ilyen esetek szorosan kapcsolódnak Erőd, Levenberg és Poletszkij eredményeihez). Az általánosabb eredmény kimondásához és alkalmazásához nincs szükség a határgörbe simaságára.

Számomra meglepő, hogy a szerző nem használja az „alsó görbület” és „felső görbület” kifejezéseket, holott az általánosításhoz a folytonos esetben valójában ilyen jellegű mennyiséget definiál és használ.

Pozitív definit függvényekre vonatkozó Turán típusú extrémális problémák
A második fejezet részben a jelölt saját, részben M. Kolountzakisszal közös eredményeket foglal össze. A kiindulópont az a probléma, hogy ha az f pozitív definit függvény tartója része egy 0-ra szimmetrikus, síkbeli Ω tartománynak, és $f(0) = 1$, akkor mennyire lehet nagy $|f|$ integrálja Ω -n, illetve mennyire lehet nagy $|f|$ egy megadott pontban; ezt a $\mathcal{T}(\Omega)$ számot nevezi az Ω tartomány Turán-konstansának. Révész áttekinti és összehasonlítja a rokon kérdésekre, különböző függvénycsaládok eseteire adott korábbi válaszokat.

A kérdéseket és a korábbi eredményeket kiterjeszti lokálisan kompakt Abel-csoportokra is. Ehhez egy újabb, a korábbiaknál kevésbé speciális felsőszűrűség-fogalmat vezet be halmazokra és mértékekre, ami nem függ önkényesen válaszott elemektől (pl. felszálló részszorozatok megválasztásától). Bemutatja a sűrűség, az Ω eltoltjaival történő parkettázások, pakolások és a spektralitás közötti kapcsolatot, és az új sűrűség fogalom felhasználásával kiterjeszti Erdős, Sárközi, Hegyvári, Fürstenberg eredményét lokálisan kompakt Abel-

csoportokra is. Az alkalmazott módszerek nem csak konvex hamazokra működnek, hanem $H - H$ alakú halmazokra is.

Idempotens trigonometrikus polinomok koncentrációja. A harmadik fejezet A. Bonamival közös eredményeket foglal össze. A Cowling és Ash által felvetett kérdéskör hézagos trigonometrikus polinomok p -koncentrációja nyílt, illetve mérhető halmazokra vonatkoztatva a p kitevő véges pozitív értékei esetén. Révész kiterjeszti és messzemenően általánosítja Pichorides, Montgomery, Kahane, Ash, Jones, Anderson, Ash, Jones, Rider és Safari korábbi ismert eredményeit.

Nyílt halmazok és páros egész kitevő esetén a koncentráció mértékét egy szűk intervallumba szorítja be, a többi kitevőre bebizonyítja, hogy a koncentráció teljes. Megmutatja, hogy $p \neq 2$ esetén hézagos polinomokra ugyanakkora szintű koncentráció áll fenn, mint a nem hézagos esetben, míg $p = 2$ -re, végtelenhez tartó hézagok esetén nincs koncentráció. Hasonló eredményekre jut mérhető halmazok és 1-nél nagyobb kitevő esetén. A $1/2 < p \leq 1$ esetekben is vannak részeredményei. A fejezet számos további eredményt tartalmaz, például megvizsgálja a 0-beli és az $1/2$ -beli koncentráció mértékét, illetve becsléseket ad pozitív együttatós esetben és diszkét csoportokon vett koncentrációra is.

Észrevételek, kérdések.

1.1. A két általánosított Blaschke-tétel állítását nyilván megfogalmazhatjuk alsó, illetve felső görbülettel, ha az alsó és felső görbületet valamelyik lehetséges módon definiáljuk:

(a) *Ha tetszőleges határpontban $\bar{\kappa} \leq \kappa_0$, akkor bármely határpontra illeszthető olyan $1/\kappa_0$ sugarú kör, amit K tartalmaz.*

(b) *Ha tetszőleges határpontban $\underline{\kappa} \geq \kappa_0 > 0$, akkor bármely határpontra illeszthető olyan $1/\kappa_0$ sugarú kör, ami tartalmazza K -t.*

Vizsgálta-e annak lehetőségét, hogy Blaschke eredeti bizonyítását átvigyük erre az általánosabb esetre akár a síkban, akár magasabb dimenzióban?

1.2. Nem állíthatjuk-e elő a K halmazt sima határu halmazok egy sorozatának limeszeként, amikre aztán Blaschke eredeti tételei alkalmazhatók? (Sok további megközelítési irányt el tudok képzelni. Pl. A határ simaságán olyan módon is könnyen javíthatunk, ha K helyett K és egy kicsi körlemez Minkowski-összegét vesszük, ilyenkor ugyanis egyértelmű lesz az érintőirány, nincs szükség a normálvektor többértékűségére.)

2. A disszertáció (1.11), illetve tézisfüzet (3) képletében (Csebishev-lemma) szerintem mindig egyenlőség van.

3. Mint a disszertáció aláhúzza, a Hegyvári-, illetve Erdős-Sárközi féle felsőűrűség-fogalmak közös gyengesége a felszálló részcsoporthoz sorozat önkényes megválasztása. Ez engem arra emlékeztet, mint amikor valaki egy függvény limesz

szuperiora helyett egy konkrét sorzat mentén vett függvényértékek limesz superiorát veszi, például $\limsup_{\infty} f$ helyett $\limsup f(n)$ -et. Mi történne, ha a szokásos definíció,

$$\limsup_{\infty} f = \inf \left\{ \sup f((x, \infty)) : x \geq x_0 \right\}$$

mintájára az Erdős-Sárközi féle definíciót így módosítanánk?

$$\overline{D}(A) = \inf \left\{ \sup \left\{ \frac{|A \cap (R + x)|}{|R|} : H \leq R \leq G, R \text{ véges}, x \in G \right\} : H \leq G, H \text{ véges} \right\}$$

Lényegesen különböző lenne-e az így kapott felsősűrűség-fogalom a doktori munkában bemutatott felsősűrűség-fogalomtól? Ismerünk-e olyan σ -véges csoportot, amelyben a kétféle felsősűrűség különbözik?

4. A 2.3.4. példa szerintem sántít, ugyanis a H_n halmaz nem részcsoportha $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ -nek.

5. A harmadik fejezetben, a pozitív együtthatós esetben nem lenne-e egyszerűbb egy konkrét polinom hatványozásával (pl. $(1 + e_{2N} + e_{3N})^K$ alakban) konstruálni a koncentrálnódó polinomsorozatot?

6.1. Végül néhány megjegyzés a dolgozat leírásának minőségéről. A disszertáció és a téziszfüzet olvashatóságát nagymértékben rontja több bosszantó figyelemtelenség, hiba; félreérthető, definiálatlan vagy több oldallal később definiált fogalmak, jelölések használata. Sem a disszertációban, sem a téziszfüzetben nem definiálja — az amúgy gyakran használt — " $\subset\subset$ " és " $\Subset$ " jelöléseket. (Mint a jelölttől megtudtam, a két szimbólum ugyanazt, a kompakt részhalmazt jelenti...) A „negatív együttható” és a „nemnegatív együttható” fogalma sem egymás ellentéte; az előbbi alatt a negatív indexű együtthatót, az utóbbi alatt a nemnegatív értékű együtthatót kell érteni.

6.2. A dolgozat jobb érthetőségét néhány illusztráció is nagyban javítaná. Sajnos geometriai megfontolásokat is bőségesen tartalmazó disszertációban egyáltalán nincsenek ábrák. Ez azért is meglepő, mert a jelölt forrásként használt saját cikkei eredetileg még tartalmaztak ábrákat.

A fenti észrevételeim, kérdéseim nem érintik a tárgyalt eredmények lényegét. Összességében, a disszertációban bemutatott módszerek és eredmények fontosak és jelentősek, számos új ismerettel gazdagították a tárgyalt témaköröket. Az értekezés maximálisan megfelel az MTA doktora cím követelményeinek. Ennek alapján javaslom a nyilvános vita kitűzését és a doktori cím odaítélését.

Budapest, 2010. december 28.

Kós Géza